

304645

Teljes

3
1954
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ALKALMAZOTT
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
RÉNYI ALFRÉD

III. KÖTET
1954
1—2. FÜZET

★

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III.
1954
ВЫПУСК 1—2

★

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

TOME III.
1954
FASCICULE 1—2



1955

TARTALOMJEGYZÉK

RÉNYI A.: Előszó.....	7
EGERVÁRY J.: A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására	9
TASNÁDY I.: Megjegyzések Egerváry J.: A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására c. dolgozatához	25
EGERVÁRY J.: Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában	31
LOVASS-NAGY V.: Két végén felfüggesztett gerenda stabilitásának vizsgálata a matrix-számítás segítségével	49
LOVASS-NAGY V.—GYÖRÝ T.: Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálata a matrix-számítás segítségével	65
MEDGYESSY P.—RÉNYI A.—TETTMANTI K.—VINCZE I.: A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem teljes-diffúzió esetében	81
SZÉKELY G.—SZÉKELY T.: Szerves <i>S_i</i> -vegyületekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról	99
TAKÁCS L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról	115
MEDGYESSY P.: Szorzatintegrálás, Fourier-szintézis és hasonló feladatok elvégzése kvadrát-planiméter és egy új készülék kombinációjának segítségével.....	129
MEDGYESSY P.: Diszkrét valószínűség-eloszlások keverékének felbontása összetevőire	139
MEDGYESSY P.: Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban	155
BÉKÉSSY A.: Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűségeloszlásáról.....	171
SARKADI K.: A várható eltérésre vonatkozó Sheppard-korrektció.....	183
SARKADI K.: Mozdonyok várakozási idejéről	191
BOTOS Gy.—HOSSZÚ M.: Implicit alakú függvények ábrázolása pontsoros nomogramokkal	195
FÉNYES T.: Többrétegű tekercsekben fellépő szkineffektus.....	209
FREUD G.: A potenciálemélet harmadik peremértékfeladatáról	223
BOGNÁR J.—FREUD G.: Elektromos térbe helyezett dipólusrotátor kvantált energianívóinak számítása	239
SZILVAY G.-NÉ—ZERGÉNYI E.: Egy hővezetési feladatról	253
SZILYAY G.-NÉ Hőmérséklet eloszlás kettőscsőves hőcserélőben	265
AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET OSZTÁLYAINAK SZEMINÁRIUMAIBAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI	275
AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, 1954 JANUÁR 1. ÓTA MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE	285

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
ALKALMAZOTT
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
RÉNYI ALFRÉD

III. KÖTET
1954
1—2. FÜZET

★

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ III.
1954
ВЫПУСК 1—2

★

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE
TOME III.
1954
FASCICULE 1—2



MATHE
TUDOM
KÖZLEMÉNYEI

**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI**

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐSÉG: ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET,
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN ÚT 31, I. EMELET

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó dolgozatokat közölnek, magyar nyelven, két világnyelven írt kivonatokkal. Évente 1 kötetben 4 füzet jelenik meg. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ**

РЕДАКТОР: АЛЬФРЕД РЕНЬИ

В трудах Института Прикладной Математики печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательского работы Института, на венгерском языке с резюме на двух мировых языках. Ежегодно выходит 1 том в 4 выпусках. Редакция: Институт Прикладной Математики, Будапешт, VI., ул. Сталина 31. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21) текущий счет № 45—790—057—50—032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

**PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE**

RÉDACTEUR: ALFRÉD RÉNYI

Les Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées contiennent des articles concernant les résultats du travail de l'Institut en langue hongroise avec résumés en deux langues de rayonnement mondial. Il paraît 1 volume contenant 4 fascicules par an. Rédaction: L'Institut des Mathématiques Appliquées, Budapest, VI., Sztálin út 31. On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21.). Compte-courant No. 45—790—057—50—032. Pour établir les relations d'échange adressez vous à la rédaction.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Szöllősi Károly

Kézirat beérkezett: 1955. V., 25. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 25 (A/5) ív

36715/55 — Akadémiai Nyomda, V. Gerlőczy u. 2. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

ELŐSZÓ

Több oldalról megnyilvánult kívánságnak eleget téve jelen számtól kezdve Közleményeinket évente 4 füzetben adjuk ki. Ilyen módon lehetőségessé válik, hogy az Intézetben elért tudományos eredményekről kisebb késedelemmel adjunk számot. Öröndetesen fejlődő külföldi csere-kapcsolatainkra való tekintettel már ettől a számtól kezdve az eddiginél részletesebb idegennyelvű kivonatokat közlünk, két világnyelven. Tervbe vettük, hogy a jövőben esetenként egy-egy dolgozat teljes szövegét is közöljük egy idegen nyelven.

Ez a kettős szám 20 dolgozatot tartalmaz, az Intézet munkatársainak és az Intézettel együttműködő másutt dolgozó kutatók munkáit. A dolgozatokból kitűnik, hogy az Intézet 1954-ben tovább folytatta munkáját a matematika gyakorlati alkalmazásai terén. Ezt a munkát a jövőben változatlan lendülettel kívánjuk folytatni, tekintve, hogy tudatában vagyunk annak, hogy nép-gazdaságunk és ezen belül elsősorban az ipar fejlesztése és műszaki színvonalának emelése nagy feladatokat állít a matematikusok elé. Ezeket a feladatokat azonban a matematikusok csak úgy tudják eredményesen megoldani, ha a matematika gyakorlati alkalmazására irányuló munkájuk elméleti kutatómunkával párosul. A gyakorlati célkitűzésű munkának elméleti kutatómunkával való összekapcsolását és alátámasztását az Intézet a jövőben az eddiginél fokozottabban fogja tudni megvalósítani, annak következtében, hogy 1955 augusztus 1-vel megtörtént az Intézet átszervezése a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉ-vé. Az Intézet nevének megváltoztatását az Intézet feladatkörének kibővülése tette szükségessé, és azt a törekvést fejezi ki, hogy az Akadémia matematikai intézete ne csak a matematikai gyakorlati alkalmazásainak, hanem az elméleti matematikai kutatómunkának is otthonává váljék, és ezáltal az Intézet keretein belül az elmélet és gyakorlat szorosabb egysége alakuljon ki. Az átszervezés kapcsán rövidesen új elméleti osztályok alakulnak meg az Intézetben; ugyanakkor azonban a gyakorlati alkalmazásokkal foglalkozó osztályok munkájukat változatlanul tovább folytatják, sőt arra fogunk törekedni, hogy az elméleti kutatások fejlesztésével párhuzamosan, és a lehetőségekhez képest azzal összehangolva, az Intézet által a matematika gyakorlati alkalmazásai terén végzett munka színvonalát emeljük és eredményességét fokozzuk.

Az Intézet átszervezésével kapcsolatban egy elvi kérdésre is szeretnénk röviden kitérni. A matematika egyes eredményeit a saját szakterületükön felhasználó szakemberek közül, akik a matematikát nem a maga teljességében, hanem csak saját szükségleteiken keresztül nézik, sokan hajlanak arra, hogy a matematikát ne tekintsék önálló tudománynak, hanem csak alárendelt segédtudománynak. Egyesek a matematika lebecsülésében odáig mennek, hogy a

matematikában csak »nyelvet«, más tudományok eredményeinek kifejezési eszközét látják. Felhasználom az alkalmat, hogy rámutassak az ilyen nézetek téves és káros voltára. A matematika önálló tudomány, amelynek sajátos tárgya, problematikája, módszerei vannak. Akinek a mai matematika eredményeiről, a matematikai kutatás sokirányú szétágazottságáról, de a távoli fejezeteket is összekapcsoló belső egységéről, továbbá a matematika történetéről legalább nagy vonalakban áttekintése van, ezt nem is vonja kétségbe. Kétségtelen, hogy a matematika valóban segédtudomány-funkciót tölt be a természettudományokban és a műszaki tudományokban, azonban ezt a funkciót a matematika éppen annak következtében tudja oly sok, egymástól távoleső területen betölteni, mert önálló tudomány, amelynek eredményei olyan alapvetőek és annyira általánosak, hogy a matematika szinte minden más tudományban felhasználható mint a kutatás eszköze, mint a törvényszerűségek vizsgálatának módszere. A matematikának segédtudománnyá való degradálása nemcsak elvileg helytelen, hanem káros nézet is, mert a matematika valódi jelentőségének felismerését gátolja, és ezen keresztül akadályozza a matematika fejlődését és eredményes felhasználását. Abban a tényben, hogy intézetünket a Magyar Tudományos Akadémia matematikai kutatóintézeté szervezte át, a matematikának mint önálló tudománynak az elismerése fejeződik ki. Meggyőződésünk, hogy ez a nagyjelentőségű intézkedés újabb lendületet fog adni a kutatómunkának a matematika és annak alkalmazásainak egész széles frontján.

Közleményeink az átszervezés következtében az 1955-ös évfolyamtól kezdve »A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI« címen fognak megjelenni. A folyóirat irányvonalában ez azt a változást fogja jelenteni, hogy abban a mértékben, ahogy a kutatómunka az Intézetben elméleti vonalon is kibontakozik, Közleményeink helyet biztosítanak elméleti jellegű dolgozatoknak, beleértve a matematika és alkalmazásainak elvi kérdéseit és történetét is. Közleményeink azonban ezen túl is elsősorban a matematika alkalmazásaival foglalkozó, illetve az alkalmazások szempontjából jelentőséggel bíró munkákat fognak közölni, tekintettel arra, hogy Közleményeink az egyetlen ilyen irányú hazai matematikai folyóirat, és az elsősorban elméleti jellegű munkák közlésére más folyóiratok is rendelkezésre állnak. Továbbra is törekedni fogunk arra, hogy Közleményeink a matematikát felhasználó nem-matematikusok munkáját elősegítse azzal, hogy a matematikát hozzájuk és őket a matematikához közelebb hozza. Ennek érdekében a jövőben fokozottabb mértékben fogunk összefoglaló jellegű munkákat, bibliográfiákat, függvénytáblázatokat stb. is közölni.

Annak érdekében, hogy Közleményeink megnövekedett feladatait eredményesen el tudják látni, ismételten kérjük olvasóinkat, hogy tanácsaikkal, kritikájukkal, kívánságaik közlésével támogassák munkánkat.

Budapest, 1955. augusztus 2.

Rényi Alfréd

a Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézetének
igazgatója

ПРЕДИСЛОВИЕ

Удовлетворяя неоднократно высказанные пожелания, начиная с настоящего выпуска наши »Труды« будут издаваться 4 раза в год. Таким образом становится возможным сообщать о научных результатах, достигнутых в институте, с меньшим опозданием. Принимая во внимание отлаженно развивающийся обмен с заграничными научными журналами, уже начиная с настоящего выпуска, мы публикуем более подробные, чем раньше, резюме на русском и еще одном иностранном языках. В будущем будет публиковаться на одном из иностранных языков также полный текст некоторых работ. Настоящий (двойной) выпуск содержит 20 работ, выполненных сотрудниками института и сотрудничающими с институтом исследователями, работающими в других местах. Из работ видно, что в 1954 году институт продолжал исследования в области практических приложений математики. Эту работу мы собираемся продолжать в будущем с неизменным размахом, сознавая, что развитие нашего народного хозяйства, в первую очередь развитие промышленности и повышение ее технического уровня ставит перед математиками большие задачи. Но эти задачи математики могут успешно решить лишь в том случае, если их работа, направленная на практическое приложение математики, сочетается с теоретической научно-исследовательской работой. Институт сможет в будущем лучше сочетать и обосновывать работу с практическими целями теоретической исследовательской работы в следствии того, что 1-го августа 1955 года институт был реорганизован в Математический Институт Академии Наук Венгрии. Изменение названия института было вызвано расширением круга задач института и выражает стремление к тому, чтобы математический институт Академии стал приютом не только практических приложений математики, но и теоретической математической научно-исследовательской работы и благодаря этому в рамках института образовалась более тесная связь теории и практики. В связи с реорганизацией вскоре в институте образуются новые теоретические отделы ; в то же время отделы, занимающиеся практическими приложениями, продолжают свою работу ; более того, мы будем стремиться к тому, чтобы, параллельно развитию теоретических исследований и, по мере возможности, согласованно с ним, уровень и успех работы, проводимой институтом в области приложения математики, возрастали.

В связи с реорганизацией института мы хотели бы коротко остановиться на одном принципиальном вопросе. Среди специалистов, использующих отдельные результаты математики в области своей специальности, видящих математику не как единое целое, а лишь с точки зрения собственных потребностей, многие считают, что математика не самостоятельная

наука, а лишь подчиненное вспомогательное средство. Кое-кто в недооценке математики дошел до того, что видит в математике лишь «язык», средство выражения результатов других наук. Я использую случай, чтобы указать на ошибочность и вредность таких взглядов. Математика самостоятельная наука, имеющая свой специфический предмет, проблематику, методы. Тот, кто, хотя бы в общих чертах, знаком с результатами современной математики, с многосторонней разветвленностью, но и с внутренним единством, соединяющим далекие друг от друга разделы математических исследований, наконец, с историей математики, не сомневается в этом. Несомненно, математика действительно играет роль вспомогательной науки в естественных и технических науках, но эту функцию математика именно потому и может успешно выполнять в таких разнообразных, столь удаленных друг от друга областях, что она является самостоятельной наукой, результаты которой настолько фундаментальные и общие, что математика может быть использована чуть ли не во всех науках как средство исследования, как метод изучения закономерностей. Низведение математики до уровня вспомогательной науки не только принципиально неправильно, но и вредно, так как препятствует осознать действительное значение математики и через это мешает ее развитию и успешному применению. В том факте, что Академия Наук Венгрии реорганизовала наш институт в математической научно-исследовательский институт, выражается признание математики как самостоятельной науки. Мы уверены в том, что это важное решение даст новый толчок научно-исследовательской работе на всем широком фронте математики и ее приложений.

В следствии реорганизации наши труды, начиная с 1955 года, будут выходить как «Труды Математического Института Академии Наук Венгрии». В направлении журнала это приведет к тому, что в той мере, в какой научно-исследовательская работа в институте будет развиваться по теоретической линии, в трудах будут публиковаться работы теоретического характера, включая и принципиальные вопросы и историю математики и ее приложений. Однако, наши «Труды» и в дальнейшем будут публиковать в первую очередь работы, связанные с приложениями математики или имеющие значение с точки зрения этих приложений, ввиду того, что «Труды» являются единственным таким отечественным журналом, а для публикации работ теоретического характера существуют и другие журналы. И в дальнейшем мы будем стремиться к тому, чтобы наши «Труды» способствовали работе нематематиков, использующих математику, приближая математику к ним, а их к математике. В интересах этого в будущем мы будем в большей мере публиковать работы обзорного характера, библиографии, таблицы функций и т. д.

В интересах того, чтобы наши «Труды» могли успешно удовлетворять возросшим потребностям, просим наших читателей содействовать нашей работе советами, критикой, сообщением пожеланий.

Будапешт, 2 августа 1955 г.

Альфред Реньи
директор
Математического Института
Академии Наук Венгрии

PRÉFACE

Pour satisfaire à des demandes venant de plusieurs côtés, nous sommes résolus à faire paraître nos Publications en 4 fascicules par an, à partir du présent numéro. De cette façon, il sera possible de rendre compte des résultats scientifiques obtenus dans notre Institut avec moins de retard. En tenant compte de nos rapports d'échange, nous donnerons, dès maintenant, des résumés plus détaillés qu'auparavant en deux langues étrangères. De plus, nous nous proposons d'insérer la traduction étrangère complète de certains articles.

Ce numéro double comprend 20 travaux des collaborateurs de notre Institut et d'autres travailleurs scientifiques prenant intérêt à notre champ de recherches. Les articles publiés témoignent de ce que, pendant l'année 1954, nous avons continué notre travail dans le domaine des mathématiques appliquées. Nous désirons poursuivre ce travail avec un zèle inchangé, conscients des tâches importantes que notre économie nationale et plus spécialement notre devoir de développer notre industrie et d'en élever le niveau scientifique assignent aux mathématiciens. Pourtant, seul un travail de recherches théoriques, intimement lié aux applications pratiques peut permettre aux mathématiciens de résoudre ces problèmes. Le fait que, dès le 1^{er} août 1955, lors d'une réorganisation, notre Institut vient d'être transformé en INSTITUT DE MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE, ne fait que de souligner notre programme nous engageant à joindre le travail d'ordre pratique à la recherche théorique. Le nom nouveau est propre à exprimer l'élargissement du champ de recherches de notre Institut et nos efforts de faire de l'Institut de Mathématique de notre Académie le foyer non seulement des applications pratiques des mathématiques mais encore de l'activité de recherches théoriques, pour contribuer ainsi, entre les murs de l'Institut même, à l'unité de la théorie et de la pratique. Faisant suite à la réorganisation, nous procéderons à créer, au sein de l'Institut, des sections nouvelles pour la recherche théorique ; en même temps que les sections s'occupant des applications pratiques continuent, à leur tour, leur travail ; de plus, nous ferons de notre possible pour encourager parallèlement au développement des recherches théoriques, l'activité des applications pratiques, pour élever ainsi le niveau scientifique et l'efficacité de ce genre de travail.

Conformément à la réorganisation que nous venons de porter à la connaissance de nos lecteurs, nos Publications porteront, dès l'année 1955, le titre de PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE. Ce changement de titre indique un changement dans la direction de notre périodique aussi : notamment qu'à mesure du développement

des recherches théoriques faites dans l'Institut, nous publierons aussi des études d'ordre théorique y compris des travaux ayant pour sujet les principes et l'histoire des mathématiques et de leurs applications. Cependant, la majorité des articles que nous allons insérer, dans la suite, dans nos Publications, traiteront toujours des sujets sur les applications des mathématiques ou ayant une importance particulière au point de vue des applications, étant donné que notre périodique est le seul organe spécialement destiné à ce but, alors que nous avons en Hongrie plusieurs d'autres périodiques pour y faire paraître des articles consacrés à des études purement théoriques. Nous ne cesserons pas de tâcher, dans nos Publications, de seconder dans leur travail les chercheurs non-mathématiciens ayant à s'occuper des mathématiques, en les aidant à se familiariser avec les mathématiques. Pour poursuivre ce but, nous publierons dans la suite de nombreux ouvrages de caractère référatif, de bibliographies et des tableaux de fonctions, etc.

Pour nous permettre de pouvoir remplir la tâche que les Publications nous donnent, dès maintenant dans une plus grande mesure qu'auparavant, nous ne pouvons que prier nos lecteurs, de nous aider dans notre travail, par leurs conseils, leurs critiques et leurs suggestions.

Budapest, le 2 août 1955

Alfréd Rényi

Directeur de l'Institut de
Mathématique de l'Académie
des Sciences de Hongrie

A MATRIX-ELMÉLET ALKALMAZÁSA LÁNCHIDAK SZÁMÍTÁSÁRA

EGERVÁRY JENŐ

Bevezetés

A függőhidak *Melan* és *Timoshenko* által megalapozott és mások által továbbfejlesztett eddigi elmélete¹⁾ a következő idealizált szerkezeten, »model-len« alapul: Egy hajlékony kötél és egy rugalmas gerenda végtelen sok vertikális függesztő rúd által vannak összekötve egymással, és meghatározandók valamely tetszőleges vertikális terhelés hatása folytán a szerkezetben létrejövő alakváltozások és feszültségek. Ezen modell matematikai tárgyalása egy lineáris, állandó együtthatós, negyedrendű inhomogén differenciálegyenletre vezet, mely megoldható a Green-függvény alkalmazásával vagy Fourier-kifejtéssel.

Ez a módszer, noha nyilván nem adhatja meg a függesztő rudak feszültségét, mégis a legalkalmasabbnak látszik az olyan hidak matematikai vizsgálatára, melyek *hajlékony kötélre* vannak felfüggesztve. Ha azonban a híd *láncra* van felfüggesztve, akkor a hajlékony kötélnek és végtelen sok függesztő rúdnak a fölvétele egyáltalán nem kielégítő megközelítése a valóságnak, és így természetszerűen felvetődik a kérdés, vajon lehet-e az egész módszert oly módon finitizálni (végszerűsíteni), hogy differenciálegyenlet helyett csupán egy lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása legyen szükséges.

Nyilvánvalóan az elméletnek ilyen egyszerűsítése csak akkor lesz lehetséges, ha az élő tehernek egy folytonos eloszlásfüggvénnyel való megadását mellőzzük és a függesztő rudak alsó végpontjaiban támadó koncentrált terhelő erők alkalmazására szorítkozunk. Gyakorlatilag ez a közelítés annál inkább megengedhető, mert tudvalevőleg az élő teher pontos eloszlása sohasem ismeretes, elméletileg pedig a »*de Saint Venant-féle elv*« garantálja, hogy a folytonos tehereloszlásnak a statikailag ekvivalens koncentrált terhekkel való helyettesítése a szerkezet alakváltozását kevésbé befolyásolja.

Amennyiben a folytonosan megoszló élő terhet ily módon sztatikailag ekvivalens koncentrált erőkkel helyettesítjük, és a *Clapeyron-féle* egyenleteket általánosított formájukban alkalmazzuk, valóban lehetővé fog válni láncra függesztett hidak számára egy finitizált módszert megalkotni.

Ez a finitizált módszer az egész problémát egy inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására redukálja, vagy ami ugyanazt jelenti, egy matrix invertálására, reciprokának a meghatározására. Ennek a matrixnak a rendszáma azonban egyenlő a függesztő rudak számával és innen

¹⁾ Lásd: [1]—[5]

következtethető, hogy pld. egy 50 függesztő rudat tartalmazó híd esetében a megoldás az inverz matrix közvetlen kiszámításával rendkívül fáradságos és hosszadalmas lenne. Szerencsére az invertálandó matrixról ki fog derülni, hogy az racionális függvénye a

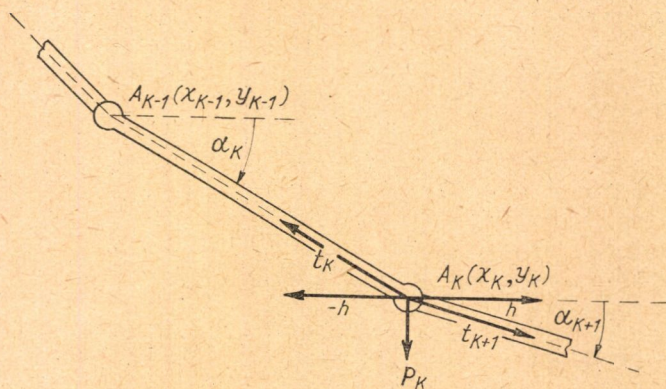
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

kontinuáns matrixnak, melynek kanonikus alakja (spektrális felbontása) ismeretes. Ennek a kanonikus alaknak a felhasználásával és a matrix-elmélet néhány ismert tételének az alkalmazásával automatikusan el fogunk jutni a fentemlített lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásának Fourier-kifejtéséhez.

A megoldás ezen alakjának alkalmazása mellett a hídszerkezet alakváltozásai és feszültségei számológép segítségével aránylag könnyen kiszámíthatóknak fognak bizonyulni.

1. §. Egy lánc alakváltozása a csuklóiban ható vertikális erők következtében

Tekintsük a függélyes síkban elhelyezkedő $A_0 A_1 \dots A_n$ láncot, mely az $A_k A_{k+1}$ merev rudakból áll. Jelöljük az $A_k A_{k+1}$ rúd és az Ox tengely közti szöget α_{k+1} -gyel és működjön az A_k csuklóban p_k vertikális erő. Jelöljük továbbá $A_k A_{k+1}$ rúdban beálló húzó feszültséget t_{k+1} -gyel (lásd : 1. ábra).



1. ábra

Ekkor az A_k csuklóra nézve az egyensúly feltételei a következők :

$$(1) \quad t_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - t_k \sin \alpha_k + p_k = 0$$

$$(2) \quad t_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - t_k \cos \alpha_k = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Innen

$$(3) \quad t_k \cos \alpha_k = h = \text{const.} \quad t_k = \frac{h}{\cos \alpha_k},$$

és ezt (1)-be helyettesítve adódik

$$(4) \quad h (\text{tg } \alpha_{k+1} - \text{tg } \alpha_k) + p_k = 0,$$

vagy

$$(5) \quad \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = -\frac{p_k}{h},$$

ahol x_k és y_k az A_k csukló koordinátáit jelentik.

Tegyük fel most, hogy

$$x_{k+1} - x_k = l = \text{const } (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ekkor a fenti egyenletekből következik :

$$(6) \quad \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{l} = \frac{p_k}{h}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az egyensúlyi helyzetben a p_k vertikális erők ekvidisztánsak, akkor ezek az erők arányosak a csuklóordináták második differenciáival.

Tegyük fel, hogy a láncnak A_0 és A_n végpontjai az Ox -tengelyen vannak. Ekkor $y_0 = y_n = 0$ és a (6) egyenletek most az alábbi alakot öltik :

$$(7) \quad \begin{cases} 2y_1 - y_2 & = l \frac{p_1}{h} \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 & = l \frac{p_2}{h} \\ \dots\dots\dots & \\ -y_{n-2} + 2y_{n-1} & = l \frac{p_{n-1}}{h}. \end{cases}$$

Ha a

$$(8) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrixokat bevezetjük, akkor a fenti egyenletek a következő matrix-egyenletbe foglalhatók össze :

$$(9) \quad \mathbf{C} \mathbf{y} = \frac{l}{h} \mathbf{p}.$$

A C matrix nem-szinguláris, ennél fogva (9)-ből következik :

$$(10) \quad y = \frac{l}{h} C^{-1} p.$$

Ez az egyenlet a csuklók y_k ordinátáit megadja mint a p_k vertikális erők explicit függvényeit.

Abban a speciális esetben, midőn az összes p_k erők egymással egyenlők, és közös értékük p , a csuklók az

$$(11) \quad y = \frac{p}{h} \frac{x(nl - x)}{2l}; \quad \left(y_k = \frac{p}{h} \frac{k(n - k)}{2} l \right)$$

parabolán fekszenek.

Ebben az esetben a p teher, a h horizontális feszültség és az első láncszem iránytényezője a következő egyenlet által vannak összekapcsolva :

$$h = \frac{n-1}{2} \frac{l}{y_1} p,$$

és a lánc legmélyebb pontjának az ordinátája :

$$y_{\max} = \frac{p}{h} \frac{n^2}{8} l, \quad \text{ha } n \text{ páros}$$

$$y_{\max} = \frac{p}{h} \frac{n^2 - 1}{8} l, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.}$$

2. §. Egy gerenda alakváltozása a rá ható koncentrált transzverzális erők következtében

Tekintsünk egy homogén prizmatikus gerendát, mely az $(x_0, 0)$, $(x_n, 0)$ végpontjain alá van támasztva és az $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$, ..., $(x_{n-1}, 0)$ pontokban a $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}$ vertikális erők által van terelve. Ezen erők hatása alatt azok támadáspontjai η_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) transzverzális elmozdulást szenvednek és az (x_k, η_k) egyensúlyi helyzetekbe jutnak.

Feladatunk meghatározni azt a kapcsolatot, mely a q_k alkalmazott erők és a támadáspontoknak η_k transzverzális elmozdulásai közt fennáll.

Erre a célra fel fogjuk használni a rugalmasságtannak az alábbi jólismert tételeit.

a) Ha a gerenda $(x_k, 0)$ pontjai a q_k transzverzális erőkkel vannak terelve, akkor a támadáspontokban fellépő μ_k hajlító feszültségek a következő egyenletek által vannak meghatározva :²⁾

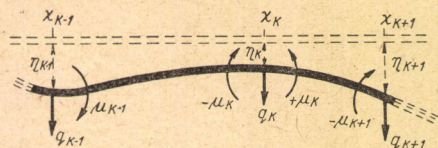
$$(12) \quad \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = -q_k.$$

²⁾ Lásd például : [6], I. p. 680

b) Ha a gerenda $(x_k, 0)$ pontjainak η_k transzverzális elmozdulásai adva vannak, akkor az x_k keresztmetszetekben fellépő μ_k hajlító feszültségek a következő egyenletekkel vannak meghatározva:³⁾

$$(13) \quad -\frac{1}{6EJ} \{ (x_{k+1} - x_k) \mu_{k+1} + 2(x_{k+1} - x_{k-1}) \mu_k + (x_k - x_{k-1}) \mu_{k-1} \} = \\ = \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ha ezen (12)–(13) egyenletekből a μ_k hajlító feszültségeket elimináljuk, akkor megkapjuk a q_k erők és a η_k elmozdulások közt a keresett összefüggést. Ez az elimináció legcélszerűbben a matrix-technika segítségével hajtható végre. Továbbá az egyenletes lánchidak elméletében ezen egyenletek-



2. ábra

nek csupán arra a különösen egyszerű alakjára van szükségünk, mely a gerenda ekvidisztáns felosztásának felel meg. Ez esetben

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = l$$

és a (12)–(13) egyenletek most a $\mu_0 = \mu_n = 0$ és $\eta_0 = \eta_n = 0$ kerületi feltételek figyelembe vételével a következő alakot öltik:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_1 - \mu_2 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 \\ \dots \\ -\mu_{n-2} + 2\mu_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} = lq_1 \\ = lq_2 \\ \dots \\ = lq_{n-1} \end{array}$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\eta_1 - \eta_2 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 \\ \dots \\ -\eta_{n-2} + 2\eta_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} = \frac{l^2}{6EJ} (4\mu_1 + \mu_2) \\ = \frac{l^2}{6EJ} (\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3) \\ \dots \\ = \frac{l^2}{6EJ} (\mu_{n-2} + 4\mu_{n-1}) \end{array}$$

³⁾ Lásd például: [6], I. p. 680

Ha bevezetjük a (8) matrixokon kívül a

$$(16) \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrixokat is, akkor a (14)–(15) egyenletek a következő matrix-egyenletbe foglalhatók össze:

$$(17) \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\mu} = l \mathbf{q}$$

$$(18) \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{l^2}{EJ} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

A \mathbf{C} és \mathbf{K} matrixok nem-szingulárisak, tehát $\boldsymbol{\mu}$ -nek az eliminációja közvetlenül elvégezhető és a következő egyenletekre vezet:

$$(19) \mathbf{q} = \frac{EJ}{l^3} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}$$

$$(20) \boldsymbol{\eta} = \frac{l^3}{EJ} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}$$

Ezen egyenletek megadják az explicit összefüggést a q_k transzverzális erők és a η_k transzverzális elmozdulások között.

3. §. A lánchíd egyensúlyi egyenlete és annak matrix-megoldása

Mint már fentebb említettük, a hídszerkezetet egy lánc és egy gerenda (merevítő tartó) kombinációjának tekintjük (3. ábra). Ennek a kombinációnak az a sajátossága, hogy ámbár a gerenda deformációját (a rugalmasságtanban szokásos értelmezéssel) kicsinynek tekintjük, a lánc alakváltozása (tudniillik annak az egyenestől való eltérése) véges nagyságrendű. Ha azonban feltételezzük — amint az általában szokásos a függőhidak elméletében —, hogy a lánc hordozza a saját súlyát, a függesztőrudak súlyát és a gerenda holsúlyát (önsúly) oly módon, hogy eközben a gerenda egyenes marad,⁴⁾ akkor a láncnak és a gerendának az élősúly hatására bekövetkező addicionális alakváltozásai kis mennyiségek, tehát *lineáris* egyenletek segítségével kiszámíthatók.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

a) Legyen a láncszemek száma n (csuklók száma: $n - 1$), a szomszédos függesztőrudak távolsága l .

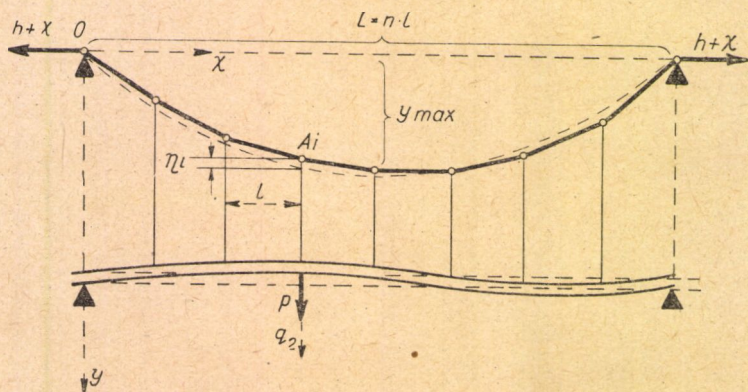
⁴⁾ Illetve pontosabban: feltesszük, hogy a B_0, B_1, \dots, B_n pontok egy egyenesben fekszenek.

b) A szerkezet (lánc, függesztőrúdak, gerenda) holt súlya minden egyes függesztőrúdra legyen egyenlő p -vel; az i -edik függesztőrúd alsó végpontjára ható élő teher (hasznos teher) legyen q_i .

c) A holt súly hatása alatt bekövetkező láncfeszültség horizontális komponensét jelöljük h -val; az élőteher hatására bekövetkező feszültség-növekedés: χ . A láncnak a kezdeti holt teher hatása alatt felvett egyensúlyi alakját a csuklók

$$x_k = kl, \quad y_k = \frac{p}{h} \frac{k(n-k)}{2} l \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

koordinátái határozzák meg (az y ordinátát a lánc végpontjait összekötő vízszintestől számítva lefelé pozitívnak minősítjük). A láncsuklóknak az élőteher hatása folytán bekövetkező vertikális elmozdulásait η_k -val jelöljük.



3. ábra

Feltesszük továbbá, hogy a függesztőrúdaknak a rugalmas alakváltozása elhanyagolható, ennél fogva a gerenda x_k pontjának vertikális elmozdulása ugyanakkora, mint a k -adik csukló elmozdulása. Ez utóbbi feltevés a függesztőrúdak merevségén kívül, azt is implicálja, hogy a csuklók horizontális elmozdulásait figyelmen kívül hagyjuk.

d) A gerenda keresztmetszetének inercianyomatékát konstansnak tételezzük fel és J -vel jelöljük; a Young-féle modulust E -vel. Legyenek az n láncszemből álló láncnak végpontjai $(0, 0)$ és $(nl, 0)$; továbbá a gerenda végpontjai (alátámasztási pontjai) $(0, m)$ és (nl, m) .

A láncnak a kezdeti terhelés hatására felvett egyensúlyi alakját meg-egyezésben (6)-tal, a

$$(21) \quad \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{l} = \frac{p}{h} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

difference-egyenletek és az

$$(22) \quad y_0 = 0, \quad y_n = 0$$

kerületi feltételek határozzák meg.

A (21) differencia-egyenletek és a (22) kerületi feltételek összefoglalhatóak egyetlen matrix-egyenletté:

$$(23) \quad \mathbf{C} \frac{\mathbf{y}}{l} = \frac{p}{h} \mathbf{e},$$

ahol \mathbf{C} és \mathbf{y} az 1. §-ban bevezetett (8) matrixokat jelentik és \mathbf{e} egy oszlop-matrixot jelent, melynek összes elemei 1-gyel egyenlők.

Há most a kezdeti terheléshez a q_1, q_2, \dots, q_{n-1} élőterhek hozzájárulnak, akkor ezen élőtehernek bizonyos, egyelőre ismeretlen \tilde{q}_i részeit a lánc fogja hordozni, a fennmaradó $q_i - \tilde{q}_i$ terheket pedig a gerenda hajlítószilárdsága.

Az élőteher hatása folytán továbbá a horizontális lánc feszültség $h + \chi$ értékre fog növekedni és az y_k ordinátákhoz η_k elmozdulások fognak hozzáadódni. Eszerint az élőteher hatásának figyelembe vételével a lánc egyensúlyi feltételét a következő egyenlet fogja kifejezni:

$$(24) \quad \mathbf{C} \frac{\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{p \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}}{h + \chi}.$$

Másrészt a gerenda egyensúlyi egyenlete matrix alakban, megegyezésben (19)-cel, a következő lesz:

$$(25) \quad \frac{EJ}{l^3} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}};$$

vagy dimenziótlan alakban:

$$(26) \quad \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}.$$

Három ismeretlen mennyiség fordul elő a (24) és (26) egyenletekben, tudniillik az $\boldsymbol{\eta}$ és \mathbf{q} vektorok, továbbá a χ skalár paraméter.

Tegyük fel egyelőre, hogy χ ismeretes. Ekkor, $\tilde{\mathbf{q}}$ értékét a (24) egyenletből a (26) egyenletbe helyettesítve, adódik:

$$(27) \quad \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} + \left(\frac{h + \chi}{h} \right) \mathbf{C} \frac{\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{\mathbf{q} + p \mathbf{e}}{h}$$

A (23) egyenlet figyelembevételével ez a következő alakra redukálódik:

$$(28) \quad \left\{ \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left(1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi}{h} \frac{p}{h} \mathbf{e}.$$

Ily módon eljutottunk a *lánchidak elméletének alapegyenletéhez*. Ebből az alapegyenletből mindenekelőtt kiolvasható, hogy az $\frac{EJ}{l^2 h}$ és $\frac{p}{h}$ dimenziót-

lan mennyiségek a terheletlen hídnak karakterisztikus paraméterei.⁵⁾

Minthogy továbbá a (28) egyenlet baloldalán a $\{\dots\}$ zárójelben szereplő matrix nem-szinguláris (lásd: erre nézve a 4. §-t), tehát az alapegyenlet közvetlenül megoldható a következő alakban:

$$(29) \quad \eta = l \left\{ \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left(1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\}^{-1} \left(\frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right).$$

Ez az egyenlet megadja a csuklóknak, valamint a gerenda-osztáspontoknak vertikális elmozdulásait, feltéve, hogy a χ lánCFeszültség-növekedés már ismeretes.

Felhasználva az η_k elmozdulásoknak ezen értékeit, a gerenda x_k keresztmetszeteiben működő μ_k hajlító feszültségek kiszámíthatók a (15) egyenlet segítségével a következő alakban:

$$(30) \quad \mu = \frac{EJ}{l^2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \eta = h l \left\{ \mathbf{C} + \left(1 + \frac{\chi}{h} \right) \frac{h l^2}{EJ} \mathbf{K} \right\}^{-1} \left(\frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right).$$

A (29) és (30) egyenletek megadják a lehajlások és a hajlító-feszültségek exakt és explicit értékeit tetszőleges élőtehereloszlás mellett. Azonban, mint már a bevezetésben hangsúlyoztuk, a (29) egyenletben előforduló

$$(31) \quad \mathbf{R} = \left\{ \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left(1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\}^{-1}$$

inverz matrixnak az effektív kiszámítása nagyszámú függesztőrúd esetén annyira hosszadalmas, hogy a nyert megoldást a (29) alakban nem lehet gyakorlati számításra alkalmasnak minősíteni.

Avégből tehát, hogy eredményeinket gyakorlatilag használható alakra hozzuk, transzformálni fogjuk a (29) és (30) egyenletekben fellépő matrixokat kanonikus alakjukra.

Azon szerencsés körülmény folytán, hogy a \mathbf{K} matrix a \mathbf{C} kontinuáns matrixnak lineáris függvénye, ki fog derülni, hogy a (31) »rezolvens«

⁵⁾ Néhány függőhíd jellemző paraméterei: (lásd [5], p. 220):

	p	$L = nl$	f	f/L	EJ	h	hL^2/EJ
Híd megnevezése...	kg/cm	cm	cm		kg · cm ²	kg	
Breslau 1910	108	12 000	1200	0,1	$0,546 \cdot 10^{12}$	$1,62 \cdot 10^6$	1,034
Manhattan.....	85	44 800	4360	0,097	$0,819 \cdot 10^{12}$	$4,88 \cdot 10^6$	1,728
II. Tacoma-híd,							
1945	126	85 500	8550	0,1	$1,131 \cdot 10^{12}$	$13,45 \cdot 10^6$	4,53
Zweden 1941	13,6	14 000	1680	0,12	$0,196 \cdot 10^{12}$	$0,198 \cdot 10^6$	7,04
I. Tacoma-híd,							
1940	84	85 300	7100	0,084	$2,49 \cdot 10^9$	$10,78 \cdot 10^6$	2810

matrixnak kanonikus előállítása aránylag egyszerű számításokat tesz szükségessé, és a megoldást automatikusan Fourier-kifejtés alakjában szolgáltatja.

4. §. A horizontális láncfeszültség növekedésének kiszámítása

Két esettel foglalkozunk. Először a láncot nyújthatatlannak tételezzük fel, másodszor figyelembe vesszük a lánc rugalmas és termikus nyúlását is; ez utóbbi esetben jelöljük a rugalmassági moduluszt E -vel és a hőtágulási együtthatót β -val.

A k -adik láncszemnek l_k hosszúsága a kezdeti állapotban a következő egyenlettel van megadva:

$$(32) \quad l_k^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2,$$

a (ξ_k, η_k) elmozdulások után pedig a láncszem Δl_k megnyúlását a következő egyenletből nyerjük:

$$(33) \quad (l_k + \Delta l_k)^2 = (x_k + \xi_k - x_{k-1} - \xi_{k-1})^2 + (y_k + \eta_k - y_{k-1} - \eta_{k-1})^2.$$

Innen, a kis mennyiségeknek négyzeteit és szorzatait elhanyagolva nyerjük:

$$(34) \quad l_k \Delta l_k = (x_k - x_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}).$$

Nyújthatatlan lánc esetében $\Delta l_k = 0$.

Ha $x_k - x_{k-1}$ helyébe két szomszédos függesztőrúdnak közös l távolságát behelyettesítjük és ezután a (34) egyenleteket összegezzük, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n l_k \Delta l_k = l \sum_{k=1}^n (\xi_k - \xi_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = 0.$$

A lánc végpontjai rögzítve vannak: $\xi_0 = \xi_n = 0$ és $\eta_0 = \eta_n = 0$ eszerint $\sum_{k=1}^n (\xi_k - \xi_{k-1}) = 0$, következésképpen.

$$(35) \quad \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) \eta_k = 0.$$

De a kezdeti terhelési állapotban a (11) egyenlet szerint

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{l}{h} p \neq 0,$$

eszerint nyújthatatlan lánc esetében az η_k vertikális elmozdulások algebrai összegének el kell tűnnie, vagyis

$$\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = 0;$$

vagy matrix alakban

$$(36) \quad \mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Helyettesítsük most ebbe az egyenletbe $\boldsymbol{\eta}$ -nak (29) szerinti értékét. Azt nyerjük, hogy

$$(37) \quad \mathbf{e}^* \mathbf{R} \left(\frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right) = 0.$$

A χ láncfeszültség-növekedés ebben az egyenletben látszólag csupán lineárisan fordul elő és ilyenképpen χ kifejezhető belőle a következő alakban :

$$(38) \quad \chi = \frac{h}{p} \frac{\mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{q}}{\mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{e}}.$$

A valóságban azonban ez egy magas fokszámú algebrai egyenlet χ -re nézve, mert χ az \mathbf{R} -ben is előfordul. Avégből, hogy egy első közelítést kapassunk, \mathbf{R} -ben $1 + \frac{\chi}{h} \approx 1$ -et helyettesítünk, elhanyagolván ily módon χ -t h -hoz viszonyítva. Ezután χ -t kiszámítjuk az ily módon egyszerűsített (38) egyenletből, és amennyiben szükséges, korrigáljuk \mathbf{R} -nek az értékét és megismételjük a számítást.

Ha a lánc nyújtható, akkor a k -adik láncszemben a χ horizontális feszültség-növekedés és a ϑ hőmérséklet-növekedés folytán bekövetkező relatív nyúlást az alábbi egyenlet adja meg :

$$(39) \quad \frac{\Delta l_k}{l_k} = \frac{\chi}{EQ} \frac{l_k}{l} + \beta \vartheta.$$

Itt Q a lánc-keresztmetszet területét jelenti és $\chi \frac{l_k}{l}$ a k -adik láncszem totális feszültség-növekedése. Ha ezt a (34) egyenletbe helyettesítjük, kapjuk :

$$\frac{\chi}{EQ} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{l_k}{l} \right)^3 + \beta \vartheta \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{l_k}{l} \right)^2 = \frac{p}{hl} \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = \frac{p}{hl} \mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta}.$$

Felhasználva $\boldsymbol{\eta}$ -nak (29) alatti értékét, ismét kapunk egy egyenletet, melyből χ a fenti módon közelítőleg kiszámítható.

5. §. A megoldás Fourier-kifejtése

A (29)-ben szereplő **R** rezolvens matrix a **C** és **K** matrixoknak racionális függvénye. Minthogy $\mathbf{K} = \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}$, ahol **E** egységmatrix, tehát **R** racionális függvénye a **C** kontinuáns matrixnak:

$$\mathbf{R} = \varphi(\mathbf{C}); \quad \varphi(x) = \frac{1 - \frac{x}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} x^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) x \left(1 - \frac{x}{6}\right)}.$$

Másrészt, mint ismeretes, a **C** matrix kanonikus alakja a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) \frac{2}{n} \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \cdot \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Ismeretes továbbá, hogy a **C** matrixnak bármely $\varphi(\mathbf{C})$ racionális függvénye a következő kanonikus alakkal bír:

$$\varphi(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\lambda_k) \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*.$$

Ezen tételek felhasználásával az **R** rezolvens matrix számára közvetlenül az alábbi kanonikus alakot nyerjük:

$$\begin{aligned} (40) \quad \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}}{\frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{C}^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \mathbf{C} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}\right)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*, \end{aligned}$$

és ezt felhasználva (29)-ből adódik :

$$(41) \quad \eta = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \left(\frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right).$$

Ez a formula nyilván csak akkor válik alkalmazhatóvá, ha előbb a χ feszültség-növekedés közelítő értékét a nyújthatatlan lánc esetén érvényes

$$(42) \quad \mathbf{e}^* \eta = \frac{p}{h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_k) (\mathbf{e}^* \mathbf{u}_k) \left(\frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{p} - \frac{\chi}{h} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right) = 0$$

egyenletből kiszámítottuk, ahol $\varphi_0(\lambda)$ jelenti $\varphi(\lambda)$ -nak az értékét $\chi = 0$ helyettesítés után.

Figyelembevételre, hogy

$$\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k} = 0, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \left(\frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{n} \right),$$

az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$(43) \quad \chi = \frac{h}{p} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_{2k+1}) (\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{q}) (\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{e}) \right\} / \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_{2k+1}) (\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1})^2 \right\}.$$

Ha χ -nek ezt az értékét a (41) egyenletbe helyettesítjük, akkor onnan az η_k vertikális elmozdulások kiszámíthatók, továbbá a (30) egyenlet felhasználásával a μ_k hajlítófeszültségek is kiszámíthatókká válnak.

6. §. A numerikus számítás elrendezése

Mindenekelőtt kiszámítjuk a következő mennyiségeket :

$$1^\circ \quad \frac{EJ}{hl^2} \quad (\text{A híd merevségi paramétere})$$

$$\frac{p}{h} \quad (\text{A híd mértani vagy alaki paramétere})$$

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A C matrix sajátértékei.})$$

$$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right] \quad (\text{A C matrix sajátvektorai.})$$

2° Az egyenletes terhelés Fourier-együtthatói :

$$e^* u_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{v=1}^{n-1} \sin \frac{vk\pi}{n} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros szám,} \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n}, & \text{ha } k \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

3° A tetszőlegesen előírt $q^* = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ élőteher Fourier-együtthatói :

$$q^* u_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \sin \frac{vk\pi}{n}.$$

4° A $\varphi_0(\lambda)$ függvény értékei a $\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$ helyen :

$$\varphi_0(\lambda_k) = \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)}.$$

A χ horizontális feszültségváltozás közelítő értéke ezek felhasználásával a (43) egyenletből kiszámítható. Az így kapott χ értéket $\varphi(\lambda)$ -ba behelyettesítve a $\varphi(\lambda_k)$ értékek is kiszámíthatók. Végül kiszámíthatók a következő szorzatok :

$$l \varphi(\lambda_k) \left(\frac{u_k^* q}{h} - \frac{p \chi}{n^2} u_k^* e \right); \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

és az így nyert számok már az $\eta^* = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}]$ lehajlási matrix Fourier-koefficiensei. Hasonlóképpen vezethetők le a megfelelő formulák a ν_k hajlító feszültségek számára.

IRODALOM

- [1] J. MELAN : *Eisenbrückenbau*. Deuticke, Wien, 1925.
- [2] S. TIMOSHENKO : »Steifigkeit von Hängebrücken.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928) 1
- [3] TH. VON KÁRMÁN—M. A. BIOT: *Mathematical methods in engineering*. McGraw-Hill, London, 1940 (p. 277).
- [4] K. KÖPPEL—K. H. KIE: »Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken.« *Ingenieur-Archiv* 13 (1942—43) 211.
- [5] A. D. DE PATER: »Some new points of view in calculating suspension bridges.« *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering* 11 (1951) 41
- [6] »HÜTTE« *Des Ingenieurs Taschenbuch*. Ernst & Sohn, Berlin, 1949.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЦЕПНЫХ МОСТОВ

Е. Эгервари

Резюме

В противоположность известной до сих пор теории подвесных мостов, требующей решения дифференциального уравнения, приведенный автором способ для расчета цепных мостов носит конечный характер. Цепной мост рассматривается как система с конечным числом степеней свободы, на которую подвижная нагрузка действует на нижних концах подвесных стержней. При учете такой нагрузки деформация подкоса определяется в технической механике т. н. уравнениями Клапейрона. Исходя из этих уравнений и из уравнений равновесия цепи, автор выводит систему линейных уравнений в матричной форме, непосредственно определяющую при данной нагрузке деформацию подкоса, а одновременно также и напряжения изгиба. Решение этой системы уравнений, то есть инверсия соответствующей матрицы, осуществляется автором при помощи канонического разложения матрицы в таком удобном для числовых вычислений виде, который по существу является гармоническим анализом решения.

Кроме инверсии упомянутой матрицы, весьма важным для решения проблемы является вычисление приращения натяжения цепи под действием нагрузки. Для решения этого уравнения автор использует метод последовательных приближений, соответствующий графическому способу, при котором корни уравнения второй степени представляются в виде точек пересечения гиперболы с прямой.

ON THE APPLICATION OF THE MATRIX THEORY TO THE CALCULATION OF CHAIN BRIDGES⁶⁾

E. EGERVÁRY

Summary

In place to the known theory of suspension bridges in which differential equations are used, the author presents a method of finite computation. The chain bridge is considered as a system possessing a finite number of degrees of freedom, where live loads are applied at the lower end points of the suspension rods. With the live loads considered in this manner, the deformation of the stiffening members is determined by the so-called Clapeyron equations of applied mechanics. Using these equations, and the equations of equilibrium of the chain, the author develops a system of linear equations written in matrix form, which, for a given load, determines directly the deformation of the stiffening girder as well as its bending stresses. The solution of this system of equations, i. e. the inversion of its matrix is performed by means of the canonical reduction of the matrix in such a form — suitable also for numerical calculations — which in principle may be considered as being the harmonic analysis of the solution.

Besides the inversion of the matrix, the key to the problem is the calculation of the increase of chain stress due to the action of live load. The author indicates a method of solving this equation by successive approximations, which corresponds to that graphical method where the roots of a second degree equation are found by the points of intersection of a hyperbola and a straight line.

⁶⁾ See the complete text in English: *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 11 (1955) 241—256.

MEGJEGYZÉSEK EGERVÁRY JENŐ »A MATRIX-ELMÉLET ALKALMAZÁSA LÁNCHIDAK SZÁMÍTÁSÁRA« C. DOLGOZATÁHOZ¹⁾

TASNÁDY ISTVÁN²⁾

A szóbanforgó dolgozat szerzője a következő, a lánchíd-számításoknál alapvető jelentőségű képletet állapítja meg :

$$(1) \quad \eta = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{E J}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} u_k \left(\frac{u_k^* q}{h} - \frac{\chi p}{h^2} u_k^* e \right)$$

(Lásd az említett dolgozat (41) képletét. A jelölések értelmezése ugyanott található meg.)

Bevezetve az

$$\frac{E J}{l^2 h} = a, \quad \frac{\chi}{h} = b$$

jelöléseket, ahol b a lánCFeszültség horizontális komponensének relatív megváltozását jelenti, a képlet némi átalakítással a következő, áttekinthetőbb alakban is felírható :

$$\eta = \frac{l}{h} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k^* q - b p u_k^* e}{\lambda_k \left[\left(a \frac{6 \lambda_k}{6 - \lambda_k} + 1 \right) + b \right]} u_k.$$

Az alábbi sorok célja annak megmutatása, hogy az élőteher eloszlására jellemző q vektor speciális, de a gyakorlati szempontból fontos megválasztása esetén miként alakul η képlete. Tekintettel arra, hogy a gyakorlati

számításoknál oly jelentős $b = \frac{\chi}{h}$ érték kiszámítása — nyújthatatlannak

feltételezett lánc esetén — az

$$e^* \eta = 0$$

¹⁾ Lásd az előző cikket (9. oldal).

²⁾ Építőipari Műszaki Egyetem, Budapest, Matematikai Tanszék

egyenletből történhetik (mert ebben az esetben az η_k vertikális elmozdulások algebrai összegének el kell tűnnie), a számítástechnika szempontjából lényeges η értékének alakulása. Meg fogjuk mutatni, hogy a jelzett speciális esetben a $b = \frac{\chi}{h}$ érték igen egyszerűen, egy lineáris egyenletből számítható ki;

ez a felismerés azért is hasznos, mert b így nyert értékétől a rugalmas (nyújtható) láncnak megfelelő érték nem nagyon különbözik: a nyújthatatlan láncra számított b érték a rugalmas láncra érvényes b érték jó közelítése.

Elsősorban megjegyzendő, hogy a

$$\sin \alpha + \sin 2 \alpha + \sin 3 \alpha + \dots + \sin m \alpha = \frac{\sin (m + 1) \frac{\alpha}{2} \cdot \sin m \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

összefüggés alapján

$$u_k^* e = e^* u_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin^2 k \frac{\pi}{2} \cdot \cotg \frac{k\pi}{2n},$$

azaz

$$\text{páratlan } k \text{ esetén} \quad u_k^* e = \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{páros } k \text{ esetén} \quad u_k^* e = 0.$$

I. Legyen n páros és q a következő alakú:

$$q = q \begin{bmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{\frac{n}{2}-1} = 2q$$

$$q_{\frac{n}{2}} = q$$

$$q_{\frac{n}{2}+1} = \dots = q_{n-1} = 0$$

Egyszerűen igazolható, hogy ebben az esetben

$$u_k^* q = 2q \sqrt{\frac{2}{n}} \sin^2 k \frac{\pi}{4} \cdot \cotg \frac{k\pi}{2n},$$

azaz

páratlan k esetén $u_k^* q = q \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n},$

páros és 4-gyel osztható k esetén $u_k^* q = 0,$

páros és 4-gyel nem osztható k esetén $u_k^* q = 2q \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n}.$

Ennek figyelembevételével, továbbá a k indexszám változásából eredő értékek áttekinthetőbb csoportosítása végett az l indexszámot bevezetve,

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{l}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\cotg \frac{(2l+1)\pi}{2n}}{\lambda_{2l+1} \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6-\lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]} u_{2l+1} + \\ & + \frac{2lq}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-3}{4} \right]} \frac{\cotg \frac{(2l+1)\pi}{n}}{\lambda_{4l+2} \left[\left(\frac{6\lambda_{4l+2}}{6-\lambda_{4l+2}} + 1 \right) + b \right]} u_{4l+2} \end{aligned}$$

ahol $\left[\frac{n-3}{4} \right]$ az $\frac{n-3}{4}$ -ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

η így módon történő felírásából, valamint a

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

definícióból rögtön következik, hogy

$$e^* \eta = \frac{2l}{nh} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6-\lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]}.$$

Mivel nyújthatatlannak feltételezett lánc esetén b kiszámítása az

$$e^* \eta = 0$$

egyenletből történhetik, azonnal kitűnik, hogy ekkor

$$b = \frac{\chi}{h} = \frac{q}{p},$$

azaz a teljes élőteher és holtteher hányadosa.

Meg kell itt még jegyezni, hogy az $\mathbf{e}^*\boldsymbol{\eta} = 0$ egyenlet egyetlen pozitív (azaz: a technikai értelmezés szempontjából szóbajöhető) gyöke a $b = \frac{q}{p}$ érték. Ez közvetlenül belátható abból, hogy az $\mathbf{e}^*\boldsymbol{\eta}$ kifejtésében szereplő

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]}$$

tényező minden $b \geq 0$ értékre pozitív, mert

$$a > 0, \quad 0 < \lambda_{2l+1} \leq \lambda_{n-1} = 4 \sin^2 \frac{n-1}{n} \frac{\pi}{2} < 4.$$

II. Legyen n páratlan és \mathbf{q} a következő alakú:

$$\mathbf{q} = q \begin{bmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{\frac{n-1}{2}} = 2q,$$

$$q_{\frac{n+1}{2}} = \dots = q_{n-1} = 0.$$

Egyszerű számítás szerint ebben az esetben

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = q \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\cotg \frac{k\pi}{2n} - \frac{\cos k \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{k\pi}{2n}} \right),$$

ami azt jelenti, hogy

$$\text{páratlan } k \text{ esetén } \mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = q \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{páros } k \text{ esetén } \mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = (-1)^{\frac{k-2}{2}} q \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ \cotg \frac{k\pi}{4n} \right\}^{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Ennek figyelembevételével és k helyett az $l = \frac{k}{2}$ indexszámot bevezetve

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{l}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{\cotg \frac{(2l+1)\pi}{2n}}{\lambda_{2l+1} \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{2l+1} + \\ & + \frac{l \cdot g}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{l-1} \cdot \left[\cotg \frac{l\pi}{2n} \right]^{(-1)^{l-1}}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l}}{6 - \lambda_{2l}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{2l}. \end{aligned}$$

Ebben az esetben is

$$\mathbf{e}^* \eta = \frac{2l}{hn} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]},$$

amiből ugyanúgy, mint I. alatt

$$b = \frac{\chi}{h} = \frac{q}{p},$$

azaz a teljes élőteher és holtteher hányadosa és $b = \frac{q}{p}$ most is az egyetlen pozitív gyök.

Említésreméltó még, hogy a számítások gyakorlati végrehajtása szempontjából hasznos a

$$\lambda_k + \lambda_{n-k} = 4$$

összefüggés.

ПРИМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ Е. ЭГЕРВАРИ
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЦЕПНЫХ МОСТОВ*)

И. Ташнадъи

Резюме

Е. Эгervари в упомянутой работе дает формулу для вектора η , выражающую горизонтальные смещения кулачков цепи. Этой формуле можно дать особенно удобный вид для практических вычислений, при некотором специальном, но важном с практической точки зрения выборе вектора q , задающего распределение живой нагрузки.

В данном случае можно также доказать, что значение величины $\frac{\chi}{h}$ — в случае нерастяжимой цепи — равно частному живого и мертвого грузов.

BEMERKUNGEN ZUR ABHANDLUNG VON J. EGERVÁRY
ÜBER DIE ANWENDUNG DES MATRIZENKALKÜLS
BEI DER KONSTRUKTION VON KETTENBRÜCKEN**)

I. TASNÁDY

Zusammenfassung

J. Egerváry gab die Formel (1) für den Vektor η , welcher die horizontalen Bewegungen der einzelnen Kettengelenke ausdrückt. Diese Formel lässt sich in einer für die praktischen Rechnungen sehr geeigneten Gestalt schreiben, falls der — die Verteilung der lebenden Last darstellende — Vektor q in einer spezieller, aber in der Praxis wichtigen Weise gewählt wird.

In diesem Falle lässt sich ferner nachweisen, dass die Grösse $\frac{\chi}{h}$, falls die Ketten undehnbar sind, dem Quotienten der lebenden und toten Last gleich ist.

*) См. предыдущую статью.

**) Siehe die vorangehende Arbeit.

PÁRONKÉNT FELCSERÉLHETŐ BLOKKOKBÓL ÁLLÓ HIPERMATRIXOKRÓL ÉS AZOK ALKALMAZÁSÁRÓL A RÁCSDINAMIKÁBAN

EGERVÁRY JENŐ

Jelölések

$A = [a_{ij}]$	a_{ij} skalárelemekből álló matrix
$[A_{ij}]$	A_{ij} blokkokból álló hipermatrix
A^*	A transzponáltja
a, a_i, \dots	oszlopvektorok
b^*, b^j	sorvektorok
$[a_i b^j]$	$a_i b^j$ blokkokból álló hipermatrix
$A \times B = [A b_{ij}]; [b_{ij}] = B$	
$\langle a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$..	diagonálmatrix
$ A = \det A$	A determinánsa
E_n	n -edrendű egységmatrix

Bevezetés

Ismeretes, hogy kvadratikus blokkokból álló hipermatrixokra és skalárelemekből álló közönséges matrixokra majdnem ugyanazok a műveleti szabályok érvényesek, az egyetlen különbséget az okozza, hogy a blokkok általában nem felcserélhetők. Ezért várható, hogy közönséges matrixokra vonatkozó fogalmak és számítási módszerek kiterjeszthetők páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokra.

A felcserélhetőség feltétele nyilvánvalóan magában foglalja, hogy a blokkok kommutatív gyűrűt alkotnak, következésképpen racionális skaláronozosságok érvényben maradnak, ha a skalár határozatlanokat blokkokkal helyettesítjük.

Ez a megállapítás azt sugallja, hogy a *determináns*, *minor*, *adjungált* fogalmak kiterjeszthetők páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokra, és hogy nm -edrendű matrixokra vonatkozó bizonyos racionális műveletek így módon visszavezethetők kizárólag n -edrendű és m -edrendű matrixokkal való műveletekre.

Felcserélhető blokkokból álló hipermatrix spektrál-felbontására vonatkozólag a következő tételek ismeretesek.

Az $A \times B$ direkt szorzat sajátértékeit az A és B matrix a_i illetve b_j sajátértékeiből alkotott — összesen nm számú — $a_i b_j$ alakú szorzat adja. Ez *Williamson* következő tételének¹⁾ speciális esete: Ha valamely hipermatrix valamennyi

¹⁾ Lásd: [1]

n^2 számú blokkja egy és ugyanazon \mathbf{A} matrix tetszőleges $f_{ij}(\mathbf{A})$ polinomja és ha \mathbf{A} matrix sajátértékei a_1, a_2, \dots, a_m , akkor az $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ hipermatrix sajátértékeit az

$$[f_{ij}(a_1)], [f_{ij}(a_2)], \dots, [f_{ij}(a_m)]$$

matrixok nm számú sajátértékei szolgáltatják.

Ezek a tételek azt sugallják, hogy az $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ hipermatrixnak nemcsak a sajátértékei, hanem a sajátvektorai is, tehát a teljes spektrál-felbontása bizonyos n -edrendű, illetve m -edrendű matrixok sajátvektoraiból, illetve spektrál-felbontásából elemi műveletekkel explicite felépíthető.

1. §. Tételek

Mindkét sejtés helyesnek bizonyul, s ezen dolgozat fő tárgyát az alábbi két tétel bizonyítása, tárgyalása és alkalmazása képezi.

A. tétel. Ha $[\mathbf{A}_{ij}]$ hipermatrix m -edrendű \mathbf{A}_{ij} blokkjai páronként felcserélhetők, akkor $[\mathbf{A}_{ij}]$ determinánsa, illetve adjungáltja a következő képletekkel adható meg:

$$(1) \quad \det [\mathbf{A}_{ij}] = \det (\det [\mathbf{A}_{ij}]),$$

$$(2) \quad \text{adj} [\mathbf{A}_{ij}] = \text{adj} [\mathbf{A}_{ij}] \cdot \{\text{adj} (\det [\mathbf{A}_{ij}]) \cdot \mathbf{E}_n\},$$

ahol

$$\det [\mathbf{A}_{ij}] = \sum_{(v)} \pm \mathbf{A}_{1v_1} \mathbf{A}_{2v_2} \dots \mathbf{A}_{nv_n},$$

és $\text{adj} [\mathbf{A}_{ij}]$ olyan hipermatrixot jelent, melynek blokkjai ugyanolyan módon függenek az \mathbf{A}_{ij} blokkoktól, mint ahogy $\text{adj} [a_{ij}]$ közönséges adjungált elemei függenek az a_{ij} skalár elemektől.

B. tétel. Ha \mathbf{A} szimmetrikus (hermitikus) m -edrendű matrix, melynek sajátértékei a_1, a_2, \dots, a_m és ha $f_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) a valós x változónak olyan — egyébként tetszőleges — polinomjai, melyeknek egyedül az $f_{ji}(x) = \overline{f_{ij}(x)}$ feltételt kell kielégíteniük, akkor az $\mathbf{A}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{A})$ blokkokból álló $[\mathbf{A}_{ij}]$ hipermatrix spektrálfelbontását

$$(3) \quad [\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{T} \langle \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn} \rangle \mathbf{T}^*, \quad \mathbf{T}^* \mathbf{T} = \mathbf{E}_{mn}$$

szolgáltatja, ahol a λ_{ij} sajátértékek és a

$$(4) \quad \mathbf{T} = \langle \overbrace{\mathbf{U}, \mathbf{U}, \dots, \mathbf{U}}^n \rangle \mathbf{P} \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n \rangle$$

transzformáló matrix tényezői az

$$(5) \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \langle a_1, \dots, a_m \rangle \mathbf{U}^*$$

$$[f_{ij}(a_k)] = \mathbf{V}_k \langle \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn} \rangle \mathbf{V}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

spektrál-felbontásból nyerhetők, \mathbf{P} pedig olyan permutáló matrix, mely az

$$(11) (12) \dots (1m) (21) (22) \dots (2m) \dots (n1) (n2) \dots (nm)$$

alakban rendezett számpárok sorozatát

$$(11) (21) \dots (n1) (12) (22) \dots (n2) \dots (1m) (2m) \dots (nm)$$

sorozatba transzformálja. Ekkor $[A_{ij}]$ sajátvektorait T oszlopai adják.

A B . tételnek szimmetrikus A és B matrixokból alkotott direkt szorzatára vonatkozó speciális esetét érdemes külön megfogalmazni:

I. Korollárium. $A \cdot \times B$ sajátértékei az A és B sajátértékeiből alkotott $a_i b_j$ szorzatok, $A \cdot \times B$ sajátvektorai pedig az A és B sajátvektoraiból alkotott $u_i \cdot \times v_j$ direkt szorzatok.²⁾

Stéphanos egyik tétele³⁾ szerint a $\sum_p \sum_q c_{pq} A^p \cdot \times B^q$ nm -edrendű hipermatrix nm sajátértékei a $\sum_p \sum_q a_i^p b_j^q$ számok, ahol a_i A sajátértékeit, b_j pedig B sajátértékeit jelenti.

A B . tétel segítségével *Stéphanos* tétele könnyen kiegészíthető:

II. Korollárium. Ha A és B szimmetrikus matrixok, és spektrálfelbontásuk

$$(6) \quad A = U \langle a_1, \dots, a_m \rangle U^* = \sum_k a_k u_k u_k^*, \quad U U^* = E_m,$$

$$(7) \quad B = V \langle b_1, \dots, b_n \rangle V^* = \sum_h b_h v_h v_h^*, \quad V V^* = E_n,$$

akkor $\sum_p \sum_q c_{pq} A^p \cdot \times B^q$ spektrálfelbontását

$$(8) \quad \sum_i \sum_j (u_i \cdot \times v_j) \left(\sum_p \sum_q c_{pq} a_i^p b_j^q \right) (u_i^* \cdot \times v_j^*)$$

szolgáltatja.

2. §. Hipermatrix determinánsa

Legyen adva az $[A_{ij}]$ nm -edrendű hipermatrix, melynek m -edrendű A_{ij} blokkjai páronként felcserélhetők. Tegyük fel egyelőre, hogy az

$$(9) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{12} & \dots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n, - 1)$$

hipermatrixok invertálhatók.

²⁾ Az általános definícióval megegyezésben $u \cdot \times v$ az alábbi vektort jelöli:

$$u \cdot \times v = u \cdot \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u v_1 \\ u v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u v_n \end{bmatrix}$$

³⁾ Lásd: [2]

Ekkor, ha az

$$(10) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ismert skalár azonosságban⁴⁾, ahol

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0; \quad b_{ik} = D_k^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{vmatrix};$$

$$c_{kj} = D_k^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k,k-1} & a_{kj} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

az a_{ij} skalár határozatlanokat az A_{ij} felcserélhető blokkokkal helyettesítjük, és mindkét oldalnak vesszük a determinánsát, azonnal nyerjük:

$$(11) \quad \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \det (\Sigma \pm A_{1\nu_1} A_{2\nu_2} \dots A_{n\nu_n})$$

Így az A. tétel (1) formuláját a (9) korlátozó feltételek mellett bebizonyítottuk, de folytonossági megfontolások alapján könnyen belátható, hogy ez az általános esetben is érvényes.

⁴⁾ Lásd például: [3], p. 39.

Bevezetve

$$\det [A_{ij}] = \sum_{(r)} \pm A_{1r_1} A_{2r_2} \dots A_{nr_n}$$

kifejezésre a »hiperdetermináns« elnevezést, kimondhatjuk a következőt:

Tétel: Ha valamely hipermatrix blokkjai páronként felcserélhetők, akkor a hipermatrix determinánsa egyenlő a blokkok hiperdeterminánsának a (közönséges) determinánsával.

Ez a tétel egy mn -edrendű determináns kiszámítását nyilvánvalóan m -edrendű determináns kiszámítására vezeti vissza.

3. §. Hipermatrix adjungáltja

Amennyiben az adjungált kiszámítására hasonló egyszerű módszert kívánunk találni, első látásra nem könnyű meglátni, hogyan használjuk ki a blokkok felcserélhetőségét. Ugyanis a minorok képzése, vagyis egy sor és egy oszlop törlése elrontja a hipermatrix particionált szerkezetét. Mindazonáltal egy igen egyszerű ötlet teszi lehetővé, hogy a megfelelő módszert megtaláljuk, mégpedig nem arra kell törekednünk, hogy az adjungátnak egyetlen elemét határozzuk meg, hanem annak egyszerre egy egész blokkját kell keresnünk.

E célból bevezetjük a felcserélhető blokkokból álló adott $[A_{ij}]$ hipermatrix »hiperadjungált«-jának a fogalmát. Hiperadjungátnak nevezzük és $\text{adj } [A_{ij}]$ -vel jelöljük azt az $[A_{ij}]$ -vel megegyező rendű hipermatrixot, melynek blokkjai ugyanolyan módon függenek az A_{ij} blokkoktól, mint a közönséges adjungált elemei egy közönséges matrix skalár elemeitől.

Ezen definícióval megegyezésben a hiperadjungált kielégíti az

$$(12) \quad [A_{ij}] \text{adj } [A_{ij}] = \begin{bmatrix} \det [A_{ij}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det [A_{ij}] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det [A_{ij}] \end{bmatrix}$$

azonosságot, s innen nyilvánvaló, hogy ha meg akarjuk kapni $[A_{ij}]$ adjungáltját, akkor mindössze a (12) egyenlet mindkét oldalát jobbról olyan diagonális hipermatrixszal kell megszorozni, melynek minden diagonál-eleme $\text{adj } \det [A_{ij}]$. Ekkor valóban

$$\det [A_{ij}] \cdot \text{adj } \det [A_{ij}] = \det [A_{ij}] \cdot E_m,$$

$$[A_{ij}] \cdot \{ \text{adj } [A_{ij}] \cdot (\text{adj } \det [A_{ij}] \cdot E_n) \} = \det [A_{ij}] \cdot E_{mn}$$

Tehát $[A_{ij}]$ adjungáltja egyenlő a kapesos zárójelben álló matrixszal, és így az A. tétel (2) formuláját bebizonyítottuk.

Ez az eredmény következőképpen fogalmazható:

Ahhoz, hogy egy felcserélhető blokkokból álló hipermatrix adjungáltját megkapjuk, az $\text{adj } [A_{ij}]$ hiperadjungált valamennyi blokkját $\text{adj } \det [A_{ij}]$ -vel kell megszoroznunk.

Ezzel egy mn -edrendű felcserélhető blokkokból álló hipermatrix adjungáltjának meghatározását n -edrendű és m -edrendű matrixokkal való műveletekre vezettük vissza.

Ha $[A_{ij}]$ hipermatrix nem szinguláris, akkor az adjungált kifejezése $[A_{ij}]$ reciprokára az alábbi formulát szolgáltatja :

$$(13) \quad [A_{ij}]^{-1} = \text{adj } [A_{ij}] (\det [A_{ij}] \cdot E_n)^{-1}.$$

4. §. Speciális esetek

Két kvadratikus matrixnak az

$$A \cdot \times B = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & Ab_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Ab_{n1} & Ab_{n2} & \dots & Ab_{nn} \end{bmatrix}$$

direkt szorzata a legegyszerűbb példa páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixra. Tehát a direkt szorzat tulajdonságait a fent bebizonyított tételek következményeiként kell nyernünk.

Valóban, (12) alkalmazásával azonnal adódik, hogy

$$\det (A \cdot \times B) = \det [Ab_{ij}] = \det (\det [Ab_{ij}]) = \det (A^n \cdot B) = A^n \cdot B^m.$$

Továbbá, a b_{ij} elem algebrai komplementumát B_{ij} -vel jelölve, (9) alapján nyerjük a direkt szorzat reciprokát :

$$\begin{aligned} (A \cdot \times B)^{-1} &= \text{adj } [Ab_{ij}] (\det [Ab_{ij}] \cdot E_n)^{-1} = [A^{n-1} B_{ji}] B^{-1} (A^{-n} \cdot \times E_n) = \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} & B_{ji} \\ & B \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \times B^{-1}. \end{aligned}$$

Egy további közelfekvő példa felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokra az olyan hipermatrix, melynek blokkjai ciklikusak vagy ferdén ciklikusak. Legyen tehát az adott hipermatrix $[A_{ij}]$, ahol

$$(14) \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{(0)} & a_{ij}^{(1)} & \dots & a_{ij}^{(m-1)} \\ a_{ij}^{(m-1)} & a_{ij}^{(0)} & \dots & a_{ij}^{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ij}^{(1)} & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(0)} \end{bmatrix}$$

m -edrendű ciklikus matrix. Ismeretes, hogy a tetszőleges elemekkel bíró (14) matrix a

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

primitív ciklikus matrixnak legfeljebb $(m-1)$ -edfokú polinomjaként írható fel a következőképpen :

$$A_{ij} = \varphi_{ij}(C) = a_{ij}^{(0)} E + a_{ij}^{(1)} C + a_{ij}^{(2)} C^2 + \dots + a_{ij}^{(m-1)} C^{m-1}$$

(a ciklikus matrixok ezen előállítására egyszersmind evidenciába helyezi a blokkok felcserélhetőségét).

Felhasználva a (11) összefüggést :

$$\det [A_{ij}] = \sum_{(r)} \pm \varphi_{1r_1}(C) \varphi_{2r_2}(C) \dots \varphi_{nr_n}(C).$$

Ezek szerint $\det [A_{ij}]$ a primitív ciklikus matrixnak legfeljebb $n(m-1)$ -edfokú polinomja, mely a $C^m = E$ (ferdén ciklikus esetben $C^m = -E$) karakterisztikus egyenlet segítségével legfeljebb $(m-1)$ -edfokú polinomra redukálható. Legyen ez $a_0 E + a_1 C + \dots + a_{m-1} C^{m-1}$. Ekkor az adott ciklikus blokkokból álló $[A_{ij}]$ hipermatrix determinánsa :

$$\det [A_{ij}] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Ezzel nm -edrendű determináns kiszámítását ebben az esetben is m -edrendű determináns kiszámítására vezettük vissza.

*W. Voigt*⁵⁾ vizsgálataiban a következő

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} b_{ij} & c_{ij} \\ -c_{ij} & b_{ij} \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

másodrendű ferden ciklikus blokkokból álló hipermatrix determinánsa szerepel, melyről kimutatja, hogy az két négyzet összege.

Voigt tétele a ciklikus blokkokból álló hipermatrixra vonatkozó eredményeinknek ferden ciklikus blokkok esetére érvényes analogonja. Ugyanis fentiek szerint

$$\det [A_{ij}] = \det \sum_{(r)} \pm \begin{vmatrix} b_{1r_1} & c_{1r_1} \\ -c_{1r_1} & b_{1r_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{2r_2} & c_{2r_2} \\ -c_{2r_2} & b_{2r_2} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} b_{nr_n} & c_{nr_n} \\ -c_{nr_n} & b_{nr_n} \end{vmatrix},$$

továbbá

$$\det [A_{ij}] = \det \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 + \gamma^2.$$

⁵⁾ Lásd : [4]

5. §. Permutáló matrix

Bevezetünk egy különleges hipermatrixot, melyet a továbbiakban több ízben felhasználunk. Legyenek

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ (m) \end{matrix} \quad \text{ill.} \quad f_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ \\ (j) \\ \\ \\ (n) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, m) \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

m -edrendű, illetve n -edrendű egységvektorok és képezzük ezek segítségével az mn -edrendű

$$(15) \quad \mathbf{P} = [e_i f_j^*] = \begin{bmatrix} e_1 f_1^* & e_2 f_1^* & \dots & e_m f_1^* \\ e_1 f_2^* & e_2 f_2^* & \dots & e_m f_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 f_n^* & e_2 f_n^* & \dots & e_m f_n^* \end{bmatrix}$$

kvadratus hipermatrixot. \mathbf{P} és \mathbf{P}^* blokkjai konformabilisak és

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{mn},$$

azaz \mathbf{P} ortogonális. Továbbá könnyen belátható, hogy a \mathbf{P} matrixszal való szorzás az

$$(11)(12) \dots (1n); (21)(22) \dots (2n); \dots; (m1)(m2) \dots (mn)$$

sorozatot (mint sorvektort) az

$$(11)(21) \dots (m1); (12)(22) \dots (m2); \dots; (1n)(2n) \dots (mn)$$

sorozatba transzformálja.

Bebizonyítjuk az

$$(16) \quad \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B})\mathbf{P}^*$$

összefüggést, amely azt fejezi ki, hogy ugyanazon két kvadratus matrix bal- és jobboldali direkt szorzatai ortogonálisan hasonló. E célból partícionáljuk \mathbf{A} matrixot oszlopvektorokba, \mathbf{B} matrixot pedig sorvektorokba:

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_m], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

és tekintsük az

$$[a_i b^j] = \begin{bmatrix} a_1 b^1 & a_2 b^1 & \dots & a_m b^1 \\ a_1 b^2 & a_2 b^2 & \dots & a_m b^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 b^n & a_2 b^n & \dots & a_m b^n \end{bmatrix}$$

mn -edrendű kvadratikus hipermatrixot.

P^* matrixszal szorozva kapjuk, hogy

$$[a_i b^j] \cdot P^* = [a_i b^j] [f_k e_l^*] = \left[\sum_v a_v b^j f_k e_v^* \right] = \left[b_{jk} \sum_v a_v e_v^* \right] = [b_{jk} A] = A \cdot \times B,$$

és hasonlóan

$$P^* [a_i b^j] = A \times \cdot B.$$

Innen

$$P^* [a_i b^j] P^* = (A \times \cdot B) P^* = P^* (A \cdot \times B)$$

vagy

$$A \cdot \times B = P (A \times \cdot B) P^*. \quad \text{Q. e. d.}$$

6. §. Szimmetrikus hipermatrix spektrál-felbontása

A továbbiakban feltesszük, hogy a hipermatrix blokkjai $A_{ij} = f_{ij}(A)$ alakúak, ahol A m -edrendű szimmetrikus matrix és $f_{ij}(x)$ a valós x változó tetszőleges polinomjai, melyeknek egyedül az $f_{ji}(x) = \overline{f_{ij}(x)}$ feltételt kell kielégíteniük.

Az A szimmetrikus matrix $f(A)$ polinomjának spektrál-felbontását írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned} f(A) &= U \langle f(a_k) \rangle U^* = \\ (17) \quad &= [u_1, u_2, \dots, u_m] \langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m) \rangle \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix} = \\ &= \sum_k f(a_k) u_k u_k^* \end{aligned}$$

vagy

$$(18) \quad U^* f(A) U = \langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m) \rangle; \quad U U^* = E_m.$$

Itt a_1, a_2, \dots, a_m az \mathbf{A} matrix (valós) sajátértékei, u_1, u_2, \dots, u_m pedig \mathbf{A} sajátvektorai.

Transzformáljuk az adott $[\mathbf{A}_{ij}] = [f_{ij}(\mathbf{A})]$ hipermatrixot az alábbiak szerint :

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{U}^* \times \mathbf{E}_n) [f_{ij}(\mathbf{A})] (\mathbf{U} \times \mathbf{E}_n) = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{U}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{A}) & f_{12}(\mathbf{A}) & \dots & f_{1n}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{A}) & f_{n2}(\mathbf{A}) & \dots & f_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{U} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{U} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \langle f_{11}(a_k) \rangle & \langle f_{12}(a_k) \rangle & \dots & \langle f_{1n}(a_k) \rangle \\ \langle f_{21}(a_k) \rangle & \langle f_{22}(a_k) \rangle & \dots & \langle f_{2n}(a_k) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_{n1}(a_k) \rangle & \langle f_{n2}(a_k) \rangle & \dots & \langle f_{nn}(a_k) \rangle \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Felhasználva a \mathbf{P} permutáló matrixot, nyerjük :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \times \mathbf{E}_n) [f_{ij}(\mathbf{A})] (\mathbf{U} \times \mathbf{E}_n) \mathbf{P} = \\
 & = \left\langle \begin{bmatrix} f_{11}(a_1) & \dots & f_{1n}(a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(a_1) & \dots & f_{nn}(a_1) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} f_{11}(a_m) & \dots & f_{1n}(a_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(a_m) & \dots & f_{nn}(a_m) \end{bmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Az $f_{ji} = f_{ij}$ feltétel következtében a jobboldal valamennyi diagonál-blokkja szimmetrikus, ezért minden $[f_{ij}(a_k)]$ blokk egy \mathbf{V}_k ortogonális matrix segítségével

$$(19) \quad \mathbf{V}_k^* \begin{bmatrix} f_{11}(a_k) & \dots & f_{1n}(a_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(a_k) & \dots & f_{nn}(a_k) \end{bmatrix} \mathbf{V}_k = \langle \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn} \rangle$$

diagonál-alakra hozható. Ezzel $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ spektrál-felbontása

$$(20) \quad \mathbf{T}^* [f_{ij}(\mathbf{A})] \mathbf{T} = \langle \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn} \rangle$$

egyenlettel adható meg, ahol

$$\mathbf{T} = (\mathbf{U} \times \mathbf{E}_n) \mathbf{P} \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m \rangle, \quad \mathbf{T} \mathbf{T}^* = \mathbf{E}_{mn}.$$

7. §. Direkt szorzat spektrál-felbontása

Tekintsük azt a legegyszerűbb esetet, amidőn valamennyi f_{ij} homogén lineáris függvény, azaz $f_{ij}(x) = b_{ij}x$ ($b_{ji} = b_{ij}$). Ekkor az $[f_{ij}(\mathbf{A})]$ hiper-matrix éppen

$$[f_{ij}(\mathbf{A})] = [\mathbf{A} b_{ij}] = \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} \quad (\mathbf{B} = [b_{ij}])$$

direkt szorzat.

Ebben az esetben a (20) spektrál-felbontás rendkívül egyszerűvé válik. Valóban, legyen \mathbf{B} spektrál-felbontása

$$(21) \quad \mathbf{V}^* \mathbf{B} \mathbf{V} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle, \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}_n$$

akkor minden egyes $[f_{ij}(a_k)] = a_k [b_{ij}]$ blokk ugyanazzal a \mathbf{V} transzformáló matrixszal a

$$\mathbf{V}^* \begin{bmatrix} a_k b_{11} & \dots & a_k b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k b_{n1} & \dots & a_k b_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{V} = a_k \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$$

diagonál-alakra hozható.

A (20) egyenlet $\mathbf{V}_1 = \dots = \mathbf{V}_k = \mathbf{V}$ helyettesítés után a következőre vezet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^* \cdot \times \mathbf{E}_n) \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_m) (\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B}) (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_m) \mathbf{P} (\mathbf{V} \cdot \times \mathbf{E}_n) = \\ = \langle a_1 b_1, \dots, a_1 b_n, a_2 b_1, \dots, a_2 b_n, \dots, a_m b_1, \dots, a_m b_n \rangle. \end{aligned}$$

Végül még egyszer felhasználva a \mathbf{P} permutáló matrixot, innen nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{V}) \langle a_1 b_1, \dots, a_m b_1, \dots, a_1 b_n, \dots, a_m b_n \rangle (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{V}^*) = \\ = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j) (a_i b_j) (\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*). \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a hipermatrix két szimmetrikus matrix direkt szorzata, akkor a sajátértékeket a tényezők sajátértékeinek a szorzata, a sajátvektorokat pedig a tényezők saját vektorainak a direkt szorzata adja.

Innen a direkt szorzatokra vonatkozó műveleti szabályok közvetlen felhasználásával következtetünk az alábbi tételre, mely *Stéphanos* egyik tételét teszi teljessé:

Ha az \mathbf{A} és \mathbf{B} szimmetrikus matrixok spektrál felbontását (18) és (21) adja, akkor

$$(22) \quad \sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \cdot \times \mathbf{B}^q = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j) \left(\sum_p \sum_q c_{pq} a_i^p b_j^q \right) (\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*)$$

Későbbi alkalmazásokra való tekintettel megjegyezzük a (22) összefüggésnek azt a speciális esetét, mely a $c_{10} = c_{01} = 1$ és minden többi $c_{pq} = 0$ esetre vonatkozik:

$$(23) \quad \mathbf{A} \cdot \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \times \mathbf{B} = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j) (a_i + b_j) (\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*).$$

8. §. Alkalmazás

Nem kétséges, hogy mind a direkt szorzat, mind a hipermatrix fogalmak eredetüket csoportelméleti vagy egyéb absztrakt megfontolásoknak köszönhetik. Mindazonáltal éppen ezek a fogalmak bizonyulnak alkalmas segédeszközöknek különféle szabályos szerkezetű mechanikai rendszerek matematikai vizsgálatánál. Mi itt csupán arra szorítkozunk, hogy ezen fogalmaknak a rácsdinamikában való alkalmazását mutassuk meg.

A rácsdinamikában olyan részecskéknak a rendszerét vizsgálják, melyek egyensúlyi helyzetükben szabályos rácsot képeznek, s minden egyes részecskére a legközelebbi szomszédja gyakorol hatást, amely esetleg egy rögzített peremrészecske is lehet.

A részecskékből alkotott véges rács normál rezgéseinek az ismerete elsőrendű fontosságú az anyag korpuszkuális elméletében, ezért a véges rács mozgásegyenleteinek vizsgálatával már több szerző is foglalkozott. Ezen erőfeszítések ellenére jelenleg — amennyire a szerző tájékozva van — egyedül az egyenlő és ekvidisztáns részecskékből álló egydimenziós rács normál rezgései ismeretesek. Két- és háromdimenziós esetben kizárólag a normál rezgések periódusát, azaz a sajátértékeket határozták meg.⁶⁾

A B. tétel alkalmazása lehetővé teszi, hogy a kerület mentén rögzített két- és háromdimenziós tömegpontrács normál rezgéseit is meghatározzuk. Az eredmény meglepően egyszerű: a két- vagy háromdimenziós rács sajátvektorai az egydimenziós »élrácsok« sajátvektoraiból alkotott direkt szorzatok, a frekvenciák négyzete pedig az egydimenziós élrácsok frekvenciáinak négyzetösszege.

Ezzel a húr és a membrán, valamint a nekik megfelelő rácsmodellek kapcsolata között fennálló analógia teljesnek mondható.

Abból a célból, hogy a kerületén rögzített, téglalapalakú kétdimenziós rácshoz tartozó matrix spektrál-felbontását előállítsuk, induljunk ki m egyenlő és ekvidisztáns részecskékből álló, két végén rögzített egydimenziós rácshoz tartozó matrix jól ismert spektrál-felbontásából⁷⁾:

$$C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} = S_m \left\langle 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+2} \right\rangle S_m^* =$$

$$= \sum_k 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+2} u_k u_k^*;$$

⁶⁾ Lásd például: [5]

⁷⁾ Lásd például: [5]

$$S_m = [u_1, u_2, \dots, u_m]; \quad u_i = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\pi}{m+1} \\ \sin \frac{2i\pi}{m+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{mi\pi}{m+1} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\mathbf{S}_m^* = \mathbf{S}_m; \quad \mathbf{S}_m^2 = \mathbf{E}_m.$$

Az mn egyenlő részecskéből álló, kerületén rögzített téglalapalakú két-dimenziós rácshoz tartozó mn -edrendű matrix az alábbi alakban írható:⁸⁾

[illegible]

Ha (22), (23) összefüggéseket és C_n (24) spektrál-felbontását alkalmazzuk, azonnal nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m \cdot \times \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{C}_n &= (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n) \left\langle 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+2} + 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2n+2} \right\rangle (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n)^*, \\ (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n)^* &= \mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n; (\mathbf{S}_m \cdot \times \mathbf{S}_n)^2 = \mathbf{E}_{mn}. \end{aligned}$$

⁸⁾ Lásd például: [5]

Ha S_m és S_n matrixokat

$$S_m = [u_1, \dots, u_m]; S_n = [v_1, \dots, v_n]; v_j^* = \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{j\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nj\pi}{n+1} \right] \right]$$

particionált alakban írjuk, akkor az $S_m \cdot S_n$ transzformáló matrix oszlopait, azaz a rács sajátvektorait

$$S_m \cdot S_n = [u_1 \cdot v_1, \dots, u_i \cdot v_j, \dots, u_m \cdot v_n] \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix},$$

szolgáltatja, ahol

$$u_i \cdot v_j = \left[\sqrt{\frac{2}{m+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\pi}{m+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{mi\pi}{m+1} \end{bmatrix} \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(m+1)(n+1)}} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\pi}{m+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \sin \frac{2i\pi}{m+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{mi\pi}{m+1} \sin \frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a kétdimenziós rács frekvenciáinak négyzete egyenlő az egydimenziós élrácsok frekvenciáinak négyzetösszegével, sajátvektorai pedig az élrácsok sajátvektorainak $u_i \cdot v_j$ direkt szorzatával.

Ugyanezt az eljárást a

$$C_m \cdot E_n \cdot E_r + E_m \cdot C_n \cdot E_r + E_m \cdot E_n \cdot C_r$$

hipermatrixra alkalmazva, nyilvánvalóan a határfelületén rögzített, derékszögű paralelepipedon alakú háromdimenziós rácsokhoz tartozó matrix spektrálfelbontásához jutunk.

IRODALOM

[1] J. WILLIAMSON: »The latent roots of a matrix of special type.« *Bulletin of the American Mathematical Society* 3 (1931) 585—590.

[2] C. STÉPHANOS: »Sur une extension du calcul des substitutions linéaires.« *Journal de Mathématique Pures et Appliquées* (5) 6 (1900) 73—126.

[3] Ф. Я. ГАЙТМАХЕР: *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953.

[4] W. VOIGT: »Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Krystallen.« *Wiedemanns Annalen der Physikalischen Chemie* 16 (1882) 273—321.

[5] D. E. RUTHERFORD: »Some continuant determinants arising in physics and chemistry.« *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 62 (1947) 229—236 és 63 (1952) 232—241.

О ГИПЕРМАТРИЦАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПОПАРНО ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫХ БЛОКОВ, И ОБ ИХ ПРИМЕНЕНИИ В ДИНАМИКЕ РЕШЕТОК

Е. Эгервари

Резюме

Настоящая работа посвящается доказательству, обсуждению и применению следующих двух теорем:

Теорема А. Если блоки порядка m — гиперматрицы $[A_{ij}]$ попарно переставляемы, то определитель и сопряженная A даются соответственно следующим формулам:

$$\det [A_{ij}] = \det (\det [A_{ij}]);$$

$$\text{adj} [A_{ij}] = \text{adj} [A_{ij}] \{ \text{adj} (\det [A_{ij}]) \cdot \times E_n \},$$

где

$$\det [A_{ij}] = \sum_{(v)} \pm A_{1v_1} A_{2v_2} \dots A_{nv_n}$$

а $\text{adj} [A_{ij}]$ означает гиперматрицу, блоки которой зависят от блоков A_{ij} , точно также как обыкновенные сопряженные элементы $\text{adj} [A_{ij}]$ зависят от скалярных элементов A_{ij} .

Теорема В. Пусть A симметричная (эрмитова) матрица порядка m со собственными значениями a_1, a_2, \dots, a_m пусть далее $f_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) произвольные многочлены вещественной переменной x , подчиненные условию $f_{ji}(x) = \overline{f_{ij}(x)}$; при таких условиях спектральное разложение гиперматрицы $[A_{ij}]$, состоящей из блоков $A_{ij} = f_{ij}(A)$, дается формулой

$$[A_{ij}] = T \langle \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{nm} \rangle T^*, \quad T^* T = E_m,$$

где собственные значения λ_{ij} и множители преобразующей матрицы

$$T = \langle \overbrace{U, U, \dots, U}^n \rangle P \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$$

получаются из спектрального разложения

$$A = U \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle U^*, \quad [f_{ij}(a_k)] = V_k \langle \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn} \rangle V_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

а P перестановочная матрица, переводящая последовательность пар чисел

$$(11) (12) \dots (1m) (21) (22) \dots (2m) \dots (n1) (n2) \dots (nm)$$

в последовательность

$$(11) (21) \dots (n1) (12) (22) \dots (n2) \dots (1m) (2m) \dots (nm)$$

Тогда собственный вектор $[A_{ij}]$ дается столбцами T .

Частный случай теоремы В, относящийся к прямому произведению симметрических матриц A и B можно отдельно формулировать как

Следствие I. Собственными значениями $A \times B$ являются произведения $a_i b_j$ собственных значений A и B , а собственными значениями $A \times B$ являются прямые произведения $u_i \times v_j$, составленные из собственных векторов A и B .

По одной теореме Стефаноса nm собственные значения гиперматрицы $\sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^q$ порядка nm представляются числами $\sum_p \sum_q a_i^p b_j^q$, где a_i собственные значения \mathbf{A} , а b_j собственные значения \mathbf{B} .

При помощи теорем А и В можно дополнить теорему Стефаноса следующим образом:

Следствие II. Если симметрические матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют спектральные разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle a_1, \dots, a_m \rangle \mathbf{U}^* = \sum_k a_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*, \quad \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{E}_m,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \mathbf{V}^* = \sum_h b_h \mathbf{v}_h \mathbf{v}_h^*, \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}_n,$$

тогда спектральное разложение $\sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^q$ дается выражением

$$\sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_j) \left(\sum_p \sum_q c_{pq} a_i^p b_j^q \right) (\mathbf{u}_i^* \times \mathbf{v}_j^*)$$

Применяя теорему В, можно определить нормальные колебания двумерной или трехмерной решетки материальных точек, закрепленной вдоль периметра. Получается следующий результат: собственными векторами двумерной или трехмерной решетки являются прямые произведения собственных векторов одномерных «решеток-ребер», а квадрат частоты есть сумма квадратов частот одномерных решеток ребер.

ON HYPERMATRICES WHOSE BLOCKS ARE COMMUTABLE IN PAIRS AND THEIR APPLICATION IN LATTICE-DYNAMICS

E. ÉGERVÁRY

Summary

The main object of this paper is the proof, discussion and application of the following theorems.

Theorem A. If the m -th order blocks \mathbf{A}_{ij} of the hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ are pairwise commutable then the determinant, resp. the adjoint of $[\mathbf{A}_{ij}]$ are given by the following formulae:

$$\det [\mathbf{A}_{ij}] = \det (\det [\mathbf{A}_{ij}]),$$

$$\text{adj} [\mathbf{A}_{ij}] = \text{adj} [\mathbf{A}_{ij}] \cdot \{ \text{adj} (\det [\mathbf{A}_{ij}]) \times \mathbf{E}_n \}$$

where

$$\det [\mathbf{A}_{ij}] = \sum_{(v)} \pm \mathbf{A}_{1v_1} \mathbf{A}_{2v_2} \dots \mathbf{A}_{nv_n},$$

and $\text{adj} [\mathbf{A}_{ij}]$ denotes a hypermatrix whose blocks depend in the same way upon the blocks \mathbf{A}_{ij} , as the elements of an ordinary adjoint $\text{adj}[a_{ij}]$ depend upon the scalar elements a_{ij} .

Theorem B. If \mathbf{A} is a (hermitian) symmetrical m -th order matrix with the characteristic roots a_1, a_2, \dots, a_m and if $f_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) are arbitrary polynomials of the real variable x , subject only to the restriction $f_{ji}(x) = \overline{f_{ij}(x)}$, then the spectral decomposition of the hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ with the blocks $\mathbf{A}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{A})$ is given by

$$[\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{T} \langle \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn} \rangle \mathbf{T}^*, \quad \mathbf{T}^* \mathbf{T} = \mathbf{E}_{mn},$$

where the characteristic roots λ_{ij} and the factors of the transforming matrix

$$\mathbf{T} = \langle \overbrace{\mathbf{U}, \mathbf{U}, \dots, \mathbf{U}}^n \rangle \mathbf{P} \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n \rangle$$

are to be found from the spectral decompositions

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mathbf{U}^*, \quad [f_{ij}(a_k)] = \mathbf{V}_k \langle \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn} \rangle \mathbf{V}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

and \mathbf{P} is the permutation matrix which transforms the sequence of ordered pairs

$$(11) (12) \dots (1m) (21) (22) \dots (2m) \dots (n1) (n2) \dots (nm)$$

into the sequence

$$(11) (21) \dots (n1) (12) (22) \dots (n2) \dots (1m) (2m) \dots (nm)$$

The characteristic vectors of $[\mathbf{A}_{ij}]$ are then obtained from the columns of \mathbf{T} .

The special case of *Theorem B* concerning the direct product $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ of the symmetrical matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} can be formulated explicitly as

Corollary I. The characteristic roots of $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ are the products $a_i b_j$ of the characteristic roots of \mathbf{A} and \mathbf{B} , and the characteristic vectors of $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ are the direct products $u_i \times v_j$ of the characteristic vectors of \mathbf{A} and \mathbf{B} .

According to a theorem given by *Stéphanos* the characteristic roots of the nm -th order hypermatrix $\sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^q$ are the nm numbers $\sum_p \sum_q a_i^p b_j^q$, where the a_i 's are the characteristic roots of \mathbf{A} and the b_j 's are the characteristic roots of \mathbf{B} .

By means of *Theorem B* the theorem of *Stéphanos* can be easily completed as follows:

Corollary II. If \mathbf{A} and \mathbf{B} are symmetrical and have the spectral decompositions

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle a_1, \dots, a_m \rangle \mathbf{U}^* = \sum_k a_k u_k u_k^*, \quad \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{E}_m,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \mathbf{V}^* = \sum_h b_h v_h v_h^*, \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}_n,$$

then the spectral decomposition of $\sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^q$ is given by

$$\sum_i \sum_j (u_i \times v_j) \left(\sum_p \sum_q c_{pq} a_i^p b_j^q \right) (u_i^* \times v_j^*).$$

By applying *Theorem B* we can determine the normal vibrations of a two- or three-dimensional lattice of particles with fixed boundary. The result is the following: The characteristic vectors of a two- or three-dimensional lattice are equal to the direct products of the characteristic vectors of the one-dimensional «edge-lattices», while the squares of the frequencies are equal to the sum of the squares of the frequencies of the one-dimensional edge-lattices.

KÉT VÉGÉN FELFÜGGESZTETT GERENDA STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA A MATRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

LOVASS-NAGY VIKTOR

Bevezetés

Jelen dolgozat szerzője egy korábbi munkájában¹⁾ foglalkozott két végén szabadon felfüggesztett gerendák oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának matematikai vizsgálatával, azon esetekben, amikor a gerendát a középső keresztmetszet súlypontjában ható koncentrált vagy *egyenletesen* megoszló erő terheli. Az alábbiakban — két, egymásra merőleges szimmetriasíkkal bíró — gerendának *tetszésszerű* függőleges irányú terhelés hatására létrejövő deformációját fogjuk vizsgálni, azon esetben, amidőn a gerenda oly módon van két végén felfüggesztve, hogy a forgást megengedő felfüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja fölött, valamelyik fő-inerciatengelyben fekszenek²⁾.

A vázolt esetben kétféle egyensúlyi helyzet lehetséges :

1. A gerenda csak függőleges lehajlást és egyes keresztmetszetek csak a gerenda hossz tengelyére merőleges vízszintes tengely körüli elfordulást szenvednek. Ennek az egyensúlyi helyzetnek a labilis vagy stabilis volta a felfüggesztési pontok helyzetétől függ. Ha a felfüggesztési pontok elhelyezése olyan, amely mellett a most körülírt egyensúlyi helyzet labilis, akkor létezik egy másik, stabilis egyensúlyi helyzet is, amelyben a gerenda a 2. alatt vázolt deformációt szenved.

2. A gerenda az adott terhelés hatására mind függőleges, mind vízszintes irányban kihajlik, és az egyes keresztmetszetek mind a hossz tengely, mind az arra merőleges vízszintes és függőleges tengely körül elfordulnak.

A következő számítások célját azon kérdés megválaszolása képezi, hogy vajon lehetséges-e a gerenda felfüggesztését oly módon eszközölni, hogy a gerenda stabilis egyensúlyi állapota az 1. pontban vázolt legyen.

¹⁾ Lásd : [1], [2] (p. 242) és [3]. Timoshenko [2] dolgozatában két végén befalazott derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda középső keresztmetszetének súlypontjában ható koncentrált erő által előidézett kibillenését vizsgálta, Csonka P. [3] pedig a két végén keresztmetszetének súlypontja felett felfüggesztett, *egyenletesen* megoszló erővel terhelt derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda kibillenésével foglalkozott.

²⁾ Számításaink nyilvánvalóan olyan gerendákra vonatkoznak, amelyek anyaga homogén, izotróp és tökéletesen rugalmas. A levezetett eredmények nem alkalmazhatók vékonyfalú szelvényrészekből összetett keresztmetszetekre, ahol az övhajlítások is figyelembeveendők.

Jelölések

- z a deformálatlan súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformálatlan súlyponti szál középpontjától, a deformálatlan súlyponti szál mentén mérve ;
- s a deformált súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformált súlyponti szál középpontjától, a deformált súlyponti szál mentén mérve ;
- $r(z)$ a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mért z távolságra levő pont helyzetvektora ;
- $r(s)$ a deformált súlyponti szál középpontjától a deformált súlyponti szál mentén mért s távolságra levő pont helyzetvektora ;
- r_1 a lentebb értelmezendő Q erő támadási pontjának helyzetvektora ;
- $P(z)$... a gerendára ható (a deformálatlan súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(z)$ helyzetvektorú pontban ;
- $P(s)$... a gerendára ható (a deformált súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(s)$ helyzetvektorú pontban ;
- Q a gerenda jobboldali végén ható koncentrált (reakció-) erő ;
- $M(z)$... a gerenda valamely z koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz z -től $+l/2$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő ;
- $M(s)$... a deformált gerenda valamely s koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz s -től $+l/2$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő ;
- $\alpha + \beta$... jelenti azon szöveget, amellyel az egyensúlyi helyzetben a gerenda tetszőszerinti keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti függőleges, illetőleg vízszintes helyzetükhöz képest a felfüggesztési pontokon át fektethető tengely körül elfordulnak ;
- α jelenti azon (véges mértékű) szöveget, amellyel a gerenda két szélső keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti helyzetükhöz képest elfordulnak ;
- β jelenti azon (elsőrendűen kicsiny) szöveget, amellyel a gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyei a deformált állapotban a két szélső keresztmetszethez viszonyítva elfordulnak ;

1. megjegyzés: Mivel a jelenség α -ban szimmetrikus, α pozitív iránya tetszés szerint választható. A következő számításokban α -t β -val megegyező irányításúnak vesszük. A β szög pozitív iránya megegyezik a lentebb értelmezendő t_0 vektorhoz rendelt jobbsavar-iránnyal.

2. megjegyzés: A gerenda 2. fajta egyensúlyi helyzetének kialakulása úgy is elképzelhető, hogy először az egész gerenda (deformálódás nélkül) elfordul a felfüggesztési pontokon átfektetett tengely körül α szöggel, majd a gerenda két végét ebben a helyzetben rögzítve (befalazva), a gerenda az eredetileg adott függőleges irányú terhelés hatására deformálódik, amely deformációt a fenti β szög, továbbá a lentebb értelmezendő φ és ψ szögek, valamint u és v elmozdulások jellemeznek.

- n_{10}, n_{20}, t_0 ... az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerenda középső keresztmetszetének fő-inerciatengelyeivel és a gerenda súlyponti szálával egybeeső, az adott sorrendben jobbsavar-rendszert alkotó egységvektor-hármas ;
- n_1, n_2, t ... a deformált gerenda valamely keresztmetszetének fő-inerciatengelyei vel és a deformált súlyponti szálnak az illető keresztmetszet súlypontjához tartozó érintőjével egybeeső, az adott sorrendben jobbsavar-rendszert alkotó egységvektor-hármas ; az alábbiakban : »kísérő triéder«;³⁾
- φ a deformált gerenda súlyponti szála t érintő-vektorának az n_{20} - t_0 síkra való vetületének a t_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense) ;
- ψ a deformált gerenda súlyponti szála t érintő-vektorának az n_{20} - t_0 síkra való vetületének a t_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense) ;

³⁾ A »kísérő triéder« kifejezést a geometriai szóhasználattól eltérőleg, a rugalmas rudak elméletében általában szokásos értelemben használjuk.

3. megjegyzés: φ , illetve ψ akkor minősítendőek pozitívnak, ha forgási irányuk megegyezik az n_{20} , illetve n_{10} vektorhoz rendelt jobbesavar forgási irányával.

4. megjegyzés: A β , φ és ψ szögek felhasználásával az n_{10} , n_{20} , t_0 »alap-triéder« és az n_1 , n_2 , t »kísérő-triéder« között a következő összefüggések írhatók fel:⁴⁾

$$n_1 = 1 \cdot n_{10} + \beta \cdot n_{20} - \varphi \cdot t_0$$

$$n_2 = -\beta \cdot n_{10} + 1 \cdot n_{20} + \psi \cdot t_0$$

$$t = \varphi \cdot n_{10} - \psi \cdot n_{20} + 1 \cdot t_0$$

u.....a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az n_{10} vektorral megegyező irányban;

v.....a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, a n_{20} vektorral megegyező irányban.

5. megjegyzés: Az u , illetve v elmozdulást akkor minősítjük pozitívnak, ha az megegyező irányú az n_{10} , illetve az n_{20} vektorral.

6. megjegyzés: Minthogy feltevésünk szerint a gerenda α szöggel elfordul, de még nem deformálódott helyzetétől számított $n_{10} \cdot u + n_{20} \cdot v$ deformációs elmozdulás elsőrendűen kicsiny, továbbá t_0 irányú elmozdulás nincs, másodrendű kicsinyektől eltekintve írhatjuk, hogy

$$s = z,$$

$$r(s) = r(z),$$

$$\left| \frac{dr(s)}{ds} \right| = \left| \frac{dr(z)}{dz} \right| = 1.$$

Továbbá:

$$\varphi = \frac{du}{dz} \text{ és } \psi = \frac{dv}{dz}.$$

(Tehát, pozitív u -hoz pozitív φ , pozitív v -hez negatív ψ tartozik.)

1. §. A folyamatot leíró differenciál-egyenletek megszerkesztése

A folyamatot leíró differenciál-egyenletek megszerkesztése végett elegendő a gerenda egy tetszőleges darabjára (például a szilárdságtanban szokásos módon a gerenda valamely kiválasztott keresztmetszetétől jobbra eső, azaz z -től $+l/2$ -ig terjedő, gerenda-darabra) ható nyomtérvektor-eredőnek az egyensúly fennállása esetén való eltűnését felhasználni.

A fentebb bevezetett jelölések figyelembevételével:

$$(1) \quad M(s) = \int_s^{l/2} [r(\sigma) - r(s)] \times P(\sigma) |\dot{r}(\sigma)| d\sigma + [r_1 - r(s)] \times Q$$

⁴⁾ Az n_{10} , n_{20} , t alap-triédert az $n_1(z)$, $n_2(z)$, $t(z)$ kísérő-triéderbe forgató matrixnak itt felhasznált alakja közvetlenül adódik az úgynevezett Cayley-féle formulákból (lásd például [4]-et, p. 210), ha a végtelen kis forgásnak megfelelőleg az ott szereplő paraméternek csupán első hatványait tartjuk meg.

Ebből (a 6. megjegyzésben foglaltak alapján) nyerjük, hogy

$$(2) \quad \mathbf{M}(z) = \int_z^{l_2} [\mathbf{r}(\zeta) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\zeta) d\zeta + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} \cdot u(z) + \mathbf{n}_{20} \cdot v(z) + \mathbf{t}_0 \cdot z$$

Annak érdekében, hogy az elemi rúdelmélet három alap-differenciál-egyenletét felírassuk, a fenti $\mathbf{M}(z)$ nyomatékvektor-eredőnek a deformált gerendán kiválasztott valamely keresztmetszet fő-inerciatengelyei és a deformált súlyponti szál érintője által alkotott \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{t} »kísérő-triéder« egységvektorokra való vetületeit kell képezni. Ily módon az egyensúly feltételeként azt nyerjük, hogy

$$(3) \quad \begin{cases} B_2 \frac{d\psi}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_1 \\ B_1 \frac{d\varphi}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_2 \\ C \frac{d\beta}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{t} \end{cases}$$

A (3) egyenletrendszerből (a 4. és 6. megjegyzésekben foglaltak figyelembevételével) az alábbi egyenletrendszerre⁵⁾ jutunk:

$$(4) \quad \begin{cases} -B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[\mathbf{n}_{10} + \beta(z) \cdot \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \mathbf{t}_0 \right] \\ -B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[-\beta(z) \mathbf{n}_{10} + \mathbf{n}_{20} - \frac{dv(z)}{dz} \mathbf{t}_0 \right] \\ C \frac{d\beta}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[\frac{du(z)}{dz} \mathbf{n}_{10} + \frac{dv(z)}{dz} \mathbf{n}_{20} + \mathbf{t}_0 \right] \end{cases}$$

⁵⁾ A (4) egyenletrendszerben B_1 és B_2 a gerenda fő hajlítási merevségeit, C pedig a torziós merevségét jelentik.

$$B_1 = J_1 E \quad \text{és} \quad B_2 = J_2 E,$$

ahol J_1 és J_2 a gerenda-keresztmetszet fő-inercianyomatékai az 1-, illetve 2-jelű tengelyekre és E a rugalmassági modulus, és $C = J_3 G$, ahol J_3 a gerenda-keresztmetszet torziós nyomatéka és G a torziós modulus. A fő-inercianyomatékok meghatározása közismert módon történik. A torziós nyomaték meghatározását illetőleg lásd például [5]-öt (p. 375), továbbá [6]-ot (VI. kötet, p. 151). Például a alappal és b magassággal bíró négyszögkeresztmetszetű tartó esetén:

Amennyiben a gerenda függőleges irányú terhelésének (hosszegységre vonatkoztatott) abszolút értéke a $p = p(z)$ függvény által adott és a felüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja felett h magasságban vannak, akkor írhatjuk:

$$P(z) = -[n_{10} p(z) \cdot \sin \alpha + n_{20} p(z) \cdot \cos \alpha],$$

$$Q = (n_{10} \sin \alpha + n_{20} \cos \alpha) Q,$$

$$r_1 = n_{20} h + t_0 \frac{l}{2}.$$

A jobboldali reakció-erő abszolút értéke nyilván

$$Q = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} p(\zeta) \left(\frac{l}{2} + \zeta \right) d\zeta.$$

Ily módon adódik, hogy

$$\begin{aligned} M(z) = & n_{10} \left[\int_{zl/2}^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \cos \alpha - \\ & - n_{20} \left[\int_z^{zl/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \cos \alpha - \\ & - t_0 \left\{ \int_z^{l/2} p(\zeta) [u(\zeta) - u(z)] d\zeta \cos \alpha - \int_z^{l/2} p(\zeta) [v(\zeta) - v(z)] d\zeta \sin \alpha + \right. \\ & \left. + Q u(z) \cos \alpha + Q [h - v(z)] \sin \alpha \right\}. \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{ab^3}{12}$$

$$J_2 = \frac{a^3b}{12};$$

J_3 értéke csak végtelen sor alakban állítható elő; keskeny $\left(\frac{a}{b} < \frac{1}{3}\right)$ tartóknál:

$$J_3 = \frac{a^3b}{3} \left(1 - 0,63 \frac{a}{b} \right).$$

(Lásd például [6]-ot, VI. kötet, p. 153.)

Az (5) összefüggés figyelembevételével a (4) egyenletrendszerből azt nyerjük, hogy:⁶⁾

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 -B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] [\cos \alpha - \beta(z) \sin \alpha] + \\
 &\quad + Q h \frac{du}{dz} \sin \alpha \\
 -B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] [\sin \alpha + \beta(z) \cos \alpha] - \\
 &\quad - Q h \frac{dv}{dz} \sin \alpha \\
 C \frac{d\beta}{dz} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \left[\frac{du}{dz} \cos \alpha - \frac{dv}{dz} \sin \alpha \right] - \\
 &\quad - \int_z^{l/2} p(\zeta) [u(\zeta) - u(z)] d\zeta \cos \alpha + \int_z^{l/2} p(\zeta) [v(\zeta) - v(z)] d\zeta \sin \alpha - \\
 &\quad - Q u(z) \cos \alpha - Q [h - v(z)] \sin \alpha .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

A (6) egyenletrendszer harmadik egyenletének mindkét oldalát z szerint differenciálva, és rövidebb írásmód céljából bevezetve a

$$g(z) = \int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

jelölést, a (6) egyenletrendszerből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} + \sin \alpha \cdot Q h \frac{du}{dz} - \sin \alpha \cdot g(z) \beta = -\cos \alpha \cdot g(z) \\
 & B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} - \sin \alpha \cdot Q h \frac{dv}{dz} + \cos \alpha \cdot g(z) \beta = -\sin \alpha \cdot g(z) \\
 & C \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \cos \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + \sin \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 v}{dz^2} = 0
 \end{aligned}$$

⁶⁾ A másodrendű kicsiny tagokat elhanyagoljuk.

Annak érdekében, hogy mindhárom egyenletben ugyanolyan dimenziójú kifejezések szerepeljenek, osszuk el a (7) egyenletrendszer első és második egyenletét l -lel; így módon (az egyenletek sorrendjét célszerűségi okokból megváltoztatva) nyerjük a gerenda deformációját leíró, lineáris, változó együtthatós differenciál-egyenletrendszer végleges alakját:⁷⁾

$$(8) \quad \begin{aligned} C \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \cos \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + \sin \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0 \\ \cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \beta + B_1 \frac{1}{l} \frac{d^2 u}{dz^2} - \sin \alpha \cdot Qh \frac{1}{l} \frac{dv}{dz} &= -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \\ -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \beta + \sin \alpha \cdot Qh \frac{1}{l} \frac{du}{dz} + B_2 \frac{1}{l} \frac{d^2 v}{dz^2} &= -\cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z). \end{aligned}$$

A deformált gerenda alakját meghatározó $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$ függvények a következő kerületi feltételeket tartoznak egyidejűleg kielégíteni:

$$(9) \quad \begin{aligned} \beta\left(-\frac{l}{2}\right) &= \beta\left(+\frac{l}{2}\right) = 0 \\ u\left(-\frac{l}{2}\right) &= u\left(+\frac{l}{2}\right) = 0 \\ v\left(-\frac{l}{2}\right) &= v\left(+\frac{l}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Az α szög meghatározása abból a feltételből történhet, hogy egyensúly esetén nincs a gerendát a két felfüggesztési ponton átmenő forgástengely körül forgató nyomaték. Egyensúly esetén tehát:

$$(10) \quad \int_{-l/2}^{l/2} p(z) u(z) dz \cos \alpha - \int_{-l/2}^{l/2} p(z) [v(z) - h] dz \sin \alpha = 0.$$

A (10) egyenletből azonban nem csupán az adott h felfüggesztési magasság esetén bekövetkező elfordulás határozható meg, hanem előírható az

⁷⁾ Ha a (8) egyenletrendszerben α helyébe zérust írunk, az egyenletrendszerből u és v kiküszöbölhetők és így módon $\beta(z)$ -re a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} + \frac{1}{CB_1} [g(z)]^2 \beta = 0.$$

Ez az egyenlet magában foglalja az *S. Timoshenko* [2], illetve *Csonka P.* [3] dolgozataiban szereplő egyensúlyi egyenleteket. Például $p = \text{const}$ egyenletesen megoszló terhelés esetén $g(z) = \frac{p}{2} \left(z^2 - \frac{l^2}{4} \right)$ és így a $\beta(z)$ -re adódó differenciálegyenlet az

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} + \frac{1}{CB_1} \frac{p^2}{4} \left(z^2 - \frac{l^2}{4} \right) \beta = 0$$

alakot ölti.

α elfordulási szög értéke is, és ez esetben a (10) egyenletből meghatározható a h felfüggesztési magasság azon értéke, amelynél a gerenda stabilis egyensúlyi állapotában a szélső keresztmetszetek eredeti helyzetükhöz képest éppen α szöggel fordulnak el:

$$(11) \quad h = \frac{\cos \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) u(z) dz - \sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) v(z) dz}{\sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

2. §. A deformációt leíró differenciál-egyenletrendszer közelítő megoldása a matrix-számítás segítségével⁸⁾

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} C \frac{d^2}{dz^2} & -\cos \alpha \cdot l g \frac{d^2}{dz^2} & \sin \alpha \cdot l g \frac{d^2}{dz^2} \\ \cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g & B_1 \frac{d^2}{dz^2} & -\sin \alpha \cdot Q h \frac{d}{dz} \\ -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g & \sin \alpha \cdot Q h \frac{d}{dz} & B_2 \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{l} g \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \frac{u}{l} \\ \frac{v}{l} \end{bmatrix}.$$

A bevezetett jelölések segítségével a (8) egyenletrendszer a következő matrix-egyenlet alakjában írható:

$$(12) \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{r}.$$

A (12) egyenlet közelítő megoldását keressük $\mathbf{y} = \mathbf{c} \frac{1}{l} \mathbf{y}$ alakban, ahol

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix},$$

⁸⁾ A matrix-számításnak az alábbiakban felhasználandó fogalmait és jelöléseit illetőleg lásd például: [7] és [8].

továbbá $y = y(z)$ tetszésszerűen olyan függvény, mely legalább kétszer differenciálható és amely kielégíti az $y(-l/2) = y(+l/2)$ kerületi feltételt. A c_1, c_2, c_3 állandók értéke oly módon választandó, hogy a

$$H = \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) dz$$

»közepes kvadratikus hiba« értéke minimális legyen, aminek szükséges feltétele, hogy

$$(13) \quad \text{grad}_c H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial c_1} \\ \frac{\partial H}{\partial c_2} \\ \frac{\partial H}{\partial c_3} \end{bmatrix} = 0$$

legyen.⁹⁾

Nyilvánvaló¹⁰⁾, hogy

$$\begin{aligned} H &= \int_{-l/2}^{l/2} \left[\mathbf{c}^* \left(\mathbf{L} \frac{1}{l} y \right)^* - \mathbf{r}^* \left| \left(\mathbf{L} \frac{1}{l} y \right) \mathbf{c} - \mathbf{r} \right| \right] dz = \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{1}{l^2} \mathbf{c}^* (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) \mathbf{c} - \frac{1}{l} \mathbf{r}^* (\mathbf{L}y) \mathbf{c} - \frac{1}{l} \mathbf{c}^* (\mathbf{L}y) \mathbf{r} + \mathbf{r}^* \mathbf{r} \right] dz \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy ha \mathbf{B} tetszésszerűen kvadratikus matrix, akkor

$$\text{grad}_c [\mathbf{c}^* \mathbf{B} \mathbf{c}] = [\mathbf{B} + \mathbf{B}^*] \mathbf{c},$$

továbbá; ha \mathbf{d} tetszésszerűen oszlop-matrix, akkor:

$$\text{grad}_c [\mathbf{c}^* \mathbf{d}] = \mathbf{d},$$

téhat a c_1, c_2, c_3 együtthatók meghatározására a (13) feltételből a következő egyenletet kapjuk¹¹⁾:

$$(14) \quad \left| \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) dz \right| \mathbf{c} = l \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* \mathbf{r} dz.$$

⁹⁾ Az itt követett eljárás lényegében Ritz közismert módszerének alkalmazása matrix-egyenletre. (Az általános Ritz-féle módszert illetőleg lásd például [9]-et (p.205). A Ritz-féle módszernek matrix-egyenletre való alkalmazását illetőleg lásd: [11])

¹⁰⁾ Ugyanis $\mathbf{r}(\mathbf{L}y)\mathbf{c} = \mathbf{c}^*(\mathbf{L}y)^*\mathbf{r}$

¹¹⁾ Ugyanis $[(\mathbf{L}y)^*(\mathbf{L}y)]^* = (\mathbf{L}y)^*(\mathbf{L}y)$

A (14) matrix-egyenletből adódik, hogy

$$(15) \begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix} = \left\{ \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* \mathbf{L}y dz \right\}^{-1} \cdot \left\{ - \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* g dz \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ebből a c_1 , c_2 , c_3 együttthatók oszlop-matrixa:¹²⁾

$$(16) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left\{ (\mathbf{L}y)^* \mathbf{L}y dz \right\}^{-1} \cdot \left\{ - \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* g dz \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. §. A h felfüggesztési magasság kritikus értékének meghatározása

A dolgozat most következő, befejező részében a fentebb levezetett összefüggések' felhasználásával meghatározzuk a h felfüggesztési magasságnak azt a kritikus értékét (h_{krit}), amellyel egyenlő vagy amelynél nagyobb felfüggesztési magasság esetén a gerenda stabilis egyensúlyi helyzetében nem görbül ki oldalirányban, illetve amelynél kisebb felfüggesztési magasság esetén a gerenda stabilis egyensúlyi helyzetében oldalirányban kigörbül.

Mint ahogy feltételezésünk szerint $u = c_2 y \sin \alpha$ és $v = c_3 y \cos \alpha$, tehát a (11) egyenlet felhasználásával nyerjük:

$$(17) \quad h = - (c_2 - c_3) \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) y(z) dz}{\sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

A (17) egyenlet magában foglalja mind a labilis, mind a stabilis egyensúlyi helyzet fennállásának feltételét; az egyenlet jobboldalán álló tört számlálóját és nevezőjét $\sin \alpha$ -val elosztva, nyerjük a *stabilis* egyensúlyi helyzet esetén fennálló összefüggést. A h_{krit} értékét abból a feltételből nyerjük, amely szerint, ha a felfüggesztési magasság értéke éppen egyenlő h_{krit} -sal, akkor a stabilis egyensúlyi helyzetben $\alpha = 0$ (aminek következtében, feltevésünk értelmében: $\beta = 0$ és $u = 0$).¹³⁾

¹²⁾ Ugyanis

$$\begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¹³⁾ Ugyanis — feltevésünk értelmében — $\beta = c_1 y(z) \sin \alpha \cos \alpha$.

A fentiek szerint :

$$(18) \quad h_{krit} = -(c_2 - c_3) \cdot \frac{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) y(z) dz}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

Az $y = y(z)$ függvényt a fentiek szerint előírva, a h_{krit} -hoz tartozó c_2 , illetve c_3 a (16) egyenletből $a = 0$ helyettesítéssel nyerhető. Jelöljük rövidebb írásmód végett $\frac{d^2 y}{dz^2}$ -et y'' -vel; akkor a (16) egyenletből $a = 0$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$(19) \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz & -cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz & 0 \\ -Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz & l^2 \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y''^2 dz + B_1^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz & 0 \\ 0 & 0 & B_2^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -C \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz & -\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y dz & 0 \\ l \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y'' dz & -B_1 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A (19) matrix-egyenletből c_2 és c_3 értékére a következőket kapjuk :

$$c_2 = \frac{\left(-Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{C} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz \right) \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y dz - \left(C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz \right) B_1 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz}{\left(C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz \right) \left(l^2 \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y''^2 dz + B_1^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz \right) - \left(-Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz \right)^2},$$

$$c_3 = -\frac{1}{B_2} \cdot \frac{\int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz}{\int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz}.$$

Mint hogy az $y = y(z)$ függvény — a fentiekben előírt differenciálhatósági és kerületi feltételektől eltekintve — tetszőszerinti függvény lehet, célszerű az $y = y(z)$ függvényt úgy megválasztani, hogy a $v = c_3 \cos \alpha \cdot y(z)$ képletből $\alpha = 0$ helyettesítéssel adódó $v = c_3 y(z)$ kifejezés éppen az oldalirányban ki nem görbült gerendának a $p(z)$ függőleges irányú terhelés hatására bekövetkező lehajlásával legyen egyenlő. Ez nyilván bekövetkezik, ha $y(z)$ -t úgy választjuk, hogy kielégítse az alábbi egyenletet :

$$(20) \quad y'' = \frac{g(z)}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz \cdot l^2}.$$

A (20) egyenletből $y(z)$ kétszeri integrálással és az $y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(+\frac{l}{2}\right) = 0$ kerületi feltételek figyelembevételével adódik. Bevezetve a

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = g(z); \quad G(-l/2) = G(+l/2) = 0$$

feltételeknek eleget tevő $G(z)$ függvényt, $y(z)$ a következőképpen írható :

$$y(z) = \frac{G(z)}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz \cdot l^2}.$$

Az $y(z)$ függvényt ily módon adva meg, a c_2 és c_3 állandókra a fentebbi képletekből a következő értékeket kapjuk:

$$c_2 = \frac{1}{B_1} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{C B_1} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \left(- \int_{-l/2}^{l/2} g^3 dz + \frac{B_1}{C} \cdot \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \right) - \int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz \left(\int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz + \frac{1}{C^2 l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G^2 dz \right)}{\left(\int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz + \frac{1}{l^2 C^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G^2 dz \right) \left(\frac{l^2}{B_1^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^4 dz + \int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz \right) - \left(- \frac{l}{B_1} \int_{-l/2}^{l/2} g^3 dz + \frac{1}{l C} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \right)^2} l^2 \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz$$

$$c_3 = - \frac{1}{B_2} l^2 \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz.$$

A c_2 és c_3 állandók ismeretében a h_{krit} értéke a (17) képletből meghatározható. A gyakorlat számára különös érdekességgel bír az az eset, amikor B_1 és C akkorák, hogy az $\frac{1}{B_1^2}$ és $\frac{1}{C^2}$, továbbá az $\frac{1}{B_1 C}$ mennyiségek az egységhez képest elhanyagolhatók; ebben az esetben a h_{krit} -ra a következő képletet kapjuk:

$$(21) \quad h_{krit} = \frac{1}{B_1} \left[1 - \frac{B_1}{B_2} \right] \frac{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) \cdot G(z) dz}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

Például $p = \text{állandó}$ esetén:

$$g(z) = \frac{p}{2} \left[z^2 - \frac{l^2}{4} \right]$$

$$G(z) = \frac{p}{384} [16z^4 - 24z^2 l^2 + 5l^4]$$

tehát a (21) képletből h_{krit} -ra adódó érték:¹⁴⁾

$$(22) \quad h_{krit} = \frac{1}{B_1} \left[1 - \frac{B_1}{B_2} \right] \frac{p l^4}{120}.$$

¹⁴⁾ Amennyiben a $\frac{B_1}{B_2}$ hányados az egységhez képest elhanyagolható, a (21) képletből adódó érték megegyezik a Csonka P. [3] dolgozatában a h_{krit} -ra levezetett értékkel.

IRODALOM

- [1] LOVASS-NAGY V.: »Két végén szabadon felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának vizsgálata.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 33—49.
- [2] S. TIMOSHENKO: *Théorie de la stabilité élastique*. Béranger, Paris et Liege, 1947.
- [3] CSONKA P.: »A végein felfüggesztett négyszög-keresztmetszetű rúd stabilitása.« *A Magyar Tudományos Akadémia VI. (Műszaki tudományok) Osztályának Közleményei* 9 (1953) 437—447.
- [4] M. LAGALLY: *Vektor-rechnung*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1928.
- [5] A. E. H. LOVE: *Lehrbuch der Elastizität*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1907.
- [6] H. GEIGER—K. SCHEEL: *Handbuch der Physik*. Springer, Berlin, 1928.
- [7] EGERVÁRY J.: »Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 3 (1953) 417—458.
- [8] R. A. FRAZER—W. J. DUNCAN—A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1938.
- [9] L. COLLATZ: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.
- [10] M. LOTKIN: »The treatment of boundary problems by matrix methods.« *The American Mathematical Monthly* 60 (1953) 11—19.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДВЕШЕННОЙ НА ДВУХ КОНЦАХ БАЛКИ

В. Ловаш-Надь

Резюме

Автор исследует устойчивость балки (обладающей двумя, взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии), подвешенной на двух концах над центром тяжести поперечного сечения, относительно бокового изгиба в том случае, когда точки подвеса лежат на одной из главных осей инерции крайнего сечения. При этом предполагается, что повороту крайних сечений сила реакции подвеса не препятствует в их собственной плоскости. В настоящей работе рассматривается вопрос об условиях существования устойчивого положения равновесия относительно бокового изгиба в том общем случае нагрузки, когда балка нагружается вертикально направленной силой, действующей вдоль весовой линии, образованной центрами тяжести поперечных сечений, и распределенной в соответствии с произвольной функцией.

Деформированный вид, принятый балкой под действием данной нагрузки, определяется в положении равновесия следующими данными:

α означает (конечный) угол поворота главных осей инерции двух крайних сечений балки, по сравнению с исходным положением.

β означает угол (малости первого порядка) на который главные оси инерции некоторого поперечного сечения поворачиваются в деформированном состоянии по сравнению с двумя крайними сечениями.

u и v означают взаимно перпендикулярные смещения (малости первого порядка) центра тяжести некоторого поперечного сечения деформированной балки по сравнению с положением занятым в балке, поворачивающейся на угол α , но не деформированной.

Если предполагать угол α известным, то неизвестные функции $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$ можно определить из уравнений (8) выражающих существование равновесия, и из краевых условий (9). Угол α определяется из условия, что в случае равновесия нет вращающего момента с осью вращения, проходящей через две точки подвеса. Функции $\beta(z)$, $u(z)$ и $v(z)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (8) и краевым условиям (9), получаются в общем в виде бесконечных степенных рядов. Приближенное решение данной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее данным краевым условиям, определяется автором при помощи метода, являющегося матричным обобщением метода Рэйли Рунца. В заключение определяется критическое

Значение (h_{krit}) высоты точек подвеса над центрами тяжести крайних сечений. Для высот подвеса

$$h \geq h_{krit}$$

балка не изгибается в боковом направлении в стабильном положении равновесия, между тем как для высот

$$h < h_{krit}$$

она в таком направлении изгибается.

INVESTIGATION, BY MEANS OF THE MATRIX CALCULUS, OF THE STABILITY OF A BEAM SUSPENDED AT TWO POINTS

V. LOVASS-NAGY

Summary

Developing his former investigations [see (1)], the author examines the stability against lateral buckling of a beam, having two perpendicular planes of symmetry and being suspended at two points above the centers of gravity of the end sections, the points of suspension being in one of the main inertia axes. The rotation of the two end sections in their planes is not hindered by forced effects caused by the suspension.

The author in his present paper endeavours to find the conditions of the existence of stable equilibrium against lateral buckling in the general case of a beam being loaded by a distributed vertical load (defined by an arbitrary function) acting along the line containing of the centers of gravity of the sections.

The deformation of the beam caused by the given load can be described by the following quantities:

the finite angle α by which the main inertia axes of the two end sections of the beam are rotated from their original position;

the (1-st order small) angle β by which the main inertia axes of any cross section of the beam are rotated in the deformed state relatively to the end section;

the displacements in two perpendicular directions u and v of the center of gravity of any cross section of the beam relatively to its position occupied in the beam rotated by an angle α but not yet deformed.

The unknown functions $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$, are determined by the equations (8) expressing the conditions of equilibrium and by the boundary conditions (9) if the angle α is given. The angle α is determined by the condition that in case of equilibrium the torque around the axis joining the two suspension points, must assume zero value.

The functions $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$, satisfying the differential equations (8) and the boundary conditions (9), can be generally obtained in form of an infinite power series. The approximate solution of the differential equations (8) satisfying the boundary conditions (9) is determined by the author by a generalisation of the *Rayleigh-Ritz* method on the basis of matrix calculus. Finally, the critical value of the suspension height is determined, at which buckling of the beam in its stable equilibrium does not occur. At a higher value of the suspension height no buckling of the beam in its stable equilibrium may take place, while at a smaller value lateral buckling of the beam is unavoidable.

CSATOLT REZGŐKÖRÖK MATEMATIKAI VIZSGÁLATA A MATRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

LOVASS-NAGY VIKTOR és GYÖRY TIBOR

Bevezetés

A matrix-, illetőleg tenzorszámításnak elektrotechnikai problémákra való alkalmazásával az utóbbi években több dolgozat ([1]—[4]) illetve kézikönyv ([5]—[8]) foglalkozott. Jelen dolgozat célja, hogy a matrixszámítás néhány újabb eredményének [9] felhasználásával keresse tetszésszerűtí számú induktív és kapacitív csatolt villamos rezgőkör matematikai leírására szolgáló lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldását.

Jelöljük valamely, n darab — induktív és kapacitív csatolt — rezgőkörből álló rendszer jellemző elektromos állandóit a következőképpen (mindegyik rezgőkört sorban-kapcsolt ohmikus ellenállásból, induktív tekercsből és kondenzátorból állónak tételezzük fel):

R_k ..a k -adik rezgőkör ohmikus ellenállása;

L_{kk} ..a k -adik rezgőkör tekercsének öninduktivitása;

L_{kl} ..a k -adik és l -edik rezgőkörök tekercsei közti kölcsönös induktivitás;

C_{kk} ..a k -adik rezgőkör kondenzátorának kapacitása;

C_{kl} ..a k -adik és l -edik rezgőkörök kondenzátorai közti kapacitás.

Jelöljük továbbá a k -adik rezgőkörben folyó áramerősséget i_k -val, a k -adik rezgőkör (az ellenállásokkal sorbankapcsolt) elektromotoros erejét pedig u_k -val. Az n darab rezgőkörből álló rendszer matrix-alakban felírt differenciálegyenletében szereplő matrixok a következők:

a) Oszlop-matrixok:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_k(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}; & \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}; & \mathbf{i}_0 &= \begin{bmatrix} i_1(0) \\ \vdots \\ i_k(0) \\ \vdots \\ i_n(0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} u_1(0) \\ \vdots \\ u_k(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix}; & \mathbf{i}'_0 &= \begin{bmatrix} i'_1(0) \\ \vdots \\ i'_k(0) \\ \vdots \\ i'_n(0) \end{bmatrix}; & \mathbf{u}'_0 &= \begin{bmatrix} u'_1(0) \\ \vdots \\ u'_k(0) \\ \vdots \\ u'_n(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) *Kvadratikus matrixok:*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix} = \langle R_1 R_2 \dots R_n \rangle \text{ (diagonál-matrix);}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & \frac{1}{C_{12}} & \frac{1}{C_{1n}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \frac{1}{C_{22}} & \frac{1}{C_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{C_{n1}} & \frac{1}{C_{n2}} & \frac{1}{C_{nn}} \end{bmatrix}$$

Kirchoff második törvényét ([5] p. 140) a k -adik rezgőkörre alkalmazva az alábbi összefüggést nyerjük:

$$(1) \quad R_k i_k + \sum_{v=1}^n L_{kv} \frac{d}{dt} i_v + \sum_{v=1}^n \frac{1}{C_{kv}} \int_0^t i_v dt = u_k.$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát t szerint differenciálva, a következő egyenletet kapjuk:

$$(2) \quad \sum_{v=1}^n L_{kv} \frac{d^2}{dt^2} i_v + R_k \frac{d}{dt} i_k + \sum_{v=1}^n \frac{1}{C_{kv}} i_v = \frac{d}{dt} u_k.$$

Az (1), illetőleg a (2) egyenleteket valamennyi rezgőkörre képezve, egy-egy állandó-együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amelyek mindegyike n darab egyenletből áll és amelyek a fenti jelölések felhasználásával a következő matrix-egyenletekké foglalhatók össze:

$$(3) \quad \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{i} dt = \mathbf{u},$$

illetve

$$(4) \quad \mathbf{L} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{i} + \mathbf{R} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{i} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}.$$

Feladatunk a (4) inhomogén egyenlet általános megoldásának, illetve az $i(0) = i_0$ és az $i'(0) = i'_0$ kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldásának meghatározása.¹⁾ Az általános megoldás nyilván $i = i_h + i_i$ alakú, ahol i_i a (4) inhomogén egyenlet tetszőszerinti partikuláris megoldása, i_h pedig a (4) inhomogén egyenlethez tartozó

$$(5) \quad L \frac{d^2}{dt^2} i + R \frac{d}{dt} i + K i = 0$$

homogén egyenlet általános megoldását jelenti. Amennyiben az inhomogén egyenlet valamely i_i partikuláris megoldása már ismeretes, az $i(0) = i_0$ és $i'(0) = i'_0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást nyilván úgy nyerjük, hogy i_i -hez hozzáadjuk az (5) egyenletnek (az i_i általános megoldásból nyerhető) azon partikuláris megoldását, mely kielégíti a

$$(6) \quad \begin{aligned} i_h(0) &= i_0 - i_i(0) = i_{h0} \\ i'_h(0) &= i'_0 - i'_i(0) = i'_{h0} \end{aligned}$$

kezdeti feltételeket.

1. §. A homogén matrix-differenciálegyenlet megoldása

Keressük az (5) egyenletnek $i_h = e^{At}y(t)$ alakú megoldását,²⁾ ahol A a differenciálegyenlet együttható-matrixaival megegyező rendszámú, egyébként tetszőszerinti előírható kvadratikus matrix, $y(t)$ pedig a későbbiek során meghatározandó oszlop-matrix. A feltételezett $i_h = e^{At}y(t)$ megoldást az (5) egyenletbe helyettesítve, azt nyerjük, hogy

$$(7) \quad L e^{At} y'' + (2LA + R) e^{At} y' + (LA^2 + RA + K) e^{At} y = 0.$$

Az A matrix értékét mármost célszerű oly módon előírni, hogy a (7) egyenletből az y' -t tartalmazó tag eltűnjön. Ez nyilván akkor következik be, ha

$$A = -\frac{1}{2} L^{-1} R.$$

Ez esetben a (7) egyenletből azt nyerjük, hogy

$$(8) \quad L e^{-\frac{1}{2} L^{-1} R} y'' + \left(K - \frac{1}{4} R L^{-1} R \right) e^{-\frac{1}{2} L^{-1} R} y = 0.$$

¹⁾ Amennyiben a (3) egyenletet tekintjük az elektrotechnikai folyamat alap-egyenletének, i'_0 értéke nem írható elő tetszés szerinti módon, hanem — az egyenletben szereplő integrál alsó határának zérus voltából következőleg — az i'_0 és i_0 közt az alábbi összefüggés áll fenn:

$$L i'_0 + R i_0 = u_0.$$

²⁾ Amint a későbbiek során kitűnik, ez a szorzat-alakú megoldás azért bizonyul célszerűnek, mert segítségével az (5) egyenletből az első derivált kiküszöbölhető.

vagy — a (8) egyenlet mindkét oldalát balról megszorozva az

$$\left(\mathbf{L} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \right)^{-1} = e^{\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \mathbf{L}^{-1}$$

kifejezéssel, kapjuk :

$$(9) \quad \mathbf{y}'' + e^{\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \left(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} - \frac{1}{4} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \right) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \mathbf{y} = 0.$$

Mint hogy az $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}$ kifejezés az $e^{\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t}$ matrix-függvény hatványsorának bármelyik tagjával felcserélhető, a (9) egyenlet végül a következőképpen írható :

$$(10) \quad \mathbf{y}'' + \left(e^{\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} - \frac{1}{4} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \right) \mathbf{y} = 0.$$

A (10) egyenlet tetszőszerinti \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} együttható-matrixok esetén érvényes ; az egyenlet megoldásának a lentebbiek során levezetendő egyszerű alakjához azonban csak akkor juthatunk, ha az $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$ kifejezés az $e^{\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t}$ hatványsorának bármelyik tagjával felcserélhető, azaz, ha az $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$ és $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}$ kifejezések felcserélhetősége fennáll. Ez nyilván bekövetkezik az alábbi esetekben :

- a) \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} páronként felcserélhető, pl. *ciklikusak* ;
- b) \mathbf{K} és \mathbf{R} egyidejűleg egység-matrixok, illetve az egység-matrix skalár többszöröse (ez esetben \mathbf{L} tetszőszerinti lehet) ;
- c) $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}$ egység-matrix, illetőleg annak skalár többszöröse (\mathbf{K} tetszőszerinti) ;
- d) $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$ egység-matrix, illetve annak skalár többszöröse (\mathbf{R} tetszőszerinti) ;

Amennyiben az $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$ és $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}$ kifejezések felcserélhetőek, a (10) egyenlet a következőképpen egyszerűsödik :

$$(11) \quad \mathbf{y}'' + \left(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} - \frac{1}{4} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \right) \mathbf{y} = 0.$$

A (11) egyenlethez tartozó kezdeti feltételek nyilván

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{y}(0) = \mathbf{i}_{h_0} = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}'(0) = \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_{h_0} + \mathbf{i}'_{h_0} = \mathbf{y}'_0 \end{cases}$$

alakúak ; a (11) differenciálegyenletnek a (12) kezdeti feltételeket kielégítő megoldása a következőképpen írható:³⁾

$$(13) \quad \mathbf{y} = \left(\cos \mathbf{M}^{1/2} t \right) \mathbf{y}_0 + \frac{\sin \mathbf{M}^{1/2} t}{\mathbf{M}^{1/2}} \mathbf{y}'_0 ; \quad \mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}).$$

³⁾ Lásd *Egerváry J.* [9] munkáját.

Tehát az (5) differenciálegyenletnek a (6) kezdeti feltételeket kielégítő megoldása :

$$(14) \quad \mathbf{i}_h(t) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} \left\{ \cos \mathbf{M}^{1/2}t (\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_i(0)) + \right. \\ \left. + \frac{\sin \mathbf{M}^{1/2}t}{\mathbf{M}^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} (\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_i(0)) + \mathbf{i}'_0 - \mathbf{i}'_i(0) \right] \right\}.$$

Abban az esetben, ha az \mathbf{L} , \mathbf{R} és \mathbf{K} matrixok mind ciklikusak, az

$$\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_i(0) = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} (\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_i(0)) + \mathbf{i}'_0 - \mathbf{i}'_i(0) = \mathbf{y}'_0 = \begin{bmatrix} y'_{01} \\ y'_{02} \\ \vdots \\ y'_{0n} \end{bmatrix}$$

rövid jelölések felhasználásával a homogén egyenletnek a (6) kezdeti feltételeket kielégítő megoldása a következőképpen írható :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{i}_h(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2}\lambda_k t} \left\{ \cos \sqrt{\mu_k} t \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \cdots \bar{\omega}_k^{n-1}] \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \sqrt{\mu_k} t}{\sqrt{\mu_k}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \cdots \bar{\omega}_k^{n-1}] \begin{bmatrix} y'_{01} \\ y'_{02} \\ \vdots \\ y'_{0n} \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2}\lambda_k t} \left\{ \sum_{l=1}^n \bar{\omega}_k^{l-1} y_{0l} \cos \sqrt{\mu_k} t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^n \bar{\omega}_k^{l-1} y'_{0l} \frac{\sin \sqrt{\mu_k} t}{\sqrt{\mu_k}} \right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

Itt λ_k az $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ matrix, μ_k az \mathbf{M} matrix sajátértékeit, ω_k pedig az n -edik egységgyökök közül a k -adikát jelenti.

2. §. Az inhomogén matrix-differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározása

Az alábbiakban keressük a (4) matrix-differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását abban az — elektrotechnikai szempontból legérdekesebb — esetben, midőn $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ alakú ($j = \sqrt{-1}$).⁴⁾ Ez esetben tehát a megoldandó (4) egyenlet a következő alakot ölti:

$$(16) \quad \mathbf{L} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{i} + \mathbf{R} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{i} = j \omega e^{j\omega t} \mathbf{u}_0.$$

Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$\mathbf{i}_i = \mathbf{i}_{i0} e^{j\omega t}$$

alakban. Ez esetben, a feltételezett megoldást a (16) egyenletbe helyettesítve nyerjük, hogy

$$(17) \quad -\omega^2 e^{j\omega t} \mathbf{L} \mathbf{i}_{i0} + j \omega e^{j\omega t} \mathbf{R} \mathbf{i}_{i0} + e^{j\omega t} \mathbf{K} \mathbf{i}_{i0} = j \omega e^{j\omega t} \mathbf{u}_0,$$

azaz

$$(18) \quad \left(\mathbf{R} + j \omega \mathbf{L} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{K} \right) \mathbf{i}_{i0} = \mathbf{u}_0.$$

Bevezetve a

$$(19) \quad \mathbf{Z} = \mathbf{R} + j \omega \mathbf{L} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{K}$$

komplex ellenállás-matrixot, \mathbf{i}_{i0} -ra végülis a következő képletet kapjuk:

$$(20) \quad \mathbf{i}_{i0} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0.$$

(Ez a képlet tetszésszerinti \mathbf{L} , \mathbf{R} és \mathbf{K} együttható-matrixok esetén mindig érvényes, tekintet nélkül az együttható-matrixok páronkénti felcserélhetőségére.)

Abban az esetben, ha \mathbf{L} , \mathbf{R} és \mathbf{K} mind ciklikusak, és ϱ_k -val jelöljük a \mathbf{Z} matrix sajátértékeit, a (20) egyenletből a következő összefüggést nyerjük:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{i}_{i0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varrho_k} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{0n} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\varrho_k} \bar{\omega}_k^{l-1} u_{0l} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

⁴⁾ Aszerint, hogy az $e^{j\omega t}$ -t *cosinus*- vagy *sinus*-függvény használata helyett vezetjük itt be, a későbbiek során levezetendő komplex megoldásoknak *valós* vagy *képzetes* része használható fel.

3. §. Az inhomogén egyenletet és a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás meghatározása

A (16) inhomogén matrix-differenciálegyenlet általános megoldása nyilván az (5) homogén egyenlet általános megoldásának és a (16) egyenlet tetszőszerinti partikuláris megoldásának szuperpozíciójával nyerhető, tehát a (16) egyenletet és az $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$; $\mathbf{i}'(0) = \mathbf{i}'_0$ kezdeti feltételeket egyidejűleg kielégítő partikuláris megoldás a (14) és (20) képletek figyelembevételével a következő:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{i}(t) = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} & \left\{ (\cos \mathbf{M}^{1/2} t) (\mathbf{i}_0 - \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \mathbf{M}^{1/2} t}{\mathbf{M}^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{i}_0 - \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0) + \mathbf{i}'_0 - j \omega \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0 \right] \right\} + e^{j \omega t} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \right.$$

Jelöljük φ_k -val \mathbf{L} sajátértékeit, ψ_k -val \mathbf{K} sajátértékeit. Amennyiben a \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} matrixok mind ciklikusak, a sajátértékek az alábbi egyszerű összefüggésekből nyerhetők:

Legyen

$$\mathbf{R} = (r, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{L} = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$$

$$\mathbf{K} = \left(\frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_{n-1}} \right),$$

akkor a ciklikus matrixok ismert tulajdonsága alapján:

$$\varphi_k = l_0 + l_1 \omega_k + \dots + l_{n-1} \omega_k^{n-1},$$

$$\psi_k = \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} \omega_k + \dots + \frac{1}{c_{n-1}} \omega_k^{n-1};$$

továbbá

$$\lambda_k = \frac{r}{\varphi_k}$$

$$\mu_k = \frac{\psi_k}{\varphi_k} - \frac{r^2}{\varphi_k^2}$$

$$\varrho_k = r + j \left(\omega \varphi_k - \frac{1}{\omega} \psi_k \right).$$

Példaképpen vizsgáljuk azt a három induktív és kapacitív csatolt rezgőkörből álló rendszert, amelynek együtttható-matrixai a következők:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_0 & l & l \\ l & l_0 & l \\ l & l & l_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c_0} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c_0} \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben — a harmadik egység-gyökök szokásos jelölésével — írhatjuk:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon, & \omega_2 &= \bar{\varepsilon}, & \omega_3 &= 1, \\ \bar{\omega}_1 &= \bar{\varepsilon}, & \bar{\omega}_2 &= \varepsilon, & \bar{\omega}_3 &= 1. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= l_0 + l\varepsilon + l\varepsilon^2 = \left. \begin{aligned} \varphi_1 &= l_0 + l\varepsilon + l\varepsilon^2 \\ \varphi_2 &= l_0 + l\bar{\varepsilon} + l\bar{\varepsilon}^2 \end{aligned} \right\} l_0 + l(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = l_0 - l, \\ \varphi_2 &= l_0 + l\bar{\varepsilon} + l\bar{\varepsilon}^2 = \\ \varphi_3 &= l_0 + l + l = l_0 + 2l, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c}\varepsilon + \varepsilon^2 = \left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c}\varepsilon + \varepsilon^2 \\ \psi_2 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c}\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2 \end{aligned} \right\} \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c}(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{c_0} - \frac{1}{c}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c}\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2 = \\ \psi_3 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c}; \end{aligned}$$

tehát

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{r}{l_0 - l}$$

$$\lambda_3 = \frac{r}{l_0 + 2l}$$

és

$$\mu_1 = \mu_2 = \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0 - l} - \frac{r^2}{(l_0 - l)^2}$$

$$\mu_3 = \left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \frac{1}{l_0 + 2l} - \frac{r^2}{(l_0 + 2l)^2}$$

végül

$$\varrho_1 = \varrho_2 = r + j \left[\omega(l_0 - l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \right]$$

$$\varrho_3 = r + j \left[\omega(l_0 + 2l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \right].$$

Abban az esetben, ha $\mathbf{i}_0 = 0$ és $\mathbf{i}'_0 = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_0$, a (22) képletből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{i} = \left\{ -e^{-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} t} \left[\cos \mathbf{M}^{1/2} t + \frac{\sin \mathbf{M}^{1/2} t}{\mathbf{M}^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z} - j\omega \mathbf{E} \right) \right] + e^{j\omega t} \mathbf{E} \right\} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{u}_0.$$

Tegyük fel, hogy \mathbf{L} , \mathbf{R} és \mathbf{K} mind ciklikusak, akkor a (15) és (20) képleteket is figyelembevételre nyerjük:⁵⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{i} = & \frac{1}{3} \left\{ -e^{-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0-l} t} \left[\cos \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0-l} - \frac{r^2}{(l_0-l)^2}} t + \right. \right. \\ & + \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0-l} - \frac{r^2}{(l_0-l)^2}} t}{\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0-l} - \frac{r^2}{(l_0-l)^2}}} \times \\ & \times \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0-l} + \frac{r + j \left[\omega (l_0-l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \right]}{l_0-l} - j\omega \right) \Bigg] + \\ & + e^{j\omega t} \left\{ \frac{1}{r + j \left[\omega (l_0-l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \right]} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}_0 + \right. \\ & + \frac{1}{3} \left\{ -e^{-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0+2l} t} \left[\cos \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \frac{1}{l_0+2l} - \frac{r^2}{(l_0+2l)^2}} t + \right. \right. \\ & + \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \frac{1}{l_0+2l} - \frac{r^2}{(l_0+2l)^2}} t}{\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \frac{1}{l_0+2l} - \frac{r^2}{(l_0+2l)^2}}} \times \\ & \times \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0+2l} + \frac{r + j \left[\omega (l_0+2l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \right]}{l_0+2l} - j\omega \right) \Bigg] + \end{aligned}$$

⁵⁾ Ugyanis — a harmadik egység-gyökök közismert tulajdonsága alapján —

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$+ e^{j\omega t} \left\{ \frac{1}{r + j \left[\omega (l_0 + 2l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right) \right]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u \right\}.$$

Abban az esetben, ha rezgőkörökre kapcsolt periodikus feszültségek egymáshoz képest mért fázis-eltolása éppen $\frac{2\pi}{3}$, a harmadik egység-gyökök ismert tulajdonságainak ⁶⁾ felhasználásával írhatjuk, hogy

$$u_0 = U_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Tehát ez esetben ^{7) 8)}:

$$\begin{aligned} i = & \frac{U_0}{r + j \left[\omega (l_0 - l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \right]} \left\{ e^{j\omega t} - e^{-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0 - l} t} \times \right. \\ & \times \left[\cos \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0 - l} - \frac{r^2}{(l_0 - l)^2}} t + \right. \\ & + \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0 - l} - \frac{r^2}{(l_0 - l)^2}} t}{\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{l_0 - l} - \frac{r^2}{(l_0 - l)^2}}} \times \\ & \left. \left. \times \left(-\frac{1}{2} \frac{r}{l_0 - l} + \frac{r + j \left[\omega (l_0 - l) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c} \right) \right]}{l_0 - l} - j\omega \right) \right] \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⁶⁾ Lásd például: [11], p. 14.

⁷⁾ Ugyanis

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} \\ 1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} \\ 1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = 0.$$

⁸⁾ A levezetett összefüggés természetesen magában foglalja az egyetlen rezgő körben lejátszódó tranzien-folyamatot leíró képletet is. Vesd össze például: [12], p. 46

Megjegyzés

A műszaki alkalmazások szempontjából igen jelentős az a speciális eset, midőn valamennyi rezgőkör csupán ohmikus ellenállást és induktív tekercset tartalmaz, tehát $\mathbf{K} = 0$; ez esetben a (3) egyenlet a következő alakot ölti:

$$(23) \quad \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u}.$$

A (23) matrix-differenciálegyenletnek valamely $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása nyilván $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$ alakban állítható elő, ahol

\mathbf{i}_1 jelenti az $\mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_1 + \mathbf{R} \mathbf{i}_1 = \mathbf{u}$ differenciál-egyenletnek az $\mathbf{i}_1(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását; továbbá

\mathbf{i}_2 jelenti az $\mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_2 + \mathbf{R} \mathbf{i}_2 = 0$ differenciál-egyenletnek az $\mathbf{i}_2(0) = \mathbf{i}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. *Egerváry J.* [9] dolgozata alapján:

$$\mathbf{i}_1 = \int_0^t e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(t-\tau)} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{i}_2 = e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}t} \mathbf{i}_0.$$

Tehát

$$\mathbf{i} = e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}t} \mathbf{i}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(t-\tau)} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Abban az esetben, ha $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ alakú, az integrálás elvégzése után azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{i} = e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}t} \mathbf{i}_0 + (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})^{-1} (e^{j\omega t} \mathbf{u}_0 - e^{-\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}t} \mathbf{u}_0).$$

Abban az esetben, ha az \mathbf{L} és \mathbf{R} együttható-matrixok ciklikusak, azaz $\mathbf{L} = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ és $\mathbf{R} = (r, 0, \dots, 0)$, a fentebb nyert összefüggés a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ e^{-\frac{r}{\varphi_k} t} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \\ \vdots \\ i_{0n} \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ \left. (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\varphi_k} t}) \frac{1}{r + j\omega\varphi_k} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{0n} \end{bmatrix} \right\} = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ e^{-\frac{r}{\varphi_k} t} \bar{\omega}_k^{m-1} i_{0m} + \right. \\
 &+ \left. (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\varphi_k} t}) \frac{1}{r + j\omega\varphi_k} \bar{\omega}_k^{m-1} u_{0m} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

ahol φ_k az \mathbf{L} ciklikus matrix sajátértékeit jelenti, tehát

$$\varphi_k = l_0 + l_1 \omega_k + \dots + l_{n-1} \omega_k^{n-1}.$$

Példaképpen vizsgáljuk azt a három induktíve csatolt rezgőkörből álló rendszert, melynek együttható-matrixai a következők:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_0 & l & l \\ l & l_0 & l \\ l & l & l_0 \end{bmatrix}.$$

Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= l_0 + l\varepsilon + l\varepsilon^2 = \\
 \varphi_2 &= l_0 + l\varepsilon + l\varepsilon^2 = \\
 \varphi_3 &= l_0 + l + l = l_0 + 2l.
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{aligned}} \right\} l_0 + l(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = l_0 - l,$$

tehát⁹⁾

$$\begin{aligned}
 i = & \frac{1}{3} \left\{ e^{-\frac{r}{l_0-l}t} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{01} \\ i_{02} \\ i_{03} \end{vmatrix} + \right. \\
 & + \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l_0-l}t} \right) \frac{r}{r + j\omega(l_0-l)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{vmatrix} + \\
 & + e^{-\frac{r}{l_0+2l}t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{01} \\ i_{02} \\ i_{03} \end{vmatrix} + \\
 & + \left. \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l_0+2l}t} \right) \frac{1}{r + j\omega(l_0+2l)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{vmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Abban az esetben, ha a rezgőkörökre kapcsolt periodikus feszültségek egymáshoz képest mért fáziseltolása éppen $\frac{2\pi}{3}$, a harmadik egység-gyökök ismert tulajdonságainak felhasználásával a fentiekhez hasonlóan írhatjuk, hogy:

$$u_0 = U_0 \begin{vmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

Ebben az esetben például az $i_0 = 0$ kezdeti feltétel esetén

$$i = \frac{U_0}{r + j\omega(l_0-l)} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l_0-l}t} \right) \begin{vmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

IRODALOM

- [1] S. O. RICE: »Steady state solutions of transmission line equations.« *The Bell System Technical Journal* 20 (1941) 131—178
- [2] D. W. C. SHEN: »Generalized coordinates in substitutive networks.« *Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics* 39 (1948) 890—901.
- [3] H. J. VON BAEYER—R. KNECHTLI: »Über die Behandlung von Mehrleitersystemen mit transversal elektromagnetischen Wellen bei hohen Frequenzen.« *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 3 (1952)
- [4] LOVASS-NAGY V.: »Párhuzamos vezetékekből álló rendszer elektromos tulajdonságainak leírására szolgáló parciális differenciálegyenletrendszer megoldása a matrix számítás segítségével.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 437—466.

⁹⁾ Az alábbi képlet magában foglalja a G. Kron [6] munkájában (65. old.) a három-fázisú villamos gépek állórészének, illetőleg a D. W. C. Shen [2] dolgozatában a három-fázisú hálózatoknak »ellenállás-matrixá«-ra levezetett eredményeket.

[5] R. A. FRAZER—W. J. DUNCAN—A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1938.

[6] G. KRON: *A short course in tensor analysis for electrical engineers*. Wiley, New-York, 1942.

[7] W. SCHMEIDLER: *Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik*. Akademie Verlag, Berlin, 1949.

[8] Ф. Я. ГАНТМАХЕР: *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953.

[9] EGERVÁRY J.: »Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.« *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 3 (1953) 417—458.

[10] A. SOMMERFELD: *Elektrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.

[11] R. V. CHURCHILL: *Introduction to complex variables and applications*. McGraw-Hill, London, 1948.

[12] M. I. KONTOROVICS: *Operátorszámítás és nemstacionárius jelenségek elektrotechnikai alkalmazásai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В. Ловаш-Надь и Т. Дьёри

Резюме

Целью настоящей работы является установить при помощи некоторых новых результатов теории матриц решение системы линейных дифференциальных уравнений, дающей математическое описание системы, состоящей из произвольного числа колебательных контуров, связанных индуктивной и емкостной связью.

Для описания системы, состоящей из n колебательных контуров, связанных индуктивно и емкостно, имеем следующее матричное дифференциальное уравнение

$$(*) \quad \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{K} \int \mathbf{i} dt = \mathbf{u} \quad \text{или} \quad \mathbf{L} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{i} + \mathbf{R} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{i} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}.$$

Здесь i_k означает силу тока в k -ом контуре, u_k — электродвижущую силу (включенную последовательно со сопротивлениями) k -го контура. Далее: R_k есть омическое сопротивление k -го контура; L_{kk} — самоиндуктивность катушки k -го контура, L_{kl} взаимная индуктивность между катушками k -го и l -го контуров; C_{kk} — ёмкость конденсатора k -го контура; C_{kl} — взаимная ёмкость конденсаторов k и l контуров.

В работе показывается, что если матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ перестановочны и электродвижущие силы всех контуров периодические функции времени, то есть записываются в виде $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$, то решение дифференциального уравнения

$$\mathbf{L} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{i} + \mathbf{R} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{i} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$$

удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}'(0) = \mathbf{i}'_0$ дается формулой (22). В частном случае, когда матрицы \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} циклические, формула (22) значительно упрощается, например, в случае трех контуров она переходит в формулу.

В примечании к работе автор дает решение матричного дифференциального уравнения.

$$\mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u}$$

(полученного из уравнения (*) для $\mathbf{K}=0$) удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ (14); рассматривается также вытекающий из более общего решения частный случай, имеющий место при $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$ и при циклических \mathbf{L} и \mathbf{R} .

MATHEMATICAL INVESTIGATION OF COUPLED CIRCUITS BY MEANS OF THE MATRIX CALCULUS

V. LOVASS-NAGY and T. GYÖRY

Summary

The authors in their present paper investigate the solution of the system of linear differential equations serving the mathematical description of electrical circuits (coupled by means of inductive and capacitive coupling) by application of some recent results of the matrix calculus.

A system of n circuits coupled to one another with inductive and capacitive coupling is described by the matrix differential equation (3) resp. (4). The definition of the square matrices \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} and column matrices \mathbf{i} and \mathbf{u} is to be found on pp. 65—66. Here i_k denotes the intensity of current of the k -th circuit, u_k denotes the electromotive force connected in series with the ohmic, inductive and capacitive resistance of the k -th circuit. Further R_k denotes the ohmic resistance of the k -th circuit; L_{kk} the self-inductance of the k -th circuit; L_{kl} the mutual inductance between the k -th and l -th circuit; C_{kk} the self-capacitance of the k -th circuit; C_{kl} the mutual capacitance between the k -th and the l -th circuit.

It is shown in the paper that if the matrices $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$ and $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ are commutable and the electromotive force of any circuit is a periodic function of the time (i. e. $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$) the solution of the differential equation (4) satisfying the initial conditions $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ and $\mathbf{i}'(0) = \mathbf{i}'_0$, is given by the formula (22). In the special case when the matrices \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{K} are cyclic, the formula (22) can be considerably simplified; e. g. in the case of a system of three circuits it can be transformed into (24).

In the appendix of the paper the authors present the solution of the differential equation (4) — which can be regarded as a special case ($\mathbf{K} = 0$) of equation (3) — satisfying the initial condition $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$.

A KÉMIAI FRAKCIONÁLÓ MEGOSZTÁS MATEMATIKAI TÁRGYALÁSA NEM-TELJES DIFFÚZIÓ ESETÉBEN

MEDGYESSY PÁL, RÉNYI ALFRÉD, TETTAMANTI KÁROLY
és VINCZE ISTVÁN

Bevezetés

Az utolsó két évtized során a vegyipari kutatásban kialakult egy igen ötletes módszer annak megállapítására, hogy valamely anyag egyszerű vegyület-e vagy ilyenek keveréke. Ezzel az eljárással ma már nemcsak analitikai, hanem preparatív méretekben is számos szilárd anyagkeverék izolálását sikerült megoldani. Ez a módszer a *frakcionáló megosztás* művelete (*counter-current distribution, fraktioniertes Verteilen*), amelynél lényeges szerepet játszik a binomiális eloszlás, valamint ennek keverékei. E módszerre vonatkozólag először Jantzen-nél [1] olvashatunk, majd továbbfejlesztését és újabb alkalmazását Stene [2] és Craig [3], [4] munkáiban találhatjuk meg; ma már a módszer a vegyipari kutatás mindennapi gyakorlatában alkalmazásra kerül.

Az eljárás, amelyet alább az 1. §-ban tárgyalunk, azon a kémiai jelenségen alapszik, hogyha valamely **C** szilárd anyagot¹⁾ az egymással érintkező, de nem elegyedő **A** és **B** folyadékok egyikébe beviszünk (feloldunk), akkor a diffúzió lefolyása, illetve az egyensúly beállta után a **C** anyag mennyisége az **A** és **B** folyadékok között meghatározott arányban oszlik meg, amely arány e három anyagra együttesen jellemző és természetesen függ az **A** és **B** oldószerek mennyiségének arányától is. Mármost a »frakcionáló megosztás« e műveletnek bizonyos szabályok szerinti egymásután való többszöri alkalmazásából áll a következőképpen: 0-tól n -ig számozott $n + 1$ számú edényben (»cső« vagy »cella«) előre elhelyezzük az egyik (pl. az **A**) oldószert egymás között egyenlő mennyiségeit. A 0-adik csőbe ezen kívül bevisszük a másik oldószernak B adagját és a két — **A** és **B** — fázis közt megoszló **C** szilárd anyagot (illetve a C_1, C_2, \dots anyagok keverékét). A 0-adik csőből az egyensúly beállta után (amit keveréssel, rázással érünk el) a fázisokat szétválasztva, az egyik fázist (pl. a **B** »mobilfázist«) a már benne megoszlott anyaghányaddal együtt egy csővel tovább »vándoroltatjuk« az 1-ső csőbe, míg helyébe friss, vagyis **C**-től mentes **B** oldószert pótolunk a 0-adik csőbe. A most már két csőben beállított új egyensúlyi helyzet után a mobil fázisok »vándoroltatását«, illetve a 0-adik csőbe friss **B** oldószert pótlását és az egyes csövek két fázisa közt az ismételt egyensúly beállítását addig foly-

¹⁾ A **C** anyag elvileg lehet folyékony vagy gáz-halmazállapotú is.

tatjuk, míg a mobil fázis eléri az n -edik csövet, azaz minden csőben van **A** és **B** fázis a bennük megoszlott **C** anyag megfelelő mennyiségével.

A **C** anyagnak az egyes csövekben való eloszlását a binomiális eloszlás írja le (lásd: *Stene* [2]). Ha a **B** anyag a C_1, C_2, \dots vegyületek keveréke, akkor a létrejövő eloszlás binomiális eloszlások keveréke.²⁾

Mint hogy a **C** anyagnak az $n + 1$ számú csőben való eloszlását ily módon ismerjük, a **C** anyag egyneműségének feltételezése alapján a maximum hely

segítségével az $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) binomiális eloszlás p para-

méterét kiszámíthatjuk. Ebből és n -ből megkonstruálva az elméleti értéket, ezeket a tapasztalati adatokkal összevethetjük. Ha az egyezés jó, a **C** anyagra vonatkozó feltételezés helyes volt. Ha az eloszlás már maga sem egy, hanem két vagy több maximummal bír, akkor a **C** anyag nyilván keverék, mert a maximum helye a megoszlási hányadostól függ, amely anyagonként különböző; ugyanez a helyzet, ha ugyan egy maximum van, de a binomiális eloszlástól elütő, ellapultabb eloszlást kapunk. Élesen különváló maximumok esetén azonnal következtetni lehet az összetevők bizonyos állandóira, de a felbontás más esetben is elvégezhető.

Stene megjegyzi, hogy a jelenség létrejöttét sztochasztikusan úgy foghatjuk fel, hogy feltételezzük, hogy minden molekula meghatározott valószínűséggel kerül át az **A** és **B** fázisok egyikéből a másikba, és ily módon a binomiális eloszlás létrejöttének is valószínűség-számítási hátteret tulajdoníthatunk.

Már *Craig* és munkatársai (lásd: [5], [6]) egyes esetekben lényeges különbséget észleltek elméleti és tapasztalati eloszlás között olyan esetben is, amikor **C**, a megosztandó vegyület nem keverék, hanem egységes anyag volt. Hasonló jelenséget észlelt nálunk *Uskert Andor* is.³⁾ *Egyes, igazoltan tiszta anyagok esetében is a keverékre jellemző — a binomiális eloszláshoz képest — ellapult eloszlás jött létre.* Az ok nyilvánvaló volt: az említett jelenségnél, illetve kísérletnél a diffúzió, illetve a megoszlás gyakorlatilag nem ment 100%-ig végbe, mivel meghatározott időtartam után, de az egyensúly beálltához szükséges idő előtt a két folyadék érintkezését megszüntették. Ekkor az eredetileg az egyik folyadékba helyezett **C** anyag mennyiségének a második folyadékba átdiffundáló része csupán — a diffúzió időtartama által — meghatározott hányada volt annak a mennyiségnek, mely akkor került volna át, ha a diffúzió teljes lefolyását nem akadályozzák meg.

A valóságban a diffúzió véges idő alatt mindig csupán meghatározott százalékban megy végbe, de az az időtől függően gyakorlatilag a 100%-hoz tetszőlegesen közel hozható. Sokszor azonban jelentős időmegtakarítást nyújt a diffúziós folyamat meghatározott megrövidítése, ugyanakkor viszont a fentemlített eljárásnál nem a binomiális eloszlás jön létre. Az ilyen nem-teljes kiegyenlítődéssel dolgozó gyors műveletnél a gyakorlatban kapott eloszlás görbéje az elméleti eloszláshoz képest laposabb. Ahhoz, hogy az ilyen módon megváltoztatott eljárás alapján is le tudjuk vonni a szükséges következtetéseket, ismernünk kell ennek az új eloszlásnak bizonyos tulajdonságait.

Az alábbiakban az eredeti eljárás ismertetése után (1. és 2. §) ezt az új eloszlást és néhány tulajdonságát vizsgáljuk.

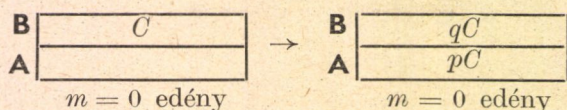
²⁾ Valószínűség-eloszlások keverésére vonatkozólag lásd [8] p. 129.

³⁾ Eredményeit még nem publikálta.

1. §. Az eredeti (binomiális eloszlást létrehozó) eljárás

Vizsgáljuk az *egységes C* vegyület esetét. Helyezzük el az **A** és **B** oldószereket valamely edényben ; felül helyezkedjék el a **B** oldószer, s vigyük most a **C** anyagot **B**-be ; a diffúzió lefolyása után a **C** anyag $p : q$ arányban oszlik meg **A**-ban illetőleg **B**-ben (legyen $p + q = 1$). Jelölje *A* illetőleg *B* az **A** illetve **B** oldószer *grammban* vagy cm^3 -ben kifejezett mennyiségét, *C* pedig a bevitt **C** szilárd anyag *grammban* kifejezett mennyiségét.

$r = 0$ (kezdeti állapot, »nulladik« lépés)



A p és q mennyiségeket *részesülő hányadok-nak* (*partition fraction*) nevezzük és fizikai értelmük a következő : a **C** anyagnak két oldószer közötti megoszlását egy konstans — a megoszlási hányados — határozza meg.

A megoszlási hányados (*Verteilungskoeffizient, distribution coefficient*),

$$k = \frac{y}{x},$$

ahol x a **C** anyag koncentrációja **A**-ban : $x = \frac{X}{A}$, y a **C** anyag koncentrációja **B**-ben ;

$y = \frac{Y}{B}$, X illetve Y a **C** anyagnak *grammban* kifejezett abszolút mennyisége az **A** illetve **B** oldószerben : $X + Y = C$.

Továbbá

$$k = \frac{Y}{B} : \frac{X}{A} \quad \text{és} \quad \frac{B}{A} k = \frac{Y}{X},$$

$\frac{B}{A} = f$ a két folyadék aránya és

$$f \cdot k = \frac{Y}{X} = K,$$

ahol K a *részesítő hányados* (*partition coefficient, extraction factor*). Így $K = \frac{Y}{X}$ konstans, a két oldószer között megoszlott anyagmennyiségek abszolút arányát fejezi ki.

Ebből

$$X = C \frac{1}{1 + K} = Cp, \quad Y = C \frac{K}{1 + K} = Cq,$$

Megjegyezzük továbbá, hogy nem feltétlenül a felső fázist vándoroltatják, éppúgy végezhető a kísérlet — ábránktól eltérőleg — az alsó fázis vándoroltatása útján is.

A következőkben **A**-val jelöljük az edényben maradó »álló« fázist, **B**-vel a mozgó »vándorló« vagy »mobil« fázist, független attól, hogy **A** és **B** közül melyik az alsó, illetve felső fázis.

Tekintsünk most egy további $m = 1$ edényt, amelyben alul az **A** oldószer helyezkedik el. Vigyük most az első ($m = 0$ sorszámú) edényből a **B** oldószerrel a benne levő **C** anyaggal együtt a második ($m = 1$ sorszámú) edénybe

és helyezzük el **A** fölé úgy, hogy ne keveredjenek ; az első edényben a felső részt helyettesítsük új, tiszta **B** oldószerezrel :

$r = 1$ (első lépés)

$m = 0$ edény		$m = 1$ edény	
B		B	qC
A	pC	A	

Ekkor a **C** anyag diffúziójának végbemenése után a következő állapot jön létre :

$m = 0$ sorszámú edény		$m = 1$ sorszámú edény	
B	pqC	B	q^2C
A	p^2C	A	pqC

A teljes **C** anyag a 0-adik és 1-ső cső között $p : q$ arányban oszlik meg.

Következő lépésként ($r = 2$) vigyük a második ($m = 1$ sorszámú) csőben felül elhelyezkedő fázist a harmadik ($m = 2$ sorszámú) csőbe az **A** folyadék fölé, az 1-ső csőből ($m = 0$) a felső **B** fázist hasonlóképpen a 2-odik csőben így megüresedett felső részbe, majd az 1-ső cső felső részét töltsük meg tisztán **B** folyadékkal.

Ekkor a következő helyzet áll elő :

$r = 2$ (második lépés)

$m = 0$ edény		$m = 1$ edény		$m = 2$ edény	
B		B	pqC	B	q^2C
A	p^2C	A	pqC	A	

A **C** anyag diffúziója minden edényben — az **A** és **B** fázisok között — $p : q$ arányú megoszláshoz vezet, s így a diffúzió lefolyása után a következő állapot jön létre :

$m = 0$ edény		$m = 1$ edény		$m = 2$ edény	
B	p^2qC	B	$2pq^2C$	B	q^3C
A	p^3C	A	$2p^2qC$	A	pq^2C

Ilyen módon a **C** anyag a három csőben a következő eloszlást mutatja $C = 1$ gr. esetén :

- a 0-adik csőben p^3 ,
- az 1-ső csőben $2pq$,
- a 2-odik csőben q^3 .

Legyen a rendelkezésre álló csövek száma $n + 1$, vagyis az utolsó cső sorszáma n . Ekkor, minthogy a **C** anyagnak az első csőbe való bevitelét 0-adik lépésnek tekintettük, az $r = n$ -edik lépés után a **C** anyag eloszlását a $(p + q)^n$ hatvány-kifejtésének tagjai adják a megfelelő sorrendben.

A fenti skémában az r lépésszám és n csőszám szerepe ugyanaz. Ezt a megkülönböztetést mégis célszerű megtartani a gyakorlatban sokszor alkalmazott úgynevezett *túlfuttatásos módszer* szempontjából. Ennél $r > n$ esete áll fenn, amikor is az $r = n + 1$ lépéstől kezdve az n sorszámú utolsó csőből kikerülő B fázisok már nem kerülnek további megosztásra, hanem külön gyűjtik őket. Ekkor az első n számú edényben a C anyag megosztását a $(p + q)^r$ kifejezés első $n + 1$ számú tagja szolgáltatja.

2. §. Binomiális eloszlások keverékei

Tegyük fel most, hogy a C anyag egyszerű vegyület, de az adott A és

B oldószerpárra nézve nem ismerjük a $K = \frac{q}{p}$ részesítő hányadost. Végezzük el a fenti kísérletet és az $r = n$ -edik lépés után határozzuk meg kísérleti-

leg az $n + 1$ cső mindegyikében a C anyag összmennyiségét. Ha az így kapott értékeket koordinátarendszerben a $0, 1, 2, \dots, n$ abszcissaértékekhez ordinátának felrajzoljuk, nyilván a binomiális eloszlás ábráját kapjuk, s — megfelelő interpoláció után — a maximum helyét, az $M = m_{\max}$ értéket meghatározva, az $M = nq$ egyenletből q értékét megkapjuk. Így a maximális pontból kiindulva megszerkeszthetjük az »elméleti« eloszlást, és a kísérleti adatokat az elméleti értékekkel összehasonlíthatjuk.

Ha azonban C -ről nem tesszük fel, hogy egyszerű anyag, hanem vegyületek keveréke, akkor ezt a körülményt, mint említettük, tapasztalhatjuk mindjárt azon, hogy a létrejövő eloszlás lényegesen eltér a binomiális eloszlás alakjától, például több maximuma van. De ha egy maximuma van, az ebből

kiszámított q értékhez tartozó $\binom{n}{m} p^{n-m} q^m$ számított értékek lényegesen

eltérhetnek az m -edik edényben tapasztalatilag talált anyag mennyiségétől.

Ily módon a fenti kémiai jelenség e konstrukció útján alkalmassá válik arra, hogy konstatáljuk azt a tényt, vajon a szilárd anyag egyszerű vegyület-e, vagy azok keveréke. Azzal a kérdéssel, hogy az n -edik lépés után kapott eloszlás, amely nyilván binomiális eloszlás, vagy azok keveréke, ez utóbbi esetben hogyan bontható fel összetevőire, a [7] dolgozat foglalkozik.

3. §. Az új eloszlás létrejötte

Az egyszerűség kedvéért a bevitt anyag mennyisége legyen $C = 1$ gramm.

Tegyük most fel, hogy a megosztások során nem várjuk meg azt az időt, amely alatt az egyensúly beáll, azaz míg a B folyadékban levő C anyagnak a teljes p hányada az A -ba diffundál, hanem csak addig várunk, amíg ennek η -nyi ($\eta < 1$) része: ηp hányada diffundál az A -ba. Hasonlóképpen az A részben elhelyezkedő C anyagnak csupán ηq hányada diffundál át B -be. Jelöljük P -vel ηp -t és Q -val ηq -t.

Tekintsük most a 0-adik lépést, vagyis amikor C -ből 1 grammnyit viszünk B -be. Célszerű a »megosztandó« C anyagot a mobil fázisba vinni, mivel a

későbbi műveletek során is ez a fázis vándoroltatja tovább a **C** anyagot, és így a matematikai tárgyalás is egyszerűbb. A gyakorlatban az álló **A** fázisba is bevihető az anyag, de ez — noha a végső eloszlást alig befolyásolja — a matematikai tárgyalást nehezíti. Ekkor a mondott idő után az alsó részbe P grammnyi diffundál, míg a felső részben $1 - P$ grammnyi marad :

$r = 0$ (nulladik lépés):

$$\begin{array}{c} m = 0 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \quad 1 \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \text{A} \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} m = 0 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \quad (1-p) \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \text{A} \quad P \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Az 1-ső lépésnél a $B + (1 - P) \text{ gr } \mathbf{C}$ az 1-ső edény felső részébe kerül, a helyét tiszta **B** folyadék foglalja el.

$r = 1$ (első lépés):

$$\begin{array}{c} m = 0 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \\ \hline \text{A} \quad P \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} m = 1 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline (1-P) \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} m = 0 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \quad PQ \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \text{A} \quad P(1-Q) \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} m = 1 \text{ edény} \\ \begin{array}{|c|} \hline (1-P)^2 \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline P(1-P) \text{ gr } \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

A 0-adik edényben a diffúziós folyamat eredménye a következő lesz; az **A**-ban levő P grammból $Pq\eta = PQ$ grammnyi kerül a felsőbe, s $P - PQ = P(1 - Q)$ marad **A**-ban. Hasonlóképpen az 1-ső edényben **B**-ben $(1 - P) - P(1 - P) = (1 - P)^2$, míg **A**-ban $P(1 - P)$ gr helyezkedik el. Az eloszlás a két edény között: a 0-adik edényben $P \text{ gr}$, az 1-ső edényben $1 - P \text{ gr}$.

Jelöljük most az n -edik edény esetében ($r = n$) és a diffúciónak mindenkor csupán a mondott ideig történő lefolyása után az m -edik edény felső részében a **C** anyag mennyiségét $Y_m^{(n)}$ -nel, míg az edény alsó részében **A**-ban levő mennyiségét $X_m^{(n)}$ -nel (itt $m = 0, 1, \dots, n$ és $n = 0, 1, 2, \dots$). A mondottak szerint:

$$Y_0^{(0)} = 1 - P,$$

$$X_0^{(0)} = P,$$

$$Y_0^{(1)} = X_0^{(0)} Q = PQ$$

$$Y_1^{(1)} = Y_0^{(0)} (1 - P) = (1 - P)^2$$

$$X_0^{(1)} = X_0^{(0)} (1 - Q) = P(1 - Q)$$

$$X_1^{(1)} = X_0^{(0)} P = P(1 - P).$$

Tehát az egyes edényekben levő összes mennyiség:

a 0-adik lépésnél a 0-adik edényben $T_0^{(0)} = X_0^{(0)} + Y_0^{(0)} = (1 - P) + P = 1$, az 1-ső lépésnél a 0-adik edényben $T_0^{(1)} = X_0^{(1)} + Y_0^{(1)} = PQ + P(1 - Q) = P$, az 1-ső lépésnél az 1-ső edényben $T_1^{(1)} = X_1^{(1)} + Y_1^{(1)} = (1 - P)^2 + P(1 - P) = 1 - P$.

Az $r = n$ -edik lépés után az m -edik edényben a **C** anyag mennyisége **B**-ben, illetve **A**-ban

$$(1) \quad \begin{cases} Y_m^{(n)} = X_m^{(n-1)} Q + Y_{m-1}^{(n-1)} (1 - P) \\ X_m^{(n)} = X_m^{(n-1)} (1 - Q) + Y_{m-1}^{(n-1)} P \end{cases}$$

Itt $m = 0, 1, \dots, n$ és $n = 0, 1, 2, \dots$; azonban n minden értékére

$$Y_{-1}^{(n)} = 0 \quad \text{és} \quad X_{n+1}^{(n)} = 0,$$

ami az újonnan behozott **s** **C** anyagot nem tartalmazó első és utolsó edény, **B** illetve **A** folyadékrészének felel meg.

Fenti formális eljárásunknak és a jelenség fizikai oldalának megvilágítására, induljunk ki az egyensúly beálltához vezető folyamat differenciálegyenletéből. A diffúziós folyamatokat az első *Fick-féle törvény* írja le. Ennek két fázis esetére erős keverés esetén, a határréteg-elmélet alapján felírt — a hőátbocsajtás közismert egyenletével analóg — alakja:

$$dC = -A \left(\frac{c_2}{k} - c_1 \right) s dt,$$

ahol A a tömegátbocsajtási együttható, c_2 a **B** fázisban, c_1 az **A** fázisban jelenlevő koncentrációja a **C** anyagnak, míg dC a dt idő alatt az s nagyságú fázishatárfelületen átdiffundált anyagmennyiség. Vagyis $dC = -A dc_1 = B dc_2$.

Áttérve fent bevezetett jelöléseinkre, mely szerint $c_1 = x$, $c_2 = y$, differenciálegyenletünk a következő alakú:

$$B dy = -A \left(\frac{y}{k} - x \right) s dt,$$

vagy integrálva, az $A dx + B dy = 0$ és $k \frac{B}{A} = K$ összefüggések figyelembevételével:

$$y = y_0 + \frac{1}{K+1} (kx_0 - y_0) \left(1 - e^{-\frac{A(K+1)}{KA} st} \right)$$

és

$$x = x_0 - \frac{K}{K+1} \left(x_0 - \frac{y_0}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{A(K+1)}{KA} st} \right).$$

Itt

$$\eta = 1 - e^{-\frac{A(K+1)}{KA} st}$$

az úgynevezett időfaktor, mely független attól, hogy milyen kezdeti koncentrációértékekből indultunk ki.

Áttérve abszolút anyagmennyiségekre, azaz figyelembevételével az $X = Ax$, $Y = By$ összefüggéseket, továbbá a $p = \frac{K}{1+K}$, $q = \frac{1}{1+K}$ jelöléseket, egyenleteink az

$$(2) \quad \begin{aligned} Y &= Y_0 + p(KX_0 - Y_0)\eta, \\ X &= X_0 - q\left(X_0 - \frac{1}{K}Y_0\right)\eta, \end{aligned}$$

azaz $p\eta = P$ és $q\eta = Q$ figyelembevételével az

$$(3) \quad \begin{aligned} Y &= Y_0(1 - P) + X_0Q \\ X &= Y_0P + X_0(1 - Q) \end{aligned}$$

alakot öltik, amit igazolni kívántunk. X és Y (2)-ben és (3)-ban felírt kifejezései azt fejezik ki, hogy a folyamatot akár úgy foghatjuk fel, hogy a megosztandó anyagnak csak a »túlsúlya«: az egyensúlytól eltérő mennyisége $(KX_0 - Y_0)$, diffundál [(2)], akár úgy, hogy az egyes fázisokban jelenlevő kezdeti anyagmennyiségek a másik fázisban jelenlevő kezdeti anyagmennyiségekre való tekintet nélkül diffundálnak [(3)].

4. §. A generátorfüggvények meghatározása

Az (1) egyenletek most már alkalmasak arra, hogy eloszlásunk generátorfüggvényét meghatározzuk. Vezessük be ezért a következő jelöléseket:

$$Y_n(z) = \sum_{m=0}^n Y_m^{(n)} z^m, \quad X_m(z) = \sum_{m=0}^n X_m^{(n)} z^m.$$

Ekkor az (1) egyenleteket z^n -el szorozva, s összegezve 0-tól n -ig, a következőket nyerjük:

$$(4) \quad \begin{cases} Y_n(z) = QX_{n-1}(z) + (1 - P)zY_{n-1}(z) \\ X_n(z) = (1 - Q)X_{n-1}(z) + PzY_{n-1}(z) \end{cases}$$

Vezessük most be a generátorfüggvények generátorfüggvényeit:

$$Y(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(z)w^n$$

$$X(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(z)w^n.$$

A (4) egyenleteket w^n -el szorozva és összegezve 1-től ∞ -ig, s figyelembevételével hogy

$$X_0(z) = P \quad \text{és} \quad Y_0(z) = 1 - P,$$

* a következő összefüggéseket nyerjük :

$$(5) \quad \begin{cases} Y(w, z) = (1 - P) + QwX(w, z) + (1 - P)zwY(w, z) \\ X(w, z) = P + (1 - Q)wX(w, z) + PzwY(w, z) \end{cases}$$

Ezekből az egyenletekből kiszámítva az (iterált) generátorfüggvényeket, a következőket kapjuk :

$$(6) \quad \begin{cases} Y(w, z) = \frac{1 - P - (1 - P - Q)w}{1 - [(1 - Q) + (1 - P)z]w + (1 - P - Q)zw^2}, \\ X(w, z) = \frac{P}{1 - [(1 - Q) + (1 - P)z]w + (1 - P - Q)zw^2}. \end{cases}$$

Vezessük be az $\varepsilon = 1 - P - Q = 1 - \eta$ jelölést. Eltekintve az alsó és felső edényekben való megoszlástól, csupán arra a kérdésre, hogy az n -edik lépés után az m -edik edényben mennyi a **C** anyag, $X_m^{(n)} + Y_m^{(n)} = T_m^{(n)}$ a válasz. E mennyiségek generátorfüggvénye

$$T_n(z) = Y_n(z) + X_n(z),$$

míg a $T_n(z)$ generátorfüggvénye :

$$(7) \quad T(w, z) = X(w, z) + Y(w, z) = \frac{1 - \varepsilon w}{1 - [(1 - Q) + (1 - P)z]w + \varepsilon zw^2}.$$

Természetesen, ha $\eta = 1$, vagyis a diffúzió teljes egészében végbemegy, akkor a binomiális eloszláshoz jutunk, ugyanis ekkor $\varepsilon = 0$ és

$$T_{\varepsilon=0}(w, z) = \frac{1}{1 - (p + qz)w} = \sum_{n=0}^{\infty} (p + qz)^n w^n.$$

Most egyszerűen megállapíthatjuk, hogy a **C** anyag hogyan oszlik el az n -edik lépés után a csövek alsó és felső folyadékaiban, tehát **A**-ban és **B**-ben.

Írjunk pl. $X(w, z)$ kifejezésben $z = 1$ -et, akkor w együtthatója megadja az n -edik lépés után az összes **A** folyadékokban együttesen található **C** anyag mennyiségét :

$$X(w, 1) = \frac{P}{1 - (1 + \varepsilon)w + \varepsilon w^2} = \frac{P}{(1 - \varepsilon w)(1 - w)},$$

vagyis

$$X(w, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} P \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon} w^n.$$

Mint hogy $\varepsilon < 1$, elég nagy n -re ε^{n+1} az 1-hez képest elhanyagolható, s azt kapjuk, hogy az **A** folyadékokban közel

$$P \frac{1}{1 - \varepsilon} = p$$

s ennek megfelelően a **B** anyagban q mennyiségű **C** van jelen.

Az eloszlás jellemzőinek meghatározására a kérdés valószínűség-számítási tárgyalásánál térünk rá.

5. §. Az eloszlás explicit meghatározása

Az előző pontban $X_m^{(n)}$ és $Y_m^{(n)}$ iterált generátorfüggvényeire adott (6) formulákat foglaljuk egybe a következő alakban:

$$Z(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^{(n)} z^m w^n = \frac{\beta - \gamma w}{1 - [(1 - Q) + (1 - P)z]w + \varepsilon z w^2}.$$

Itt $\beta = P$, $\gamma = 0$ esetben $Z_m^{(n)} = X_m^{(n)}$, vagyis kifejezésünk $X(w, z)$ -be megy át, míg $\beta = 1 - P$ és $\gamma = 1 - P - Q$ esetben $Z_m^{(n)} = Y_m^{(n)}$ és az egész kifejezés $Y(w, z)$ -t adja.

A $|z| < 1$ és $|w| < 1$ megszorítások mellett az együtthatók korlátosságát figyelembevéve a $Z(w, z)$ kétváltozós hatványsor abszolút konvergens.

$Z(w, z)$ sorát z hatványai szerint rendezve:

$$Z(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} Z_m^{(n)} w^n \right) z^m$$

Ha tehát $Z(w, z)$ -t z szerint hatványsorba fejtjük, az együtthatók a $\sum_{n=m}^{\infty} Z_m^{(n)} w^n$ sorokat adják. Azonban $Z(w, z)$ nevezője z -ben lineáris:

$$Z(w, z) = \frac{\beta - \gamma w}{1 - (1 - Q)w - [(1 - P)w - \varepsilon w^2]z} = \frac{a}{b \left(1 - \frac{cz}{b} \right)}$$

ahol a , b és c értékeit a középső kifejezéssel való z -re azonos — összehasonlításból nyerhetjük.

Mivel $|z| < 1$ és $|w| < 1$ esetén

$$\left| \frac{cz}{b} \right| = \left| \frac{[(1 - P)w - \varepsilon w^2]z}{1 - (1 - Q)w} \right| < 1,$$

a z szerinti hatványsorba fejtés megengedett, vagyis

$$Z(w, z) = \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{c}{b} \right)^m z^m$$

és

$$\sum_{n=m}^{\infty} Z_m^{(n)} w^n = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{b} \right)^m = \frac{(\beta - \gamma w) [(1-P)w - \varepsilon w^2]^m}{[1 - (1-Q)w]^{m+1}}.$$

Felhasználva az egyszerű

$$\frac{(1-Q)^m w^m}{[1 - (1-Q)w]^{m+1}} = \sum_{\mu=m}^{\infty} \binom{\mu}{m} (1-Q)^{\mu} w^{\mu}, \quad |(1-Q)w| < 1$$

relációt, a

$$\sum_{n=m}^{\infty} Z_m^{(n)} w^n = \frac{1}{(1-Q)^m} (\beta - \gamma w) \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} (-\varepsilon)^{\nu} w^{\nu} (1-P)^{m-\nu} \sum_{\mu=m}^{\infty} \binom{\mu}{m} (1-Q)^{\mu} w^{\mu}$$

összefüggést nyerjük. A jobboldalon w hatványai szerint történő átrendezés után a

$$\begin{aligned} Z_m^{(n)} = & \beta \sum_{\varrho=0}^{n-m} \binom{m}{\varrho} (-\varepsilon)^{\varrho} (1-P)^{m-\varrho} \binom{n-\varrho}{m} (1-Q)^{n-m-\varrho} - \\ & - \gamma \sum_{\varrho=0}^{n-m-1} \binom{m}{\varrho} (-\varepsilon)^{\varrho} (1-P)^{m-\varrho} \binom{n-\varrho-1}{m} (1-Q)^{n-m-\varrho-1} \end{aligned}$$

eredményt kapjuk.

Ebből β és γ megfelelő választásával $X_m^{(n)}$ és $Y_m^{(n)}$ -re, valamint ezek $T_m^{(n)}$ összegére a következő explicit formulákat kapjuk:

$$\begin{aligned} X_m^{(n)} = & P(1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)} \right)^{\varrho} \\ Y_m^{(n)} = & (1-P)(1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)} \right)^{\varrho} - \\ & - \varepsilon(1-Q) \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m-1} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho-1}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)} \right)^{\varrho} \\ T_m^{(n)} = & (1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)} \right)^{\varrho} - \\ & - \varepsilon(1-Q)^{n-1} \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m-1} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho-1}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)} \right)^{\varrho}. \end{aligned}$$

A $P + Q = 1$ esetében természetesen a binomiális eloszláshoz jutunk. A 7. §-ban látni fogjuk, hogy nagy csőszám esetén már szintén közel binomiális eloszlás érvényes és így a számolás az ott adott Gauss-féle megközelítéssel végezhető.

6. §. Az ismeretlen paraméterek meghatározása a mérhető adatokból

A fenti explicit kifejezések nem alkalmasak arra, hogy az X , Y és T -re vonatkozó mérési adatokból a P és Q mennyiségeket, illetve ezekből a $q = 1 - p$ és $\eta = 1 - \varepsilon$ értékeket meghatározzuk, egységes C anyag esetén. E célra sokkal alkalmasabbak a következő összefüggések:

$$X_{n-m}^{(n)} = \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^{n-2m} X_m^{(n)}$$

$$T_{n-m-1}^{(n)} - \frac{1}{P} X_{n-m-1}^{(n)} = \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^{n-2m-1} \left(T_m^{(n)} - \frac{1}{P} X_m^{(n)} \right)$$

Bizonyítás. Rövidség kedvéért az

$$\alpha = \frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)}$$

jelölést bevezetve, az előző pontban nyert formulák szerint

$$X_{n-m}^{(n)} = P(1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^{n-m} \sum_{q=0}^m \binom{n-m}{q} \binom{n-q}{n-m} \alpha^q$$

$$X_m^{(n)} = P(1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q} \right)^m \sum_{q=0}^{n-m} \binom{m}{q} \binom{n-q}{m} \alpha^q.$$

Azonban az $\binom{n-m}{q} \binom{n-q}{n-m} = \binom{m}{q} \binom{n-q}{m}$ reláció miatt

$$\sum_{q=0}^m \binom{n-m}{q} \binom{n-q}{n-m} \alpha^q = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} \binom{n-q}{m} \alpha^q = \sum_{q=0}^{n-m} \binom{m}{q} \binom{n-q}{m} \alpha^q,$$

és könnyen meggyőződhetünk, hogy minden esetben $(n-m \gtrless m)$ e két összeg ugyanannyi számú tagból áll. A megfelelő oldalak hányadosát véve a jelzett első formulát nyerjük.

Az összegezésnek itt alkalmazott átalakításával teljesen hasonló módon nyerjük második formulánkat is.

Képleteink alapján most már P és Q könnyen meghatározhatók, ha 3 alkalmasan választott cellában megmérjük $T_m^{(n)}$ és $X_m^{(n)}$ értékeit. Ugyanis legyen definíciószerűen

$$\frac{1-P}{1-Q} = \left(\frac{X_{n-m}^{(n)}}{X_m^{(n)}} \right)^{\frac{1}{n-2m}} = D^{\frac{1}{n-2m}};$$

ekkor

$$P = \frac{X_m^{(n)} D^{\frac{n-2m-1}{n-2m}} - X_{n-m-1}^{(n)}}{T_m^{(n)} D^{\frac{n-2m-1}{n-2m}} - T_{n-m-1}^{(n)}};$$

ezek a formulák $m \neq \frac{n}{2}$, $m \neq \frac{n-1}{2}$ esetekben mindig alkalmasak az ismeretlenek kiszámítására. $X^{(n)}$ és $T^{(n)}$ értékei tehát valamely m , $n-m$ és $(n-m-1)$ -edik edényben határozandók meg. Célszerű három olyan edény választása, amelyek a maximumhoz közel esnek.

Megemlítjük még, hogy P és Q az eloszlás várható értékéből (középértékéből) és szórásából is meghatározható, erre a kérdésre azonban a valószínűség-számítási tárgyalásnál térünk rá.

7. §. A probléma valószínűség-számítási tárgyalása

Az eredeti jelenséget — amikor a diffúzió teljes egészében végbemegy — mint említettük. *Stene* nyomán felfoghatjuk oly módon, hogy a **C** anyag minden molekulája p valószínűséggel megy át a **B** fázisból az **A**-ba. E kiindulópontból igen egyszerűen levezethető a binomiális eloszlás létrejötté az ismertetett eljárásnál n edény esetén. Targyaljuk mindjárt az általános esetet, amely speciális esetként ezt is tartalmazza.

Kiindulunk a **C** anyagnak az egyes edényekben való megoszlásának vizsgálatából, tekintet nélkül arra, hogyan oszlik meg az edény alsó és felső részében. Vezessük be azt a ξ_m valószínűségi változót, melynek értéke 1, ha az m -edik lépésnél a **C** anyag egy taláalomra választott molekulája egyedénnyel tovább halad, és legyen ξ_m értéke 0, ha e molekula ugyanabban az edényben marad. Ekkor annak valószínűsége, hogy az $(m+1)$ -edik lépésnél ξ_{m+1} értéke 1 vagy 0, attól is függ, hogy az m -edik lépésnél a molekula továbbhaladt-e egy edénnyel (vagyis a felső — **B** — fázisban helyezkedett-e el), illetve hogy helyén maradt-e (vagyis az alsó — **A** — fázisban volt-e). Eddigi jelöléseinket alkalmazva könnyű belátni, hogy e feltételes valószínűségek az előfordulható négy esetben a következők:

$$P(\xi_{m+1} = 1 | \xi_m = 1) = 1 - P$$

$$P(\xi_{m+1} = 0 | \xi_m = 1) = P$$

$$P(\xi_{m+1} = 1 | \xi_m = 0) = Q$$

$$P(\xi_{m+1} = 0 | \xi_m = 0) = 1 - Q.$$

Ily módon a ξ_m változók közösleges Markov-láncot alkotnak, amelynek átmenetvalószínűség-matrixa:

$$\begin{pmatrix} 1-Q & Q \\ P & 1-P \end{pmatrix}$$

Ennélfogva azon feltevés mellett, hogy az első lépésnél az anyag a 0-adik edényből feltétlenül továbbmegy az 1-ső edénybe, vagyis $\mathbf{P}(\xi_0 = 1) = 1$ esetén a feltétel nélküli valószínűségek a következők⁴⁾:

$$\mathbf{P}(\xi_m = 1) = \frac{Q}{P+Q} + (1-P-Q)^m \frac{P}{P+Q} = \frac{1}{1-\varepsilon} (Q + P\varepsilon^m)$$

$$\mathbf{P}(\xi_m = 0) = \frac{P}{P+Q} - (1-P-Q)^m \frac{P}{P+Q} = \frac{1}{1-\varepsilon} (P - P\varepsilon^m)$$

$$(\varepsilon = 1 - P - Q).$$

Az a kérdés mármost, hogy a **C** anyag hányadrésze jut n lépés után az m -edik cellába, az

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

összeg, mint valószínűségi változó eloszlásának vizsgálatával azonos.

Gyakorlati szempontból a várható érték (átlag) és szórás meghatározása bír elsősorban jelentőséggel. η_n várható értékét, $\mathbf{M}(\eta_n)$ -t, a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\eta_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\xi_k) = n \frac{Q}{P+Q} + \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{1 - (1-P-Q)^n}{P+Q} (1-P-Q) = \\ &= \frac{n}{1-\varepsilon} Q + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon^n)}{(1-\varepsilon)^2} P = nq + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon^n)}{1-\varepsilon} p. \end{aligned}$$

Innen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\frac{\eta_n}{n} \right) = q,$$

vagyis a várható érték aszimptotikusan ugyanott van, mint az $\varepsilon = 1 - \eta = 0$ esetben.

A szórásnégyzet kiszámítását illetően ismert valószínűségszámítási összefüggésekből (lásd: [8], p. 249.) kapjuk a következő aszimptotikus formulát:

$$\mathbf{D}^2(\eta_n) \sim npq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

ami valóban nagyobb, mint a megfelelő binomiális eloszlás szórásnégyzete, s így érthető, hogy $\varepsilon > 0$ esetén az eloszlás görbéje ellapultabb.

⁴⁾ Lásd például [8], p. 537. Az idézett helyen a Markov-lánc egy másik gyakorlati problémával, a gépállások problémájával kapcsolatban fordul elő.

E tárgyalásmód egyik fontos következménye, hogy az η_n nagy n -ekre közelítően normális eloszlást követ.⁵⁾ Az

$$\eta_n - nq < t \sqrt{npq \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség valószínűsége tehát elég nagy n -re közelítőleg

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

Ha n meghaladja a 30-at, akkor ez az összefüggés már mindenesetre alkalmazható.⁶⁾ Ilymódon ezeknek az eloszlásoknak keverékei hasonló módszerekkel választhatók szét komponenseikre, mint normális eloszlások keverékei.⁷⁾

$M(\eta_n)$ és $D^2(\eta_n)$ fenti formulái alkalmasak arra, hogy kísérleti adatokból a p , q , η mennyiségeket meghatározzuk. Ugyanis ezek az értékek az $n+1$ csőben talált $T_m^{(n)}$ anyagmennyiségek átlaga, illetve szórása, amelyeket igen egyszerűen kiszámítva két egyenlet áll rendelkezésre a két ismeretlen meghatározására.

IRODALOM

- [1] E. JANTZEN: *Das fraktionierte Destillieren und das fraktionierte Verteilen als Methoden zur Trennung von Stoffgemischen*. Verlag Chemie, Weinheim, 1932 (Dechem Monographien, 48.)
- [2] S. STENE: »A contribution to the theory of systematic extraction and other related convection problems.« *Arkiv för Kemi, Mineralogi och Geologi* 18/A (1945) 1—121.
- [3] L. C. CRAIG: »Identification of small amounts of organic compounds by distribution studies. II. Separation by counter-current distribution.« *Journal of Biological Chemistry*, 155 (1944) 519—534.
- [4] L. C. CRAIG: »Automatic counter-current distribution equipment.« *Analytical Chemistry* 23 (1951) 1236—1244.
- [5] G. T. BARRY—Y. SATO—L. C. CRAIG: »Distribution studies, X. Attainment of equilibrium.« *Journal of Biological Chemistry* 174 (1948) 213—
- [6] L. C. CRAIG: »Partition chromatography and counter-current distribution.« *Analytical Chemistry* 22 (1950) 1346—1359.
- [7] MEDGYESSY P.: »Diszkrét valószínűség-eloszlások keverékének felbontása összetevőire.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 139—153 (jelen kötet).
- [8] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [9] MEDGYESSY P.: »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.

⁵⁾ Lásd: [8] p. 582, 19. feladat.

⁶⁾ A $\Phi(t)$ függvény értékeinek táblázatát lásd: [8], p. 173.

⁷⁾ Lásd: [9]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИЧЕСКОГО ФРАКЦИОНИРУЮЩЕГО РАЗДЕЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОЙ ДИФФУЗИИ

П. Меддеш, А. Реньи, К. Тэттамант и И. Винце

Резюме

В настоящей работе исследуется следующий вопрос: рассмотрим количество $n+1$ сосудов (труб, ячеек), каждый из которых содержит одинаковое количество растворителя **A** (неподвижная фаза). Введем в сосуд с номером 0 некоторое количество растворителя **B** (подвижная фаза), содержащего некоторое количество вещества **C**. Предположим, что **C** растворяется как в **A** так и в **B**, но **A** и **B** не смешиваются. Если выждать, пока диффузия вещества **C** между соприкасающимися растворителями **A** и **B** полностью совершится, то **C** разделяется между **A** и **B** в отношении K ; в двух фазах вещество **C** можно найти в количествах Cp и Cq соответственно, где $p/q=K$, $p+q=1$. Однако, если по истечении некоторого времени t разделением растворителей прекратить процесс диффузии, прежде чем он мог полностью совершиться, то в неподвижную фазу переходит лишь количество $Cp\eta$ вещества **C**, где $\eta < 1$. Пусть $P = \eta p$ и $Q = \eta q$. Перенесем теперь подвижную фазу в сосуд 1 и повторим в нем вышеописанный процесс. Одновременно переносим одинаковое количество растворителя **B**, не содержащего на этот раз вещества **C**, в сосуд 0; в конце такого же интервала времени t , как и прежде, разделим фазы в сосудах 1 и 0, переносим их в сосуды следующих номеров и введем новую дозу чистого растворителя **B** в сосуд 0 и т. д. Процесс считается законченным, когда первая подвижная фаза достигает последнего сосуда. Предметом математического исследования является распределение вещества **C** по $n+1$ сосудам. Как показал С. Стиш [1], в случае $\eta=1$ (то есть, если диффузия полностью завершится), вещество **C** распределяется в сосудах по биномиальному распределению.

В настоящей работе задается распределение для случая $\eta < 1$ (то есть для случая, когда две фазы разделяются прежде, чем диффузия могла бы совершиться). Покажем, что перемещение отдельной молекулы вещества **C** по последовательным сосудам может считаться простой стационарной цепью Маркова с возможными состояниями: при каждом шаге каждая молекула или переходит в следующий сосуд, или остается в сосуде. Матрица вероятностей перехода принимает вид:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & Q & & Q \\ & P & 1 & P \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Исследование распределения вещества **C** приводится теперь к исследованию суммы $\xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, как случайной величины; здесь случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ могут принимать лишь значения 0 и 1 и образуют цепь Маркова с вероятностями перехода заданными матрицей [1]. Исходя из этого замечания, нетрудно определить математическое ожидание, дисперсию и другие данные, характерные для искомого распределения. Конечно, если $\eta=1$, тогда $P=1-Q$ то есть переменные независимы и распределение ξ_n является биномиальным. В общем случае распределение отличается от биномиального, так что его дисперсия больше. В § 3—5 дается явное определение искомого распределения методом производящих функций, оно является однако довольно сложным. Все же можно доказать, что для достаточно больших n , распределение приблизительно нормально с ожиданием nq и дисперсией $nq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon = 1 - \eta$.

В исследованном нами случае вещество **C** простое соединение, на практике, однако, часто приходится иметь дело с веществом **C**, являющимся смесью нескольких соединений. Тогда в общем отношении K и в некоторой мере и фактор времени η оказываются различными для различных компонентов. Если при таких обстоятельствах совершается вышеописанный процесс, то получается смесь распределений; методы для разложения на компоненты такой смеси указываются в работах [7] и [9] одного из авторов настоящей работы. Первая из этих работ трактует вопрос разложения для смеси биномиальных, а вторая для смеси нормальных распределений.

MATHEMATICAL INVESTIGATION OF CHEMICAL COUNTERCURRENT DISTRIBUTION, IN CASE OF NON-COMPLETE DIFFUSION

By P. MEDGYESSY, A. RÉNYI, K. TETTAMANTI and I. VINCZE

Summary

The following problem is considered in the paper: Let us assume that we have $n + 1$ cells, each of which contains equal amounts of the solvent **A** (the stationary phase). We introduce into cell 0 a certain quantity of solvent **B** (the moving phase) containing some quantity C of the solute **C** which is soluble both in **A** and **B**, the latter being immiscible with each other. After this the content of the cell is thoroughly mixed. If we should wait, until the distribution equilibrium is established, the solute **C** would be distributed between the phases **A** and **B** according to the partition coefficient K ; the quantities of the solute **C** contained in the two phases would be Cp and Cq where $p/q = K$, $p + q = 1$. If the process is stopped by separating the two layers after some time t , shorter than the time necessary to the distribution equilibrium to be established, the quantity of the solute **C** which is left in the stationary phase is only $Cp\eta$ where $\eta < 1$. Let us put $P = \eta p$ and $Q = \eta q$. The moving phase is now introduced in the cell 1, where the same process is repeated; at the same time the same amount of **B** as before, but not containing any amount of **C**, is introduced in cell 0; after this the layers are again separated in the cells 0 and 1 and the two moving phases carried over to the next cell, and a new amount of pure **B** introduced into cell 0, etc.

The process is stopped if the first moving phase reaches the last cell. After this the distribution of the solute **C** between the $n + 1$ cells is investigated. It has been shown by *S. Stene* [1] that if $\eta = 1$ (i. e. in the case if the distribution equilibrium state is always attained before the layers are separated) the solute **C** is distributed between the cells in accord with the binomial probability distribution.

In the present paper the distribution is given for the case $\eta < 1$ (i. e. for the case when the layers are separated before the distribution equilibrium could be established). It is shown that the movement process of the molecules of **C** along the cells can be considered as a simple stationary Markov chain, the two possible «states» of which correspond to a molecule passing to the next cell, or remaining in the same cell, the matrix of transition-probabilities being

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1-Q & Q \\ P & 1-P \end{pmatrix}.$$

Thus the distribution of the solute **C** between the cells will be the same as the probability distribution of the sum $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, where the variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ can assume only the values 0 and 1 and form a Markov chain, the matrix of transition-probabilities of which is given by (1). Starting from this remark, the mean value, the dispersion and other characteristic data of the distribution can be determined. Clearly, if $\eta = 1$, we have $1 - Q = P$, i. e. the variables are independent, and thus the distribution of ζ_n is the binomial distribution; in the general case however the distribution differs from the binomial; especially the variance is greater by the

factor $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$, where $\varepsilon = 1 - \eta$. Explicit formulae for the distribution are obtained

by using the method of generating function in §§ 3—5; the formulae are rather complicated. It can be shown however, that if n is sufficiently large, the distribution is

almost normal, with the mean value nq and variance $npq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$.

The problem treated up to now, is the «pure case». In practical applications, the solute **C** is often not a pure compound, but the mixture of certain components C_1, C_2, \dots, C_m . In this case, as the partition coefficient K (and in some cases the time-factor η) are different for different components, the final distribution obtained is a «mixture» (in the sense used in probability theory) of the distributions, corresponding to the pure cases, which would arise if only one of the individual components would be distributed by the counter-current method. The «components» of this mixed distribution can be separated, by using a technique developed by one of the authors in his papers [7] (for the case of a mixture of binomial distributions), and [9] (for the case of a mixture of normal distributions).

SZERVES SI-VEGYÜLETEK GYÖKCSERÉS KÉMIAI REAKCIÓINAK TÁRGYALÁSA VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREKKEL

SZÉKELY GÁBOR és SZÉKELY TAMÁS¹⁾

Bevezetés

Rényi A. [3] dolgozatában ioncserés kémiai reakciókkal foglalkozik. Gyökcsérés reakciók valószínűségi számítási módszerekkel való tárgyalása is előnyös, ugyanis a reakciómechanizmusra vonatkozóan semmit sem kell feltételezni, és a nyert eredmények és a kísérleti mérések egybevetésével lehet visszakövetkeztetni a tényleges mechanizmusra. Jelen dolgozat speciálisan szerves szilícium-vegyületek gyökcsérés reakcióival foglalkozik.

1. §. A kémiai probléma leírása

Mind a szerves, mind a szervetlen kémiában gyakori eset, hogy valamely centrális atomhoz vagy atomcsoportokhoz kapcsolódó (elemi vagy összetett) gyök azonos vegyértékű másik gyökre cserélődik ki.

E gyökcsérének különös jelentősége van a fém-hidridek, alkilek, illetve illékony halogénidek csoportjában.

E gyökcsérés reakciókat a következő csoportokba sorolhatjuk:

1° $X-X$ csere. Ide sorolhatók azok a gyökcsérék, melyekben ionos vagy erősen poláros kovalens kötések szakadnak meg, illetve alakulnak ki. Ezek legjellemzőbb példája halogénatomok cseréje.

2° $R-R$ csere. Ide sorolhatók azon gyökcsérék, melyek során kovalens, kevésbé poláros kötések szakadnak meg, illetve jönnek létre. Legjellemzőbb példa: alkil-, illetve aril-gyökök közti csere.

3° $X-R$ csere. Ennek során a poláros kötés apolárosra cserélődik ki vagy megfordítva. Legjellemzőbb példa erre az alkil-halogén csere.

A továbbiakban azon cseréket, melyek során teljesen azonos gyökök cserélődnek ki két atomon, illetőleg molekula-törzsön, *homogén*, míg a különböző csoportok cseréjét *heterogén* cserének fogjuk nevezni.

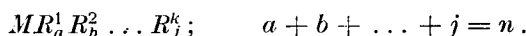
Ha valamely rendszerben gyökcsérés reakció játszódik le, úgy heterogén cserék esetében általában az egyes vegyületek koncentrációeloszlása megváltozik. Homogén csere esetében azonban az eloszlásban változás nem

¹⁾ Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest, Általános és Szervetlen Kémiai Intézet.

történik. Heterogén cserével járó reakció lefolyását tehát jól nyomon követhetjük azáltal, hogy kísérletileg időről-időre megállapíthatjuk a vegyületek koncentrációeloszlását, illetőleg az egyes gyökök eloszlását a fématomok között. Homogén csere kimutatására egyedül rádióaktív indikáció módszere alkalmazható. Homogén csere rádióaktív indikáció útján való kimutatásának az esetben is jelentősége van, ha a rendszerben heterogén csere is lejátszódik, mert ily módon felvilágosítást nyerünk a kémiai reakció egészéről.

2. §. Heterogén $R-R$ és $X-X$ csere

Tekintsünk valamely M -fématomot, melyhez n számú, k -féle kovalens kötött gyök kapcsolódik. A vegyület általános képlete tehát :



Amennyiben azonos M -atomokból építjük fel a rendszert és két molekula között $R^j - R^k$ gyökcsere következik be, a megszakadó kötések energiája azonos a kialakuló kötések energiájával, amennyiben elhanyagoljuk az érintett kötéseknek a szomszédos többi kötésekkel való kölcsönhatását. A rendszer entalpiaváltozása így zérus.

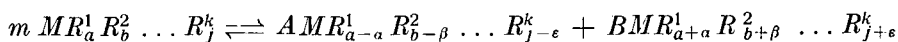
Ez esetben a folyamat szabadenergia-változását kizárólag az entrópia változása szabja meg :

$$\Delta F = T \Delta S.$$

Kézenfekvő, hogy a gyököknek a fématomok között történő véletlen eloszlására vonatkozólag egyszerű összefüggést várhatunk.

A tárgyalt rendszerekben — amennyiben megfelelő katalizátor van jelen — gyökcsérés átrendeződési reakciók mennek végbe, melynek eredményeként a rendszerben a különböző $MR^1 R^2 \dots R^k$ vegyületek koncentrációja egyensúlyi értékeket vesz fel, vagyis az egyes R^1, R^2, \dots, R^k gyökök meghatározott eloszlás szerint kapcsolódnak az egyes M -atomokhoz.

Ismét hangsúlyoznunk kell, hogy az ilyen rendszerekben a kötések polaritásának közel azonossága folytán bármely gyöknek bármely másik gyökkel történő kicserélődése, például az alábbi típusú reakcióban :



$$\alpha, \beta, \dots, \varepsilon = \pm 1, \pm 2, \dots \quad A + B = m,$$

egyenlő valószínűséggel következhet be. A fentieknek megfelelően így a különböző vegyületfajták összes lehetséges számát egyszerű kombinatorikai úton számíthatjuk ki, és ez — mint már a kémiai irodalomban régen ismeretes — a fenti jelöléseknek megfelelően

$$\frac{(n + k - 1)!}{n! (k - 1)!}.$$

Calingaert több közleményben [1] a vegyületek egész során vizsgálta az egyensúly esetén várható véletlen eloszlást és azt találta, hogy itt egyszerű kombinatorikai módszerrel az előbb már említett feltevésekből kiindulva polinomális eloszlást lehet levezetni, mely szerint valamely $MR_aR_b^2 \dots R^k$ vegyület koncentrációja a következő:

$$(1) \quad \frac{n!}{a!b! \dots j!} (r^1)^a (r^2)^b \dots (r^k)^j,$$

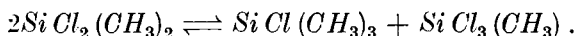
ahol r^i az R^i gyök koncentrációja móltörtben kifejezve.

Az említett szerző munkatársai a fémorganikus vegyületek egész sorára érvényesnek találták a fenti összefüggést. Hasonló megfigyelés származik tiszta illékony halogenidekre vonatkozólag. Ha azonban olyan vegyületek esetében vizsgáljuk a heterogén gyökcsere reakciókat, melyeknél már $X-R$ típusú csere is bekövetkezik, a fenti összefüggés nem mutatkozik érvényesnek, sőt sok esetben az elméletileg elképzelhető összes vegyület-fajták sem szerepelnek kivétel nélkül.

3. §. Heterogén $X-R$ csere

A polinomális eloszlástól való eltérés, a heterogén $X-R$ reakció egyik legtipikusabb példája az organohaloszilánok (organikus gyökökkel szubsztituált szilíciumhalogenidek) egyensúlyi átrendeződése. Ezen átrendeződési reakciónak elméleti érdekességén kívül komoly ipari jelentősége is van, mivel az említett szilánok képezik a műanyagipar egyik igen fontos termékének, a szilikonoknak monomérjét, alapanyagát. A különböző mértékben szubsztituált halogén szilánok a gyakorlat szempontjából igen különböző értékűek, és így különleges érdeklődésre tarthat számot e különböző monomerek egymásba történő átalakulásának kérdése. Elméleti síkon *P. D. Zemaný* és *F. D. Price* [2] foglalkoztak e kérdéssel. Megállapították, hogy egyensúlyi rendszerben az eloszlás távolról sem egyezik meg a polinomális eloszlással. Ebből arra következtettek, hogy az átrendeződési reakció entalpiaváltozással kapcsolatos folyamat, és ezt az egyensúlyi koncentrációkból hipotetikus módon ki is számították. A metil-, valamint fenil-klórszilánokban végbemenő átrendeződési reakció több szabadalmi bejelentés tárgyát is képezte.

A szilánoknál — nevezetesen metilklórszilánoknál — az egyensúlyi rendszerben fenti szerzők adatai szerint soha nem találunk úgynevezett tiszta termékeket, vagyis oly molekulákat, melyekben a szilícium valamennyi vegyértékét azonos gyök köti le. A fentiekben általános formában felírt átrendeződési reakció így metilklórszilánok egyensúlyi rendszerére vonatkozólag az alábbi egyenlettel jellemezhető egyetlen folyamatra redukálódik:

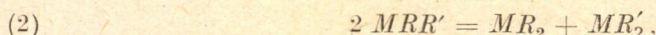


E reakciót formailag szokásos diszproporcionálódásnak is tekinteni.

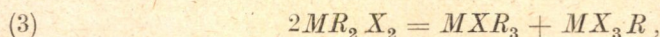
Szilánok rendszerében tehát a *Calingaert*-féle kombinatorikai megfontolások eleve használhatatlanok, azok érvényessége nem is várható,

hiszen a kiindulási feltétel (tudniillik bármely gyökcseré azonos valószínűségű) itt nem áll fenn; sőt, minden olyan gyökcserét a priori ki kell zárni, mely »tisztá molekula« $[SiCl_4, Si(CH_3)_4]$ képződésére vezethetne. Másrészt nyilvánvaló, hogy nem lehet eleve zérusnak tekinteni olyan gyökcseré energetikai effektusát, amelynél például olyan $Si-Cl$ kötés szakad meg, amely két metil és egy klór szomszédságában helyezkedik el s olyan jön létre, amelynél a kötés szomszédságában két klór és egy metil foglal helyet. Hasonló jelenséget nemcsak a szilícium esetében észlelték, hanem minden olyan esetben, ahol az $X-R$ heterogén csere fennállhat.

Ha tehát az $X-R$ és az $X-X$, illetve az $R-R$ heterogén cserék közti lényeges különbséget kívánjuk tárgyalni, célszerű a következő két reakció-típust összehasonlítani:



illetve



melyek közül az első követi *Calingaert* formuláját, az utóbbi nem. Az utóbbi egyenlet-típusnak megfelel a metil-klórszilánok már említett diszproporcionálódása. A következőkben megkíséreljük, hogy egyszerű kombinatorikai eljárás helyett a modern valószínűségszámítás módszereinek segítségével exakt módon tárgyaljuk az utóbbi rendszereket.

4. §. Metilklórszilánok egyensúlyi rendszerének tárgyalása

Egy szilíciumatomhoz a szilán molekulában kétféle gyök kapcsolódhat. Jelöljük ezeket X -szel és R -rel. A lehetséges kombinációk és azok vegyülései táblázaton szemléltethetők.

A három X (pl. halogén) csoportot tartalmazó (úgynevezett trifunkciós) molekulát az irodalomban szokásos módon T -vel, a két X -et és két R -et tartalmazót (difunkciós) D -vel, az egy X -et és három R -et tartalmazót (monofunkciós) M -mel jelöljük. Az egyensúlyi rendszerben termodinamikailag nem lehetséges SiX_4 és SiR_4 jele fentieknek megfelelően Q és N volna.

A táblában törölt kombinációs lehetőségek nem jöhetnek számításba a már említett reakcióakadály folytán. Tehát $2D \rightleftharpoons M + T$ folyamatot kell csak tárgyalnunk. Vagyis egy M -típusú és egy T -típusú molekula egyesülésénél két D -típusú molekula keletkezik és megfordítva. Tehát a D -molekulák száma mindig páros számmal változik. Legyen $2N$ a molekulák száma a kezdeti állapotban. Ez a szám az egész folyamat alatt változatlan marad, mert a reakció mólszám-változással nem jár. Mint láttuk, elegendő a vizsgálatoknál arra az esetre szorítkoznunk, ahol csak D -típusú molekulákból indulunk ki, illetve külön-külön azonos számú M - és T -típusúakból.

Legyen $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy két D -típusú molekula Δt idő alatt valamely módon vegyüljön, és $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy egy M és egy T Δt idő alatt vegyüljön.

	T SiX_3R	D SiX_2R_2	M $SiXR_3$
T SiX_3R			
D SiX_2R_2			
M $SiXR_3$			

Jelentse $P_{2n}(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpillanatban a folyamat D_{2n} állapotban van, vagyis hogy $2n$ számú D -molekula van jelen. $P_{2n}(t)$ meghatározására a teljes valószínűség tétele értelmében a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$(4) \quad \begin{aligned} P_{2n}(t + \Delta t) = & P_{2n}(t) [1 - \mu \binom{2n}{2} \Delta t] [1 - \lambda (N - n)^2 \Delta t] + \\ & + P_{2n-2}(t) \lambda (N - n + 1)^2 \Delta t \left[1 - \binom{2n-2}{2} \mu \Delta t \right] + \\ & + P_{2n+2}(t) \mu \binom{2n+2}{2} \Delta t [1 - \lambda (N - n - 1)^2 \Delta t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ha ugyanis t időpillanatban $2n$ számú D -molekula van, az M -, illetve T -molekulák száma pedig ugyanakkor $N - n$, t és $t + \Delta t$ időközben a folyamat D_{2n} állapotba oly módon kerülhet, hogy már t időpillanatban D_{2n} állapotban volt, aminek a valószínűsége $P_{2n}(t)$, és ekkor kell, hogy a következő Δt

idő alatt ne reagáljon el D -molekula, aminek a valószínűsége $1 - \mu \binom{2n}{2} \Delta t + o(\Delta t)$ és ne is keletkezzék D -molekula, aminek a valószínűsége $[1 - \lambda (N - n)^2 \Delta t] + o(\Delta t)$; vagy pedig t időpillanatban D_{2n-2} állapotban volt, aminek a valószínűsége $P_{2n-2}(t)$, ekkor viszont Δt idő alatt 2 újabb D -molekulának kell keletkeznie, aminek a valószínűsége $\lambda (N - n + 1)^2 \Delta t + o(\Delta t)$, és nem szabad D -molekulának elreagálnia, aminek a valószínűsége $1 - \mu \binom{2n-2}{2} \Delta t + o(\Delta t)$. Végül pedig lehetséges, hogy a folyamat t időpillanatban D_{2n+2} állapotban volt, aminek a valószínűsége $P_{2n+2}(t)$, ekkor azonban kell, hogy Δt idő alatt két D -molekula elreagáljon, aminek a valószínűsége $\mu \binom{2n+2}{2} \Delta t + o(\Delta t)$, és nem szabad újabb D -molekulának keletkeznie, aminek a valószínűsége $1 - \lambda (N - n - 1)^2 \Delta t + o(\Delta t)$.

A (4) egyenletben elvégezve a beszorzásokat, Δt magasabb hatványait elhanyagolva (ez utóbbi azt jelenti, hogy kizárjuk annak a lehetőségét, hogy Δt idő alatt egy adott molekulával két reakció menjen végbe, vagy kettős gyökcsere következzen be), és az egyenletet rendezve, a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_{2n}(t + \Delta t) - P_{2n}(t)}{\Delta t} = & - P_{2n}(t) \left[\binom{2n}{2} \mu + (N - n)^2 \lambda \right] + \\ & + P_{2n-2}(t) (N - n + 1)^2 \lambda + P_{2n+2}(t) \binom{2n+2}{2} \mu \end{aligned} \right.$$

egyenletre jutunk, amelyben a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve

$$(6) \quad \begin{cases} P'_{2n}(t) = -P_{2n}(t) \left[\binom{2n}{2} \mu + (N-n)^2 \lambda \right] + \\ + P_{2n-2}(t) (N-n+1)^2 \lambda + P_{2n+2}(t) \binom{2n+2}{2} \mu \\ (n = 0, 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

differencegiálegyenletrendszerre jutunk, a

$$P_{2i}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N-1), \quad P_{2N}(0) = 1$$

határfeltételek mellett.

Ha egyenlő, N számú M -, illetve T -molekulából indulunk ki, és ugyan-csak a keletkező D -molekulák számának a valószínűségeit vizsgáljuk t idő-pontban, az előbbivel azonos

$$(7) \quad \begin{cases} \bar{P}'_{2n}(t) = -\bar{P}_{2n}(t) \left[\binom{2n}{2} \mu + (N-n)^2 \lambda \right] + \bar{P}_{2n-2}(t) (N-n+1)^2 \lambda + \\ + \bar{P}_{2n+2}(t) \binom{2n+2}{2} \mu; \quad (n = 0, 1, \dots, N) \end{cases}$$

differencegiálegyenletrendszerre jutunk,

$$\bar{P}_0(0) = 1, \quad \bar{P}_{2i}(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

határfeltételek mellett.

Nyilvánvaló továbbá az is, hogy a D_{2n} állapot valószínűsége meg-egyezik a M_{N-n} , illetve T_{N-n} állapotok valószínűségeivel; ez a folyamat jellegéből következik.

Határozzuk meg a koncentráció időbeli változását. A koncentrációt célszerűen móltörtben fejezzük ki. Problémánk esetében tehát 1 a D , illetve 0,5 az M és T kezdeti koncentrációja a kiindulási pontban, a kiindulási elegy fajtájától (D , vagy M és T) függően. Megjegyezzük még azt, hogy a reakció-térfogat megváltoztatása rögzített molekulaszám mellett semmi változást

sem eredményez tárgyalásunkban, ugyanis a $\frac{\lambda}{\mu}$ hányados mindig konstans

marad, a folyamat lefolyása ugyanaz lesz, lényegében tehát a mólkonzentrációra áttérés mindössze a t változó lineáris transzformációját jelenti.

A koncentráció meghatározása céljából tehát meg kell határoznunk az átlagot, illetve annak időbeli változását.

Vezessük be a $P_{2n}(t)$ valószínűségeket

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^N P_{2n}(t) s^{2n}$$

generátorfüggvényét. A (6) egyenletrendszer mindkét oldalát s^{2n} -nel ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) szorozva, és n szerint összegezve a

$$(8) \quad \frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = (s^2 - 1) \left(\frac{\lambda}{4} s^2 - \frac{\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 G(s, t)}{\partial s^2} + \\ + (s^2 - 1) s \left(\frac{\lambda}{4} - \lambda N \right) \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} + \lambda N^2 (s - 1) G(s, t)$$

parciális differenciálegyenletre jutunk

$$G(1, t) = 1 \quad \text{és} \quad G(s, 0) = s^{2N}$$

kezdeti feltételek mellett.

Mint ismeretes, a $G(s, t)$ függvény s szerinti első deriváltja az $s = 1$ helyen az első momentumot (átlagot) szolgáltatja, a második derivált értéke pedig az $s = 1$ helyen a második és első momentum különbségét adja, tehát

$$\left[\frac{\partial G(s, t)}{\partial s} \right]_{s=1} = M_1(t) = \sum_{n=0}^N 2n P_{2n}(t) \\ \left[\frac{\partial^2 G(s, t)}{\partial s^2} \right]_{s=1} = M_2(t) - M_1(t), \quad \text{ahol} \quad M_2(t) = \sum_{n=0}^N (2n)^2 P_{2n}(t).$$

Tekintetbevéve továbbá még, hogy a szórásnégyzet

$$\sigma^2(t) = M_2(t) - [M_1(t)]^2$$

alakban írható, a (8) egyenlet s szerinti deriváltja az $s = 1$ helyen a

$$(9) \quad \frac{dM_1(t)}{dt} = \left(\frac{\lambda}{2} - \mu \right) M_1^2(t) + (\mu - 2\lambda N) M_1(t) + 2\lambda N^2 + \\ + \left(\frac{\lambda}{2} - \mu \right) \sigma^2(t)$$

differenciálegyenletet szolgáltatja az $M_1(t)$ átlag meghatározására $M_1(0) = 2N$ kezdeti feltétel mellett.

A (9) differenciálegyenlet tartalmazza az ismeretlen $\sigma^2(t)$ szórásnégyzetet. Az általában vizsgált anyagmennyiségeknél (kb. 10^{23} molekula) a szórás az átlaghoz viszonyítva igen kicsiny. A kísérleti metodikából származó szórás az előbbi több nagyságrendben meghaladja, így $\sigma^2(t)$ elhanyagolása nem jelent lényeges hixát. Méginkább igaz ez koncentrációk vizsgálata esetén, ahol 10^{23} -mal osztunk, s így a szórás értékét gyakorlatilag 0-nak

vehetjük. Egyébként általában bimolekuláris folyamatoknál ez a szórás elég nagy t esetén már nyugodtan elhanyagolható, mint azt Rényi A. [3] dolgozatában kimutatta. A (9) differenciálegyenlet $\sigma(t) = 0$ feltételezése melletti megoldása $2N$ -nel, az összmolekula-számmal való osztás után az $m_D(t)$ koncentrációra

$$\frac{M_1(t)}{2N} = m_D(t) = \frac{\frac{2\sqrt{2\kappa}}{\kappa-2}}{1 - e^{\mu^2(\kappa-2)} \frac{1}{1+4\kappa N(2N-1)t}} + \frac{\kappa - \sqrt{2\kappa}}{\kappa-2} \cdot \frac{2 + \sqrt{2\kappa}}{2 - \sqrt{2\kappa}}$$

függvényt szolgáltatja $\left(\kappa = \frac{\lambda}{\mu}\right)$. A függvény a $t = 0$ helyen természetesen leg 1-et ad. A $t = \infty$ érték szolgáltatja a stacionárius állapot koncentrációját, mely

$$m_D = \frac{\kappa - \sqrt{2\kappa}}{\kappa - 2}$$

értéknek adódik.

Az M - és T -anyagok koncentrációja $m_M(t) = m_T(t) = \frac{1 - m_D(t)}{2}$ lesz.

Stacionárius állapot esetén ez

$$m_T = m_M = \frac{-2 + \sqrt{2\kappa}}{2(\kappa - 2)},$$

az egyensúlyi állandó pedig

$$\frac{[m_D]^2}{m_T m_M} = 2\kappa = \frac{2\lambda}{\mu}$$

lesz.

Ha N db M -, illetve T -molekula van csak jelen a folyamat kezdetén, a D -molekulák $m_D^*(t)$ koncentrációjára az

$$m_D^*(t) = \frac{\frac{2\sqrt{2\kappa}}{\kappa-2}}{1 - e^{\mu^2(\kappa-2)} \frac{1}{1+4\kappa N(2N-1)t}} + \frac{\kappa - \sqrt{2\kappa}}{\kappa-2} \cdot \frac{\kappa + \sqrt{2\kappa}}{\kappa - \sqrt{2\kappa}}$$

képletet kapjuk. Stacionárius állapot beálltával ez a koncentráció az előbbivel megegyezik, mint az várható is volt, hiszen az egyensúlyi koncentrációk függetlenek attól, hogy az egyensúlyt melyik irányból közelítjük meg.

A stacionárius állapot eloszlása is könnyen meghatározható. Ugyanis stacionárius állapot esetén a (6) egyenletrendszer a

$$P_{2n+2} \binom{2n+2}{2} \mu - P_{2n} \left[\binom{2n}{2} \mu + (N-n)^2 \lambda \right] + P_{2n-2} (N-n+1)^2 \lambda = 0$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

közönséges differenciaegyenletrendszerre alakul.

Felírva az egyenleteket $n = 0$ -tól $n = k$ -ig és összegezve, a

$$P_{2k} = \frac{2\lambda}{\mu} \frac{(N-k+1)^2}{2k(2k-1)} P_{2k-2}$$

differenciaegyenletre jutunk, melynek megoldása után a stacionárius állapotbeli valószínűségekre a

$$P_{2k} = \left(\frac{2\lambda}{\mu} \right)^k \frac{[(N-k+1)(N-k+2) \dots (N-1)N]^2}{2k(2k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} P_0$$

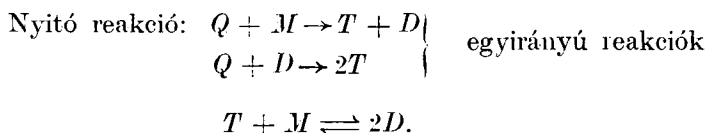
képletet kapjuk, ahol

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \left(\frac{2\lambda}{\mu} \right)^k \frac{[(N-k+1)(N-k+2) \dots (N-1)N]^2}{2k(2k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

5. §. Egyensúlyra vezető egyirányú gyökcsérés reakciók

Az eddigiekben olyan gyökcsérés reakciókról volt szó, amelyeknél a gyökcsere iránya tetszésszerűen lehet. A következőkben olyan rendszert tárgyalunk, melyben az ilyen reakciók mellett egyirányú reakciók is lejátszódnak, vagyis egyes molekulák között a gyökcsere csak egy irányban következhetik be.

Ilyen például a már eddig is tárgyalt szilánrendszerek esetében az az állapot, midőn kísérletünk kiindulási állapotának oly rendszert választunk, mely az úgynevezett »tisztá« termékeket (vagyis SiCl_4 -et, illetve $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$ -et) tartalmazza. Egyszerűség kedvéért tekintsünk olyan rendszert, mely Q -ból és M -ből áll. E rendszerben az alábbi reakciók játszódhatnak le:



Vagyis a már előzőkben tárgyalt stacionárius állapot áll be ez esetben is, azonban eközben a Q koncentrációja kezdeti értékéről zérusra csökken. Q -ban a folyamat tehát egyirányú.

E rendszer tárgyalásával kapcsolatban elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt érdekes probléma az, hogy a Q mennyi idő alatt fogy el

és hogy elfogyásának időpontjában az egész rendszert milyen állapotban találjuk; továbbá, hogy mekkora a Q csökkenésével járó egyirányú reakciók valószínűsége.

A kiindulási anyag most Q és M , ahol Q SiX_4 -et és M pedig az előzőknek megfelelően $SiXR_3$ -at jelent. A reakcióban résztvevő X - és R -gyökök száma akkor lesz egymással egyenlő, ha N számú Q - és $2N$ számú M -molekulából indulunk ki. Jelöljük n_1 -, n_2 -, n_3 - illetve n_4 -gyel az M -, D -, T - illetve Q -molekulák számát egy tetszőleges időpillanatban. Az összes molekulák száma a reakciók folyamán mindig változatlan marad, tehát fennáll az

$$(10) \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3N$$

összefüggés. A rendszerben levő X - és R -gyökök száma sem változik. Az R -gyökök számának figyelembevételével a

$$(11) \quad 3n_1 + 2n_2 + n_3 = 6N$$

összefüggés érvényes bármely időpillanatban. E két alapösszefüggés előrebocsátása után vizsgáljuk az egyes reakciókat.

Legyen $\varrho \Delta t + o(\Delta t)$, $\nu \Delta t + o(\Delta t)$ és az előzőknek megfelelően $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, illetve $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy Δt idő alatt rendre egy Q - és egy M -, egy Q - és egy D -, egy T - és egy M -, illetve két D -típusú molekula vegyüljön. Minden ilyen vegyülésnél a reakcióegyenleteknek megfelelő termékek keletkeznek. Jelentse $P(n_1, n_2, n_3, n_4; t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpillanatban n_1 , n_2 , n_3 és n_4 számú M -, D -, T - és Q -típusú molekulából áll a rendszer. $P(n_1, n_2, n_3, n_4; t)$ meghatározására az előző tárgyalásban szereplő (4) egyenlethez hasonlóan felírható Kolmogorov-egyenletek a következők:

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} P(n_1, n_2, n_3, n_4; t) = \\ & - \left[\lambda n_1 n_3 + n_4 (\varrho n_1 + \nu n_2) + \frac{\mu}{2} n_2 (n_2 - 1) \right] \cdot P(n_1, n_2, n_3, n_4; t) + \\ & + \varrho (n_4 + 1) (n_2 + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 + 1; t) + \\ & + \nu (n_4 + 1) (n_2 + 1) P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 2, n_4 + 1; t) + \\ & + \lambda (n_1 - 1) (n_3 - 1) P(n_1 + 1, n_2 - 2, n_3 + 1, n_4; t) + \\ & + \frac{\mu}{2} (n_2 + 2) (n_2 + 1) P(n_1 - 1, n_2 + 2, n_3 - 1, n_4; t), \end{aligned} \right\}$$

ahol az egyenletrendszer létezik mindazon n_1, n_2, n_3, n_4 értékekre, melyek a (10) és (11) összefüggéseknek eleget tesznek. Természetesen a (10) és (11) egyenletek segítségével a négy paraméter közül bármely kettőt kiküszöbölhetjük.

Bevezetve a

$$G(s_1, s_2, s_3, s_4; t) = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 = 3N \\ 3n_1 + 2n_2 + n_3 = 6N}} P(n_1, n_2, n_3, n_4; t) s_1^{n_1} s_2^{n_2} s_3^{n_3} s_4^{n_4}$$

generátorfüggvényt, — ahol az összegezés az összes lehetséges n_1, n_2, n_3, n_4 kombinációkra terjesztendő ki — a

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = & \varrho (s_2 s_3 - s_4 s_1) \frac{\partial^2 G}{\partial s_4 \partial s_1} + \nu (s_3^2 - s_4 s_2) \frac{\partial^2 G}{\partial s_4 \partial s_2} + \\ & + \lambda (s_2^2 - s_1 s_3) \frac{\partial^2 G}{\partial s_1 \partial s_3} + \frac{\mu}{2} (s_1 s_3 - s_2^2) \frac{\partial^2 G}{\partial s_3^2} \end{aligned} \right.$$

parciális differenciálegyenletre jutunk, ahol a rövidség kedvéért $G = G(s_1, s_2, s_3, s_4; t)$ jelölést vezettünk be. A (13) alatti kifejezésnek rendre s_1 -, s_2 -, s_3 -, illetve s_4 -szerinti parciális deriváltjai az $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ helyen a szó-rás elhanyagolása mellett az előző rendszer tárgyalásában a (9) egyenletnek megfelelő

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{da_1(t)}{dt} = & -\varrho a_4(t) - \lambda a_1(t) a_3(t) + \frac{\mu}{2} [a_2^2(t) - a_2(t)] \\ \frac{da_2(t)}{dt} = & \varrho a_4(t) a_1(t) - \lambda a_1(t) a_3(t) + 2\nu a_4(t) a_2(t) + \frac{\mu}{2} [a_2^2(t) - a_2(t)] \\ \frac{da_3(t)}{dt} = & \varrho a_4(t) a_1(t) + 2\lambda a_1(t) a_3(t) - \nu a_4(t) a_2(t) + \mu [a_2^2(t) - a_2(t)] \\ \frac{da_4(t)}{dt} = & -\varrho a_4(t) a_1(t) - \nu a_4(t) a_2(t) \end{aligned} \right.$$

differenciálegyenletet szolgáltatja

$$a_1(0) = 2N$$

$$a_2(0) = 0$$

$$a_3(0) = 0$$

$$a_4(0) = N$$

kezdeti feltételekkel, ahol $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, illetve $a_4(t)$ az M -, D -, T -, illetve Q -típusú molekulák átlagát jelenti t időpillanatban. Fenti egyenletek közül tetszőleges kettő kiküszöbölhető a (10) és (11) összefüggések segítségével.

Stacionárius állapotot feltételezve, az összmolekulaszámmal, $3N$ -nel való osztás után a 4. §-ban tárgyalt rendszer koncentrációjára jutunk.

A (14) differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálatából kiderül, hogy azon t értéknél, amelynél $a_4(t) = 0$, $a_4(t)$ deriváltja is zérus, ugyanakkor azonban $a_1(t)$, $a_2(t)$ és $a_3(t)$ deriváltjai nem válnak zérussá, ami igazolja

a reakciómechanizmusra vonatkozóan azt a kémiai hipotézist, hogy időrend sorrendben a Q -molekulák előbb lebomlanak, és a stacionárius állapot koncentrációjának közelségébe csak jóval később kerül a rendszer.

Kísérleti adatok birtokában a (14) egyenletrendszer numerikusan könnyen kezelhető, ugyanis az $a_4(t) a_1(t)$, $a_1(t) a_3(t)$, $a_4(t) a_2(t)$ és $[a_2^2(t) - a_2(t)]$ változókban a (14) egyenlet jobboldala lineáris. Exakt megoldásuk, bármennyire is kívánatos, nem-lineáris voltuknál fogva majdnem reménytelennek látszik.

6. §. Az eredmények értékelése

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, hogy tárgyalásunk eredményeként nyert összefüggések hogyan viszonyulnak a Calingaert-féle összefüggéshez, vagyis milyen eredményre vezetnek $R-R$ típusú heterogén cserék esetében.

E célból vizsgáljuk meg az általunk tárgyalt $X-R$ heterogén cserének megfelelő $R-R$ reakciót [(lásd (2))]. A reakciót az előző jelölést használva $2D = M + T$ formában is írhatjuk.

Legyen $\mu' \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy két kiszemelt D találkozik Δt időn belül. Feltevés szerint e találkozás minden esetben reakcióra vezethet, illetve az ütközéseknek bármely gyökcseréje esetében azonos hányada lesz hatásos, mivel e rendszerben bármely gyöknek bármely más gyökkel való cseréje azonos mértékben valószínű. Egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, mintha minden ütközés reakcióra vezetne, hiszen az eloszlás szempontjából a kétféle tárgyalási mód teljesen azonos értékű. A bekövetkező gyökcseréknek azonban csak azon része fog a (2) szerinti reakcióra vezetni, mely heterogén csere. A találkozási valószínűség tehát nem lesz azonos a reakció valószínűséggel, hanem annál mindig nagyobb lesz, vagy azzal egyenlő. Két D ütközése esetén homogén csere akkor következik be, ha az ütközés során azonos gyökök találkoznak, míg heterogén csere bekövetkezésének feltétele különböző gyökök találkozása és ütközése. A viszonyokat az alábbi táblázat szemlélteti, valamely D^i és D^j ütközése esetében, ha D^i képlete $R^i M X^i$ és D^j képlete $R^j M X^j$:

A D^i molekulán ütköző gyök	A D^j molekulán ütköző gyök	Csere	Reakció
R^i	R^j	homogén	nincs
R^i	X^j	heterogén	van
X^i	R^j	heterogén	van
X^i	X^j	homogén	nincs.

Fel kell tételeznünk továbbá azt is, hogy D^i és D^j ütközésekor a fenti négy eset egyenlően valószínű.

Látható, hogy a reakció és az ütközés eseménysűrűsége között a

$$(15) \quad \mu' = 2\mu$$

összefüggés áll fenn.

Ha $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy valamely kiszemelt M és T találkozzék Δt idő alatt, akkor a fentivel azonos feltételek mellett azt kapjuk, hogy $\lambda' = \lambda$ mivel minden ütközésnek heterogén cseréhez kell vezetnie.

Mivel pedig a találkozások valószínűségére semmiféle a priori kikötésünk nincs, a $D-D$ ütközés és $M-T$ ütközés azonos valószínűségű, amiből következik, hogy

$$(16) \quad \lambda' = \mu',$$

de (15) folytán és (16) alkalmazásával

$$\lambda = 2\mu \quad \text{és} \quad \frac{2\lambda}{\mu} = K = 4,$$

ahol K a (2) egyenlet szerinti reakció egyensúlyi állandója, ez pedig teljesen azonos azzal az eredménnyel, amelyet (1)-gyel kapunk a vizsgálat rendszerre *Calingaert* szerint.

Ebből látható, hogy amennyiben a priori feltevésekből vagy kísérleti adatokból kiindulva a reakció valószínűségekre vonatkozólag megállapításokat tudunk tenni, úgy a vázolt tárgyalási mód lehetőséget nyújt az egyensúlyi állapot koncentrációviszonyainak leírására. Másrészt viszont az egyensúlyi állandó ismeretében a reakció-valószínűségek hányadosát egyszerűen kiszámíthatjuk, és kinetikai vizsgálatokból származó adatok arra is módot nyújtanak, hogy ezek tényleges értékét is meghatározzuk. Ugyanis a (9) egyenlet $t = 0$ helyen vett közelítő értéke,

$$\left[\frac{dM_1(t)}{dt} \right]_{t=0} \approx -4\mu N^2,$$

lehetőséget nyújt μ és így λ kísérleti úton való meghatározására. Nem kell mást tennünk, mint a reakció kezdete utáni elegendő kis idő elteltével meghatározni a D koncentrációját. Tekintettel arra, hogy a stacionárius állapot beálltához szilánok esetén több órára van szükség, a fenti rövid időintervallum a kísérleti lehetőségek keretein belül van.

Mint ismeretes, az ily módon meghatározott valószínűség számértéke annak az átlagos időtartamnak a reciprokát jelenti, amely alatt az illető esemény bekövetkezik. Másrészt az időegység alatt bekövetkező molekula-ütközések száma ugyancsak kiszámítható. E két adat egybevetéséből ki lehet számítani, hogy az ütközések hányadrésze vezet gyökcsereire, illetve kémiai reakcióra. Ez az adat magában véve is igen értékes, és következtetni lehet belőle az egyes kémiai reakciók aktiválási energiájának viszonylagos nagyságára.

Mint látható, e tárgyalási módnak a szokásos kémiai tárgyalási módokkal szemben az az előnye is megvan, hogy a reakció-rend, illetőleg a reakció-mechanizmus ismerete nélkül a bruttó folyamat reakció-valószínűségei kiszámíthatók. Ez viszont megnyitja a lehetőséget annak, hogy exakt alapon felderítsük a reakció valódi mechanizmusát anélkül, hogy valamilyen hipotetikus reakciómechanizmust eleve feltételeznénk. Természetesen ehhez további kísérleti anyagra van szükség.

A módszer, mint látható, általánosabb a szokásos tárgyalásmódoknál és a modern valószínűségszámítási módszerek fokozottabb alkalmazásának előnyeire mutat rá kémiai reakciók leírásában.

IRODALOM

- [1] D. CALINGAERT: »The redistribution reaction.« *Journal of the American Chemical Society* 61 (1939) 2755—
 [2] P. D. ZEMAM—F. P. PRICE: »Kinetics and thermodynamic properties of the disproportionation of Aethylchlorosilanes.« *Journal of the American Chemical Society* 70 (1948) 4222—
 [3] RÉNYI A.: »Kémiai reakciók tárgyalása a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 83—103.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ С ОБМЕНОМ РАДИКАЛОВ КРЕМНЕОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. Секель и Т. Секель

Р е з ю м е

Авторы исследуют при помощи стохастических процессов реакции с обменом радикалов органических кремнегалогенидов, и сравнивают полученные результаты с формулой, примененной *Калингэром* для описания других металлоорганических равновесий с обменом радикалов. Авторам удалось установить связь между отдельными вероятностями реакций и постоянной химического равновесия на примере силанов. В работе дается также истолкование расхождения между полученными результатами и теорией *Калингэра*.

Кинематическое истолкование полученных результатов позволяет определить значение вероятностей, из которых можно вывести заключение насчет относительной величины энергии активации отдельных химических реакций. Таким образом можно получить данные о механизме химической реакции, без применения какой-либо предварительной гипотезы.

Исходя из уравнений *Колмогорова* реакций и пренебрегая дисперсией, авторы сообщают явное выражение для зависимости от времени средней концентрации, дающее одновременно и концентрацию в стационарном состоянии. Из стационарных концентраций определяется постоянная равновесия. Дается также распределение для стационарного состояния.

В случае силановых реакций с обменом радикалов, в которых часть реакций происходит только в одном направлении, теория *Калингэра* непригодна, ибо она применима только к определенным равновесным системам. При помощи вышеупомянутого метода и исходя из данного значения, авторы исследуют и такие системы, в которых концентрация исходного значения от $SiCl_4$ или от $Si(CH_3)_4$.

LA DISCUSSION D'ÉCHANGE DE RADICALES DES HALOGENIDES ORGANQUES DE SILICIUM À L'AIDE DU CALCUL DES PROBABILITÉS

G. SZÉKELY et T. SZÉKELY

Résumé

À l'aide des processus stochastiques, les auteurs discutent les réactions des halogénures organiques du silicium et mettent les résultats obtenus en parallèle à la formule de *Calingaert* appliquée pour la description de l'équilibre d'échanges de radicaux metallo-organiques. On a réussi de déterminer la relation entre les probabilités de réactions et la constante de l'équilibre chimique pour le cas des silanes. Le travail interprète la différence entre les résultats obtenus et ceux de *Calingaert*.

Par l'interprétation cinétique des résultats devient possible la détermination de la valeur effective des probabilités, dont on peut obtenir des conclusion sur la grandeur relative de l'énergie d'activation des réactions chimiques individuelles. De telle manière nous obtenons des indications sur le mécanisme de la réaction chimique sans qu'il foudrait faire des hypothèses préliminaires.

Les auteurs donnent pour la variation en temps de la concentration moyenne une formule explicite à l'aide des équations de *Kolmogoroff* conformes aux réactions, en négligeant la dispersion. À l'aide des concentrations stationnaires ils déterminent la constante d'équilibre. Ils donnent aussi la distribution pour l'état stationnaire.

En cas de réactions des silanes à échange de radicales, ou une partie de la réaction est unilatérale, la méthode de *Calingaert* n'est pas applicable, parceque celle-ci ne convient qu'à la discussion de systèmes d'équilibre. Les auteurs, à l'aide de la méthode précédente, discutent des systèmes, dans lesquelles la concentration du SiCl_4 et du $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$, respectivement, diminuent à zero d'une concentration initiale donnée.

BIZONYOS TÍPUSÚ REKURRENS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK VIZSGÁLATÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Jelen dolgozat a szerző korábbi vizsgálatait ([1] és [2]) fejleszti tovább. [1] és [2] dolgozatunkban olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkoztunk, amelyeknél meg lehetett adni egy rekurrens \mathcal{L} eseményt, amelynek előfordulási pontjai a folyamat regenerációs pontjait (Markov-pontjait) alkották. Megmutattuk, hogy sok esetben ilyen folyamatokkal kapcsolatos valószínűségszámítási kérdések megoldására célszerű először az átlagfüggvényt (a $(0, t)$ időintervallumban előforduló \mathcal{L} események várható számát) meghatározni, és ebből következtetni a kérdéses mennyiségekre. Ezt a módszert említett dolgozatainkban csupán néhány speciális esetre alkalmaztuk. Mostani tárgyalásunkban egy általánosabb típusú folyamatot tekintünk, amelyre a módszer közvetlenül ugyan nem alkalmazható, de fiktív folyamatok egyidejű szerepeltetésével a nehézségek elkerülhetők.

Az alábbi 1. §-ban először megfogalmazzuk a problémát, majd megmutatjuk, hogy a megoldást miként lehet visszavezetni bizonyos átlagfüggvények, illetve ezekkel kapcsolatos függvények meghatározására. A 2. §-ban a megoldás technikai kivitelét ismertetjük. Végül a 3. §-ban több példát tárgyalunk, amelyek alkalmazhatók részecskeszámlálásokkal kapcsolatos koincidenca-problémák, több gép egyidejű működésénél fellépő kérdések, telefonközpontok méretezése és egyéb koincidenca problémák megoldására.

1. §. A feladat kitűzése és a megoldás módszere

Tekintsünk egy Markov-láncot, amelynél az egyes állapotokat jelölje rendre E_1, E_2, \dots, E_m szimbólum (m lehet véges vagy végtelen). Legyen az $E_j \rightarrow E_k$ ($j, k = 1, 2, \dots, m$) átmenet valószínűsége p_{jk} . A Markov-lánccal kapcsolatos vizsgálatokban rendszerint azt tételezik fel, hogy a rendszer lépésről-lépésre változtatja állapotát, de nem vizsgálják közelebbről az átmenetek előfordulási időpontjainak sorozatát. Jelenlegi tárgyalásunkban olyan folyamatokat kívánunk vizsgálni, amelyeknél az átmenetek időpontjainak $\{t_n\}$ sorozata meghatározott törvényt követ. Mégpedig csupán azon speciális esettel kívánunk foglalkozni, amelynél a $\{t_n\}$ sorozat a következő feltételeknek tesz eleget:

a) $t_0 = 0$, azaz $t = 0$ időpontban előfordul egy átmenet.

b) A $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) időkülönbségek független, pozitív valószínűségi változók.

c) A $t_n - t_{n-1}$ valószínűségi változó ($n = 1, 2, 3, \dots$) eloszlása csupán attól függ, hogy a $t = t_{n-1}$ időpontban milyen állapotba került a rendszer. Ha a $t = t_{n-1}$ időpontban E_k állapotba került a rendszer, úgy ezen feltétel mellett legyen $t_n - t_{n-1}$ eloszlásfüggvénye $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$).

A fenti feltevések a vizsgálatunk tárgyát képező folyamat struktúráját egyértelműen meghatározzák. Ha ismerjük a $t = 0$ időpontban érvényes kezdeti állapotot, az átmenet-valószínűségek $[p_{jk}]$ mátrixát és az $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) eloszlásfüggvényeket, a felmerülő kérdésekre választ adhatunk. Előre kell bocsátani azonban, hogy ha folyamatunkat most már folytonosan változó időben tekintjük, úgy általában nem lesz Markov-féle, ha a rendszer állapotának leírására csupán az E_1, E_2, \dots, E_m szimbólumokat használjuk. Ha azonban az állapotteret kibővítjük egy újabb paraméter megadásával, amely azt mutatja, hogy mennyi ideje van a rendszer az illető állapotban, úgy a folyamat Markov-féle lesz. Általában is érvényes azonban, hogy folyamatunknál a $\{t_n\}$ időpontok regenerációs pontok (Markov-pontok).

A következőkben annak megállapításával foglalkozunk, hogy egy bizonyos t hosszúságú időintervallum alatt előforduló $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek száma, illetve az E_k állapotban való tartózkodás összhossza milyen eloszlást követ. Több esetet fogunk megkülönböztetni. Először a $(0, t)$ intervallumban vizsgáljuk a kérdéses valószínűségeket, majd az $(u, u + t)$ intervallumban. Végül megállapítjuk, hogy ezen utóbbi esetben mihez tartanak a kérdéses valószínűségek, ha $u \rightarrow \infty$, illetve, ha u a $(0, T)$ intervallumon egyenletes eloszlást mutató valószínűségi változó és $T \rightarrow \infty$. Ezen utóbbi két eset szolgáltatja a szigorúbb, illetve enyhébb értelemben vett stacionárius megoldást.

A fenti feladatnál az $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek alkotják a folyamat rekurrens \mathcal{C} eseményét. A folyamat kezdeti állapota egy konkrét feladatnál általában rögzítve van, de célszerű egyeidejűleg az összes lehetséges kezdeti állapotokkal rendelkező folyamatokat tekinteni, mert ezek a segítségül vett fiktív folyamatok jelentős könnyítést jelentenek problémáink megoldásánál.

A következő jelöléseket vezetjük be. Jelölje $F_{jk}(x)$ az egymást követő $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek közötti távolságok eloszlásfüggvényét. Ha a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban van, úgy jelölje $F_{ijk}(x)$ ezen feltétel mellett az első $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előfordulási pontja és a $t = 0$ pont közötti távolság eloszlásfüggvényét. Jelölje továbbá $G_k(x)$ az egymást követő azon időpontok közötti távolságok eloszlásfüggvényét, amelyekben a rendszer éppen E_k állapotba kerül. Végül $G_{ik}(x)$ jelölje a kezdőpont és az első E_k állapotba jutás időpontja közötti távolság eloszlásfüggvényét, azon feltétel mellett, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban van. Megjegyezzük, hogy nyilvánvalóan fennállnak az $F_{kjk}(x) = F_{jk}(x)$ és $G_{kk}(x) = G_k(x)$ azonosságok.

Ha a felsorolt eloszlásfüggvényeket ismernénk, a kérdéses valószínűségek meghatározása nem jelentene különösebb nehézséget, ugyanis ez csupán független valószínűségi változók összegei eloszlásának vizsgálatát kívánja meg. Ezekkel a kérdésekkel a következő fejezetben részletesebben fogunk foglalkozni.

A p_{jk} valószínűségek és az $F_k(x)$ eloszlásfüggvények ismeretében a fent felsorolt eloszlásfüggvények meghatározhatók ugyan, de ez elég hosszadalmas megfontolásokat igényel. Ezzel szemben a legtöbb ilyen probléma

olyan természetű, hogy bizonyos várható értékek meghatározása könnyen keresztülvihető. Az alábbiakban éppen azt mutatjuk be, hogy ezen várható értékek segítségével miképpen lehet a kérdéses eloszlásfüggvényeket meghatározni. Előrebocsátjuk, hogy a következő tárgyalás nem tételezi fel a p_{jk} valószínűségek ismeretét, sőt az eddigieknél általánosabban megengedhetjük, hogy a p_{jk} valószínűségek esetleg függhetnek az $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előtt az E_j állapotban töltött időtartamtól.

Mindenekelőtt a következő mennyiségeket vezetjük be. Jelölje $m_{ijk}(t)$ a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek várható számát azon feltétel mellett, hogy a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt a rendszer. Ha speciálisan $i = k$, úgy legyen rövidség kedvéért: $m_{kjk}(t) = m_{jk}(t)$. Legyen továbbá $\tau_{ik}(t)$ az E_k állapotban való tartózkodás összidőtartamának várható értéke a $(0, t)$ intervallumban, azon feltétel mellett, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt. Speciálisan a $k = i$ esetben legyen rövidség kedvéért $\tau_{ii}(t) = \tau_i(t)$. Végül $P_{ik}(t)$ jelentse annak a valószínűségét, hogy a rendszer a t időpontban E_k állapotban van, feltéve, hogy a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt. Ha speciálisan $k = i$, úgy legyen $P_{ii}(t) = P_i(t)$.

Könnyen belátható, hogy most fennállnak a következő összefüggések:

$$(1) \quad m_{ijk}(t) = F_{ijk}(t) + F_{ijk}(t) \times F_{jk}(t) + F_{ijk}(t) \times F_{jk}(t) \times F_{jk}(t) + \dots,$$

ahol a \times jel a kompozíció jele. Továbbá

$$(2) \quad P_{ik}(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t [1 - F_k(t-u)] dm_{ijk}(u) + \delta_{ik} [1 - F_k(t)],$$

(ahol $\delta_{ik} = 0$, ha $i \neq k$ és $\delta_{kk} = 1$); valamint

$$(3) \quad \tau_{ik}(t) = \int_0^t P_{ik}(u) du.$$

Legtöbb gyakorlati feladatnál $m_{ijk}(t)$, $P_{ik}(t)$ és $\tau_{ik}(t)$ vagy legalábbis ezek közül bizonyosak könnyen meghatározhatók. Most ezek segítségével kívánjuk a szükséges, de egyelőre ismeretlen eloszlásfüggvényeket meghatározni. Evégett Laplace—Stieltjes transzformáltakra térünk át, mégpedig jelölje $F_k(x)$, $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ transzformáltjait rendre $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$. Ha most az (1) és a (3) formulákban Laplace—Stieltjes-transzformációra térünk át, azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_{ijk}(t) = \frac{\varphi_{ijk}(s)}{1 - \varphi_{jk}(s)},$$

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\tau_{ik}(t) = \frac{1 - \varphi_k(s)}{s} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\varphi_{ijk}(s)}{1 - \varphi_{jk}(s)} + \delta_{ik} \right].$$

Az itt felírt egyenletek segítségével a $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$ és $\varphi_{ijk}(s)$ mennyiségek könnyen meghatározhatók. Ha ugyanis (4)-ben az $i = k$ választással élünk, úgy $\varphi_{kjk}(s) = \varphi_{jk}(s)$ lévén, a $\varphi_{jk}(s)$ mennyiségek sorban meghatározhatók.

Ezek ismeretében azután (4) segítségével a $\varphi_{ijk}(s)$ mennyiségek is meghatározhatók. Végül (5) segítségével a $\varphi_k(s)$ mennyiségek is előállíthatók. A Laplace—Stieltjes transzformáltak ismeretében a megfelelő eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

Csupán $G_k(x)$ és $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása van még hátra. Ezek kiszámítására bevezetünk egy új függvényt. Jelölje folyamatunknál $M_{ik}(t)$ az E_k állapotba jutás időpontjainak várható számát a $(0, t)$ időintervallumban, azon feltétel mellett, hogy a kezdeti állapot E_i volt. Az $M_{ik}(t)$ várható értékek az $m_{ijk}(t)$ függvények segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(6) \quad M_{ik}(t) = \sum_{j=1}^m m_{ijk}(t).$$

Az (1) előállításához hasonlóan pedig felírható, hogy

$$(7) \quad M_{ik}(t) = G_{ik}(t) + G_{ik}(t) * G_k(t) + G_{ik}(t) * G_k(t) * G_k(t) + \dots,$$

ami abból következik, hogy az első E_k -állapotba jutásig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye $G_{ik}(t)$, míg a szomszédos E_k állapotokba jutások között eltelt időtartamok eloszlásfüggvénye $G_k(x)$. (7)-ből Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dM_{ik}(t) = \frac{\psi_{ik}(s)}{1 - \psi_k(s)}.$$

Ha (8)-ban $i = k$, úgy $\psi_{ik}(s) = \psi_k(s)$ lévén, a $\psi_k(s)$ ismeretlenek sorban meghatározhatók és ezek ismeretében (8) segítségével azután a $\psi_{ik}(s)$ ismeretlenek is megkaphatók. A Laplace—Stieltjes transzformáltak megfordításával azután a $G_k(x)$ és $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

1. megjegyzés: Megemlítjük, hogy az (5) képletet a fentiekre való tekintettel a következő, vele ekvivalens alakban is felírhatjuk:

$$(9) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} d\tau_{ik}(t) = \frac{1 - \varphi_k(s)}{s} \left[\frac{\psi_{ik}(s)}{1 - \psi_k(s)} + \delta_{ik} \right].$$

2. megjegyzés: Az eddigiekben megengedtük, hogy a p_{jk} valószínűségek esetleg függhetnek attól az időtartamtól, amelyet a rendszer az $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előtt az E_i állapotban tölt. Ha most speciálisan feltesszük, hogy a p_{jk} valószínűségek függetlenek ettől az időtartamtól, úgy felírható a következő összefüggés:

$$(10) \quad G_{ik}(x) = \sum_{j \neq k} p_{ij} \int_0^x G_{jk}(x-u) dF_i(u) + p_{ik} F_i(x);$$

innen Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve a

$$(11) \quad \psi_{ik}(s) = \varphi_i(s) \left[\sum_{j \neq k} p_{ij} \psi_{jk}(s) + p_{ik} \right]$$

egyenletrendszeret nyerjük, ahonnan $\varphi_i(s)$ és p_{ij} ismeretében a $\psi_{ik}(s)$ transzformáltak meghatározhatók. Ez egy másik eljárást szolgáltat a $G_{ik}(x)$ illetve $G_k(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására, amely azonban csak speciálisan alkalmazható és megkívánja a p_{jk} valószínűségek ismeretét is.

3. megjegyzés: A fenti folyamattal kapcsolatban célszerű még egy új eloszlásfüggvényt bevezetni, éspedig az \bar{E}_k (az E_k -n kívüli) állapotokban töltött időtartamok eloszlásfüggvényét, amelyet jelöljön $H_k(x)$. (Ha a $t = 0$ időpontban E_i ($i \neq k$) állapotban volt a rendszer, úgy az első \bar{E}_k állapotban töltött idő eloszlásfüggvénye $G_{ik}(x)$, míg az $i = k$ speciális esetben a $t = 0$ időpontban már E_k állapotban volt a rendszer és így ennek nincs szerepe.) Jelölje továbbá $H_k(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját $\chi_k(s)$.

$H_k(x)$ a következő összefüggésből határozható meg:

$$(12) \quad G_k(x) = \int_0^x H_k(x-y) dF_k(y);$$

innen Laplace-transzformációra áttérve a

$$\psi_k(s) = \chi_k(s) \varphi_k(s)$$

összefüggést nyerjük, ahonnan $\chi_k(s)$ kiszámítható és ennek megfordításával $H_k(x)$ egyértelműen meghatározható.

A fenti megfontolásokból látszik, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények ismeretében a (4), (5) és (8) formulák segítségével az $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_{jk}(x)$ és $G_k(x)$ eloszlásfüggvények sorban meghatározhatók. Az $F_i(x)$ eloszlásfüggvények kiszámításához azonban szükséges $\tau_{ik}(t)$ [vagy ami vele egyenértékű, $P_{ik}(t)$] ismerete, amikor is az (5) képlet alkalmazható. Természetesen a fenti formulák sokféle kombinációban is alkalmazhatók. A lényeg az, hogy $m_{ijk}(t)$ és $\tau_{ik}(t)$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) ismeretében a kérdéses eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók. Ezek ismeretében a felvetett problémák megoldása már nem jelent különösebb nehézséget, ugyanis a független valószínűségi változók összegezésének szokásos eljárása egyszerűen célravezető.

Megjegyezzük még, hogy ha a tekintetbe vett folyamat Markov-féle, úgy a folyamat jellemzésére elegendő a $P_{ik}(t)$ valószínűségeket ismerni, ugyanis ekkor $P_{ik}(t)$ segítségével $\tau_{ik}(t)$ mellett az $m_{ijk}(t)$ várható értékek is könnyen meghatározhatók.

2. §. A kérdéses valószínűségek meghatározása

Vizsgáljuk először a rekurrens \mathcal{L} események számának eloszlását. Ha folyamatunk kezdetben az E_i állapotban volt és a rekurrens \mathcal{L} eseményeket az $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek alkotják, úgy érvényes, hogy az első \mathcal{L} esemény előfordulási pontja a kezdőpont közötti távolság eloszlásfüggvénye $F_{ijk}(x)$, míg a szomszédos \mathcal{L} események közötti távolság eloszlásfüggvénye $F_{jk}(x)$. Meggondolásainkat végezzük el csupán arra a speciális esetre, midőn a kezdeti állapot E_k , vagyis amikor $F_{kjk}(x) = F_{jk}(x)$. Ekkor az egymást követő \mathcal{L} események előfordulási pontjaira, a $\{t'_n\}$ sorozatra fennáll, hogy a $t'_n - t'_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$; $t'_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású füg-

getlen pozitív valószínűségi változók. A következőkben egyszerűség kedvéért ezen változók közös eloszlásfüggvényét jelölje $F_{jk}(x)$ helyett $P(x)$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az \mathcal{L} rekurrens esemény,

$$(13) \quad W(t, n) = \mathbf{P}(t < t'_{n+1}) = 1 - \mathbf{P}(t'_{n+1} \leq t) = 1 - P_{n+1}(t),$$

ahol $P_0(t) = 1$, ha $t \geq 0$, és $P_0(t) = 0$, ha $t < 0$, továbbá $P_n(t)$ a $P(t)$ -nek önmagával való n -szeres kompozícióját jelöli.

Legyen most $m(t) = m_{kjk}(t)$ a $(0, t)$ intervallumban előforduló események várható száma, úgy erre fennáll,

$$(14) \quad m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t).$$

Az $(u, u + t)$ intervallumra vonatkozó megfelelő valószínűséget, azaz annak a valószínűségét, hogy ebben az intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az \mathcal{L} esemény,

$$(15) \quad W_u(t, n) = 1 - P_u^*(t) \star P_n(t),$$

szolgáltatja, ahol

$$(16) \quad P_u^*(t) = \int_u^{u+t} [1 - F(u + t - x)] dm(x).$$

Ha $P(x)$ nem rácsos eloszlás és átlaga, μ véges, úgy fennáll (*D. Blackwell* [3], *J. L. Doob* [4]), hogy $\lim_{u \rightarrow \infty} P_u^*(t) = P^*(t)$, ahol

$$(17) \quad P^*(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - P(x)] dx,$$

és ekkor $\lim_{u \rightarrow \infty} W_u(t, n) = W^*(t, n)$, ahol

$$(18) \quad W^*(t, n) = 1 - P^*(t) \star P_n(t).$$

Ez szolgáltatja a stacionárius megoldást, vagyis végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén annak a valószínűségét, hogy t időtartam alatt az \mathcal{L} esemény legfeljebb n -szer fordul elő.

A fenti $W^*(t, n)$ valószínűség-eloszlás olyan esetekben is létezik, midőn $P(x)$ rácsos eloszlás, ekkor azonban nem tekinthető $W_u(t, n)$ határértékének. Kérdés nem lehet-e ekkor is $W^*(t, n)$ -nek valamilyen értelmezést tulajdonítani. Most megmutatjuk, hogy a stacionárius $W^*(t, n)$ megoldásnak adható egy enyhébb értelmezése is, amely nem tesz kikötést $P(x)$ -re vonatkozóan. Ez a következő: Válasszunk a $(0, T)$ intervallumon egy egyenletes eloszlást mutató véletlen u pontot. Ettől a ponttól kezdve felmérjük

a t hosszúságú intervallumot és kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az \mathcal{L} esemény. Ez a valószínűség

$$(19) \quad \bar{W}_T(t, n) = 1 - \bar{P}_T(t) * P_n(t),$$

ahol most

$$(20) \quad \bar{P}_T(t) = \int_0^t [1 - P(t-x)] \frac{m(T+x) - m(x)}{T} dx.$$

Ha $P(x)$ átlaga, μ véges, úgy most minden feltétel nélkül fennáll $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(t) = P^*(t)$, azaz

$$(21) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{W}_T(t, n) = W^*(t, n),$$

ahol $W^*(t, n)$ -et (18) értelmezi. Ezen utóbbi megoldást is gyakran nevezzük stacionárius megoldásnak és számos fizikai problémánál tekintjük az egyensúlyi állapotra vonatkozó megoldásnak. Ennek előnye az, hogy olyan esetekben is létezik, midőn a szigorú értelemben vett stacionárius megoldás nem létezik.

A fenti tárgyalásnál feltételeztük, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_k állapotban van. Ha a $t = 0$ időpontban egyéb állapotban van a rendszer, úgy a fenti tárgyalás csupán nyilvánvaló módosítást kíván.

Ezután azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az E_k állapotban töltött időtartam $(0, t)$ intervallumba eső összhossza milyen eloszlást követ. Jelölje $\Omega(t, z)$ annak a valószínűségét, hogy ez az összhossz legfeljebb z nagyságú. Most folyamatunkban célszerűen kétféle állapotot különböztethetünk meg: E_k állapotban vagy E_k állapoton kívül (röviden \bar{E}_k állapotban) van a rendszer. Az egymást követő E_k állapotokban való tartózkodások időtartamának eloszlásfüggvénye $F_k(x)$, az első E_k állapotba jutás és a kezdőpont közötti távolság eloszlásfüggvénye $G_{ik}(x)$, ha kezdetben E_i állapotban van a rendszer. Az egymást követő \bar{E}_k állapotokban töltött időtartamok eloszlásfüggvénye pedig $H_k(x)$. Legyen rövidség kedvéért most $F_k(x) = L(x)$ és $H_k(x) = H(x)$. Ha kezdetben a rendszer E_k állapotban van, úgy eszik az első \bar{E}_k állapotban töltött időtartam szerepe, amelynek eloszlása különben $G_{ik}(x)$ lenne. Ennek figyelembevétele nem okoz különös gondot, most azonban egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_k állapotban van. Ekkor a keresett valószínűség:

$$(22) \quad \Omega(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t-z) [L_{n-1}(z) - L_n(z)]$$

és innen következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallumban az \bar{E}_k állapotban töltött időtartam $\leq z$:

$$(23) \quad 1 - \Omega(t, t-z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(t-z) [H_n(z) - H_{n+1}(z)].$$

Az $(u, u + t)$ intervallumra vonatkozó valószínűség hasonlóan határozható meg, vagy pedig visszavezethető $\Omega(t, z)$ ismeretére. A stacionárius megoldás hasonló tárgyalást kíván, mint az \mathcal{L} esemény tárgyalásánál történt. (A fentiekkel kapcsolatban utalunk [5] dolgozatunkra, ahol $\Omega(t, z)$ meghatározásának módszerét ismertettük.)

3. §. Példák

1) Tegyük fel, hogy a rendszernél csupán $E_i \rightarrow E_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) és $E_m \rightarrow E_1$ átmenetek lehetségesek. Ekkor, mint könnyen belátható, elegendő az $F_k(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása, a többiek automatikusan adódnak. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_m állapotba került. Jelölje ekkor a $(0, t)$ intervallumban előforduló $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek várható számát $m_i(t)$ [$= m_{m,i,i+1}(t)$] és az E_k állapotban töltött idő várható értékét $\vartheta_k(t)$ [$= \tau_{mk}(t)$]. Ekkor $F_k(x)$ Laplace — Stieltjes transzformáltja $\varphi_k(s)$. A $\varphi_k(s)$ ismeretlenek a (4) és (5) szerint fennálló következő egyenletekből határozhatók meg:

$$(24) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_i(t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_i(s)}{1 - \varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_m(s)}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

vagy

$$(25) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\vartheta_i(t) = \frac{1 - \varphi_i(s)}{s} \left[\frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_{i-1}(s)}{1 - \varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_m(s)} + \delta_{im} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol itt $\varphi_0(s) = \varphi_m(s)$ értendő.

A (24) és (25) egyenletek nemcsak külön-külön, hanem kombinálva is alkalmazhatók az ismeretlenek meghatározására. Az [1] és [2] dolgozatban tárgyalt példák ennek azt a speciális esetét képezték, midőn $m = 2$ volt, és $F_1(x)$ exponenciális eloszlást írt le.

2) Tekintsünk m számú homogén Poisson-folyamatot, melyek mindegyikében p az eseményűrűség. Tegyük fel, hogy minden egyes folyamatban a $0 \leq t < \infty$ időpontokban bekövetkező mindazon események elindítanak egy-egy exponenciális időtartamú történést, mégpedig mindegyik folyamatban α időtartamú átlagértékkel, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn az illető folyamatban éppen nem folyik történet. Az olyan események, amelyek egy történet folyama alatt fordulnak elő, hatástalanok. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_i állapotban van, ha az m számú folyamat közül t időpontban i folyamatban folyik történet és $(m-i)$ -ben nem. Ekkor ennél a rendszernél csak $E_i \rightarrow E_{i+1}$ és $E_i \rightarrow E_{i-1}$ típusú átmenetek fordulhatnak elő. Meg akarjuk határozni annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időintervallumban előforduló $E_i \rightarrow E_{i+1}$ vagy $E_{i+1} \rightarrow E_i$ átmenetek száma legfeljebb n legyen, vagy hogy $(0, t)$ időintervallumban az E_k állapotban töltött összidőtartam legfeljebb z legyen. Mint már az általános tárgyalásban is említettük, a speciálisan vizsgált folyamatunk mellett, amelynek kezdeti állapota E_0 , célszerű olyan segédfolyamatokat is tekinteni, amelyeknél a

kezdőállapot rendre E_1, E_2, \dots, E_m . Megjegyezzük, hogy az itt vizsgált folyamatok a folyamatosan változó időben Markov-félék, sőt, könnyen kimutatható, hogy csakis abban az esetben Markov-félék, ha a történések időtartamai exponenciális eloszlásúak.

A fenti példával kapcsolatban gondolhatunk m számú Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásra. Ekkor p jelenti az egyes számlálókhoz érkező részecskék eseménysűrűségét, a a kisülések átlagos hosszát és az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek alkotják az $(i+1)$ -szeres koincidenciákat. Az alábbi eredmények segítségével megoldhatjuk azt a feladatot, hogy mennyi lesz bizonyos idő alatt észlelt koincidenciák számának eloszlása. Egy másik példát energiaszolgáltatókkal kapcsolatban említünk meg. Tegyük fel, hogy egy üzemben m gép működik. Mindegyik gép szakaszosan működik, és pedig a működési sűrűség p , és egy működési szakasz átlagos hossza a . Ekkor E_k állapot jelöli azt, hogy egyidejűleg k gép működik.

Az alábbi eredmények segítségével megállapítható például, hogy bizonyos idő alatt k (vagy annál több) egyidejű fogyasztás időtartama milyen eloszlást követ, és ennek ismeretében megállapítható az energiaszolgáltató gazdaságos méretezése.

Jelölje most $P_{ij}(t)$ annak a valószínűségét, hogy ha kezdetben a rendszer E_i állapotban volt, úgy t időpontban E_j állapotban lesz. Azt állítjuk, hogy a $P_{ij}(t)$ mennyiségek ismerete elegendő folyamatunk jellemző adatainak meghatározására. Erre nézve előző fejtegetéseinkre való hivatkozással elegendő kimutatni, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények kifejezhetők a $P_{ij}(t)$ valószínűségek segítségével. Ez pedig így is van, ugyanis egyszerűen belátható, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$(26) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = p(m-j)P_{ij}(t)$$

és

$$(27) \quad m'_{i,j,j}(t) = \frac{j}{a}P_{ij}(t).$$

Így tehát csak $P_{ij}(t)$ meghatározása marad hátra. Erre nézve vezessünk be két újabb valószínűséget. $Q_0(t)$ jelentse annak a valószínűségét, hogy az m folyamat közül egy kiszemeltben t időpontban folyamatban van egy történet, feltéve, hogy $t=0$ időpontban nem volt folyamatban történet és $Q_1(t)$ jelentse ugyanezen valószínűséget, azon feltétel mellett, hogy $t=0$ időpontban folyamatban van egy történet. Ezen valószínűségekre könnyen beláthatóan fennáll, hogy

$$(28) \quad Q_0(t) = \frac{ap}{1+ap} \left(1 - e^{-\frac{1+ap}{a}t} \right),$$

ami könnyen nyerhető a

$$Q_0(t + \Delta t) = Q_0(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{a} \right) + [1 - Q_0(t)]p\Delta t + o(\Delta t)$$

reláció tekintetbevételével. Ugyanis innen $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel

$$Q_0'(t) + \frac{1+ap}{a} Q_0(t) = p$$

differenciálegyenletet nyerjük, amelynek megoldása $Q_0(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett (28). Hasonló megfontolással kapjuk, hogy

$$(29) \quad Q_1(t) = \frac{ap}{1+ap} + \frac{1}{1+ap} e^{-\frac{1+ap}{a}t}.$$

(28) és (29) segítségével azt kapjuk, hogy

$$(30) \quad P_{ij}(t) = \sum_k \binom{i}{k} \binom{m-i}{j-k} [Q_0(t)]^k [Q_1(t)]^{j-k} [1-Q_0(t)]^{i-k} [1-Q_1(t)]^{m-i-j+k},$$

amelynek fennállása egyszerű megfontolással igazolható. A (30) képlet ismeretében az általános tárgyalás most már alkalmazható. Megjegyezzük még, hogy esetünkben a p_{jk} valószínűségek függetlenek az E_j állapotokban töltött időtartamoktól, és pedig

$$p_{j,j+1} = \frac{ap(m-j)}{j+ap(m-j)}, \quad p_{j,j-1} = \frac{j}{j+ap(m-j)},$$

egyébként pedig $p_{jk}=0$. Továbbá könnyen belátható, hogy

$$F_j(x) = 1 - e^{-\frac{j+ap(m-j)}{a}x},$$

ha $x \geq 0$. Így a (11) képlet is alkalmazható a $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására.

A továbbiakban egyszerűség kedvéért szorítkozunk $m=2$ esetre és az $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek tanulmányozására. Jelölje az egymást követő $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek közötti távolság eloszlásfüggvényét $F_{12}(x)$ és Laplace–Stieltjes transzformáltját $\varphi_{12}(s)$. Ekkor (4) szerint, azt $m_{212}(t)$ -re alkalmazva, és tekintetbevé (26)-ot; amely szerint $m'_{212}(t) = pP_{21}(t)$, azt kapjuk, hogy

$$(31) \quad p \int_0^\infty e^{-st} P_{21}(t) dt = \frac{\varphi_{12}(s)}{1 - \varphi_{12}(s)},$$

ahonnan $\varphi_{12}(s)$ meghatározható; ugyanis

$$(32) \quad P_{21}(t) = 2 Q_1(t) [1 - Q_1(t)].$$

Ha a kezdőpont és az első $E_1 \rightarrow E_2$ átmenet távolságának eloszlás-függvénye $F_{012}(x)$ és Laplace–Stieltjes transzformáltja $\varphi_{012}(s)$, úgy (4) szerint, tekintetbevé, hogy $m'_{012}(t) = pP_{01}(t)$ azt kapjuk, hogy

$$(33) \quad p \int_0^\infty e^{-st} P_{01}(t) dt = \frac{\varphi_{012}(s)}{1 - \varphi_{12}(s)}.$$

Ha már $\varphi_{12}(s)$ -et ismerjük, úgy innen $\varphi_{012}(s)$ is meghatározható, ugyanis

$$(34) \quad P_{01}(t) = 2Q_0(t) [1 - Q_0(t)].$$

Ha a folyamat kezdeti állapota E_2 , úgy az $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek eloszlásának meghatározására elegendő $\varphi_{12}(s)$ ismerete. Erre (31) és (32) alapján az adódik, hogy

$$(35) \quad \varphi_{12}(s) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2ap}{(1+ap)^2} \left[\frac{p}{s} + \frac{1-ap}{as+1+ap} - \frac{1}{as+2(1+ap)} \right]}.$$

Innen speciálisan $F_{12}(x)$ átlaga

$$(36) \quad \mu_{12} = \int_0^\infty x dF_{12}(x) = \frac{(1+ap)^2}{2ap^2}$$

és szórásnégyzete

$$(37) \quad \sigma_{12}^2 = \int_0^\infty (x - \mu_{12})^2 dF_{12}(x) = \frac{(1+ap)[(1+ap)^3 + 2ap(1-2ap)]}{4a^2p^4}.$$

Ezen kifejezések segítségével a kettős koincidenenciák eloszlására már elég jó becslések adhatók. Nevezetesen a t idő alatt észlelt kettős koincidenenciák száma aszimptotikusan normális eloszlást követ t/μ_{12} átlaggal és $\sigma_{12}^2 t/\mu_{12}^3$ szórásnégyzettel.

3) Tekintsünk most egy λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot. Tegyük fel, hogy a $0 \leq t < \infty$ időintervallumban előforduló valamennyi esemény létrehoz egy-egy történést. Feltesszük, hogy az egyes történések időtartamai egymástól függetlenek és mindegyik exponenciális eloszlást követ a átlaggal. Azt mondjuk, hogy a rendszer a t időpontban E_k állapotban van, ha az éppen folyó történések száma k ($k = 0, 1, 2, \dots$ lehet).

Észrevesszük, hogy az így definiált folyamat Markov-féle, ha a folyamatosan változó időben tekintjük és megjegyezzük, hogy csakis akkor Markov-féle, ha a történések exponenciális eloszlásúak. Erre a folyamatra példaképpen lehet említeni telefonközpontokba érkező hívások folyamatát. Ha λ jelöli a hívások sűrűségét, a a beszélgetések időtartamának átlagát, úgy a rendszer E_k állapotban van, ha egyidejűleg k vonalon történik beszélgetés. Az alábbi eredmények segítségével meghatározható például annak a foglaltsági időnek az eloszlása, amely alatt k (vagy annál több) beszélgetés folyik. Ezen eloszlás ismeretében a telefonközpont méretezésére vonatkozóan állapíthatunk meg fontos adatokat.

Ebben a folyamatban csupán $E_k \rightarrow E_{k+1}$ és $E_k \rightarrow E_{k-1}$ átmenetek fordulhatnak elő. Célszerű most is bevezetni a vizsgált folyamat mellett olyan fiktív folyamatokat, amelyeknél a kezdeti állapot E_0 mellett rendre E_1, E_2, \dots . Jelölje $P_{ik}(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban E_k állapot van egy olyan folyamatnál, amelynél a rendszer kezdeti állapota E_i .

Azt állítjuk, hogy a $P_{ik}(t)$ mennyiségek ismerete elegendő a felmerülő valószínűségeloszlások meghatározására. Erre elegendő megmutatni, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények kifejezhetők a $P_{ik}(t)$ valószínűségek segítségével. Ez pedig igaz, ugyanis könnyen beláthatóan fennáll

$$(38) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = \lambda P_{ij}(t)$$

és

$$(39) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = \frac{j}{\alpha} P_{ij}(t).$$

Így tehát elegendő $P_{ij}(t)$ meghatározása. Erre nézve fennáll, hogy

$$(40) \quad P_{ij}(t) = \sum_{k=i-j}^i \frac{e^{-\lambda \int_0^t [1-H(u)] du} \left\{ \lambda \int_0^t [1-H(u)] du \right\}^{j-k}}{(j-k)!} \binom{i}{k} [H(t)]^k [1-H(t)]^{i-k},$$

- ahol $H(t) = 1 - e^{-t/\alpha}$, ha $t \geq 0$. (40) fennállása könnyen indokolható azon tény segítségével, hogy ha tudjuk, hogy a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett az n számú előfordulási pont eloszlása megegyezik ezen az intervallumon n számú egyenletes eloszlású független véletlen pont együttes eloszlásával. $P_{ij}(t)$ (40) alakjának egy másik indokolása Rényi A. [6] munkájában közölt eredményekből nyerhető. A $P_{ij}(t)$ valószínűségek ismeretében általános tárgyalásunk már alkalmazható.

Megjegyezzük, hogy a fent tárgyalt folyamatnál a p_{jk} valószínűségek függetlenek az E_j állapotokban töltött időtartamoktól, és pedig könnyen beláthatóan fennáll, hogy $p_{j,j+1} = \lambda \alpha / (j + \lambda \alpha)$, $p_{j,j-1} = j / (j + \lambda \alpha)$, és

egyébként $p_{jk} = 0$. Továbbá most $F_j(x) = 1 - e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha}x}$, ha $x \geq 0$. Így a (11) képlet is alkalmazható a $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására.

Ha speciálisan csak az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek közötti távolságok eloszlásfüggvénye, $F_{i,i+1}(x)$ érdekel bennünket, úgy ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja, $\varphi_{i,i+1}(s)$, a (4)-ből kapható, ha $m_{i+1,i,i+1}(t)$ választással élünk és (38)-at tekintetbe vesszük. Ekkor ugyanis fennáll

$$(41) \quad \lambda \int_0^\infty e^{-st} P_{i+1,i}(t) dt = \frac{\varphi_{i,i+1}(s)}{1 - \varphi_{i,i+1}(s)},$$

ahonnan $\varphi_{i,i+1}(s)$ meghatározható. Ennek ismeretében az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek számának eloszlása már meghatározható. A $P_{ik}(t)$ valószínűségek ismeretében az összes többi felmerülő probléma is megoldható.

A fenti példák mindegyikében a kérdéses eloszlások Laplace—Stieltjes transzformáltjait határoztuk meg, amelyek visszatranszformálása sokszor nem könnyű feladat. Azonban ennek a tárgyalásnak van egy jó oldala is, és pedig a Laplace-transzformáltak ismeretében a kérdéses eloszlások átlagai, szórásai és magasabb momentumai könnyen meghatározhatók és ezek segítségével az aszimptotikus eloszlások is felírhatók. Nevezetesen enyhe feltételek mellett érvényes, hogy a rekurrens \mathcal{E} esemény előfordulásainak száma aszimptotikusan normális eloszlást követ.

IRODALOM

- [1] TAKÁCS L.: »Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamatokról.« *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 525—541.
- [2] TAKÁCS L.: »Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 135—151.
- [3] D. BLACKWELL: »A renewal theorem.« *Duke Mathematical Journal* 15 (1948) 145—150.
- [4] J. L. DOOB: »Renewal theory from the point of view of the theory of probability.« *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948) 422—438.
- [5] L. TAKÁCS: »Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 2 (1951) 275—298.
- [6] A. RÉNYI: »On some problems concerning Poisson processes.« *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 2 (1951) 66—73.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Л. Такач

Резюме

Рассмотрим стохастический процесс с возможными состояниями: E_1, E_2, \dots, E_m (где m конечно или бесконечное число). Предположим, что система изменяет свое состояние только в моментах времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), где последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $t_0 = 0$; то есть в момент $t = 0$ происходит переход.
 b) Разности $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) не зависимые положительные случайные величины.

c) Распределение случайной величины $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) зависит только от состояния, в которое система переходит в момент $t = t_{n-1}$. Если в момент $t = t_{n-1}$ система попадает в состояние E_k , то обозначим функцию распределения $t_n - t_{n-1}$ через $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$).

Пусть далее $t = 0$ исходное положение, соответствующее моменту E_i . Обозначим через $m_{ijk}(t)$ математическое ожидание для числа переходов $(0, t)$ в интервале времени $E_j \rightarrow E_k$ и через $\tau_{ik}(t)$ ожидание для времени проведенного в состоянии $(0, t)$ в интервале времени E_k . Пусть далее $P_{ik}(t)$ вероятность того, что система находится в момент t в состоянии E_k , если только в момент $t = 0$ она находится в состоянии E_i .

Наша задача — определить распределение числа переходов $E_j \rightarrow E_k$, происходящих в течение времени t , также как и функцию распределения времени, проведенного в этом состоянии.

Если известны перечисленные ниже функции распределения, то искомые вероятности легко определить при помощи методов исследования сумм независимых случайных величин. (Это излагается в § 2). Необходимые функции распределения следующие: Пусть $F_{jk}(t)$ обозначает функцию распределения расстояний между последовательными переходами $E_j \rightarrow E_k$.

Пусть $F_{ijk}(x)$ обозначает функцию распределения между начальной точкой и первым переходом $E_j \rightarrow E_k$, предполагая, что при $t = 0$ система находится в состоянии E_i . Обозначим далее через $G_k(x)$ функцию распределения расстояния между моментами времени, в которых система попадает в состояние E_k . Обозначим наконец через $G_{ik}(x)$ функцию распределения расстояния между начальной точкой и первым попадением в состояние E_k , при условии, что в момент $t = 0$ система находится в состоянии E_i .

В последующем, однако, предположим известным лишь средние функции $m_{ijk}(t)$ и $\tau_{ik}(t)$, которые для ряда проблем определяют непосредственно. Если теперь рассматривать одновременно все процессы с исходными состояниями E_1, E_2, \dots, E_m , то преобразованные Лапласа-Стильтьеса $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$ функций распределения $F_k(x)$, $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ можно вычислять при помощи формул (4), (5) и (8), а их обращением можно однозначно определить функции распределения.

Для вышеописанного процесса моменты времени t_n образуют моменты восстановления процесса, чем дается возможность для применения нашей методики, исходной точкой которой являются предположенные известными средние функции. Если сверх этого рассматриваемый процесс является и марковским, то достаточно знать вероятности $P_{ik}(t)$; исходя из этих вероятностей, можно дать ответ на все возникающие вопросы. В заключение рассматриваются некоторые проблемы совпадения счета частиц.

SOME INVESTIGATIONS CONCERNING RECURRENT STOCHASTIC PROCESSES OF A CERTAIN TYPE

L. TAKÁCS

Summary

Let us consider a stochastic process, the possible states of which are E_1, E_2, \dots, E_m (the number of states may be finite or denumerably infinite). Suppose that the system changes its state only in the moments t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), and that the sequence $\{t_n\}$ satisfies the following conditions:

- a) $t_0 = 0$ i. e. in the moment $t = 0$ there occurs a transition.
- b) The time differences $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) are mutually independent positive random variables.
- c) The distribution of the random variable $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) depends only on the state of the system in the moment $t = t_{n-1}$. If in the moment $t = t_{n-1}$ the system is in the state E_k , then, under this condition, let the distribution function of $t_n - t_{n-1}$ be denoted by $F_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Let us suppose that the system is at the moment $t = 0$ in the state E_i . Denote by $m_{ijk}(t)$ the expected number of transitions $E_j \rightarrow E_k$ occurring in the time interval $(0, t)$ and denote by $\tau_{ik}(t)$ the expectation of the duration spent by the system in the state E_k during the time-interval $(0, t)$. Let us denote by $P_{ik}(t)$ the probability that in the moment t the system is in the state E_k , under the condition that in the moment $t = 0$ it was in the state E_i .

Our task will be to determine the distribution of the number of the $E_j \rightarrow E_k$ transitions occurring in a time interval of length t , further, to determine the distribution function of the time spent in the state E_k , during the same time interval.

In § 2 it is shown that the probabilities in question may be easily determined, if the following distribution functions are known:

- 1° $F_{jk}(x)$, the distribution function of the distances between the consecutive $E_j \rightarrow E_k$ transitions.
- 2° $F_{ijk}(x)$ the distribution function of the distances between the origin and the first $E_j \rightarrow E_k$ transition, under the condition that, in the moment $t = 0$, the system is in the state E_i .
- 3° $G_k(x)$ the distribution function of the distances between those consecutive moments in which the system changes to the state E_k .
- 4° $G_{ik}(x)$ the distribution function of the distance between the origin and the moment of the system getting the first time into the state E_k , under the condition that in the moment $t = 0$ the system was in the state E_i .

In the sequel, however, we only assume the knowledge of the average functions $m_{ijk}(t)$ and $\tau_{ik}(t)$, which can be immediately determined in many applications. If we consider simultaneously all processes having the initial states E_1, E_2, \dots, E_m , then, by the aid of formulas (4), (5) and (8), the Laplace—Stieltjes transforms $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$ of the distribution functions $F_k(x)$, $F_{ik}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ can be calculated and, by inverting them, the distribution functions may be uniquely determined.

In the above process the moments t_n form the regeneration points of the process. This fact makes possible the above treatment which starts from the knowledge of the average functions. If the investigated process is a Markov-process (i. e. if the variables $t_n - t_{n-1}$ have exponential distributions) then it suffices to know only the probabilities $P_{ik}(t)$, by the aid of which all the problems in question can be answered.

Finally a few applications of the results in the field of coincidence problems concerning particle counting are dealt with.

SZORZATINTEGRÁLÁS, FOURIER-SZINTÉZIS ÉS HASONLÓ FELADATOK ELVÉGZÉSE KVADRÁTPLANIMÉTER ÉS EGY ÚJ KÉSZÜLÉK KOMBINÁCIÓJÁNAK SEGÍTSÉGÉVEL

MEDGYESSY PÁL

Alkalmazott matematikai vizsgálatokban sűrűn szerepel két, grafikonjával megadott függvény szorzata integráljának gépi kiszámítása, valamint speciális függvények lineáris kifejezéseinek előállítása.

Az első célra szolgálnak a különböző folytonosan dolgozó Stieltjes- és szorzat-integrátorok mechanikus (lásd például: [1], p. 206.) vagy elektromos kivitelben (lásd például: [2] és [3]), a másodikra pedig a függvény-szintetizátorok, melyek közül a Fourier-szintetizátorok a legismertebbek (lásd például: [4]). — A szorzat-integrátorok legfőbb hátrányai: a nem teljesen automatikusak két kezelőt kívánnak, vagy pedig mechanikailag erősen igénybevett sablonokkal dolgoznak, ami alkalmazásuk lehetőségeit is korlátozza, — az elektromosak költségeit és hibáit pedig nagyon megnövelik a fotocellával dolgozó, grafikonokat »letapogató« és egyéb bonyolult berendezések.

A Fourier-szintetizátorokat a fogaskerekek vagy (elektromosoknál) a fotocellák stb. teszik bonyolulttá és költségessé.

Éppen ezért egy idő óta azzal a problémával foglalkozunk, hogyan lehetne elvégezni grafikusán megadott függvények szorzatának integrálását — illetve szintézisét — gépi úton, de az említett hibák kiküszöbölésével.

Tapasztalat szerint a mechanikus megoldások a pontosabbak, így vizsgálataink erre a területre szorítkoztak, bármennyire elegánsak is az elektromos megoldások. Vezető szempont volt természetesen, hogy készülék-terveink a Stieltjes-planimétereknél, illetve Fourier-szintetizátoroknál költségesebbek ne legyenek, emellett működésük se legyen sokkal lassúbb amazokénál. Mindkét problémánkra egy megoldást korábbi dolgozatunkban [5] már közöltünk; ennek azonban több hátránya volt: 1° A készülék főcéljához a Fourier- stb. szintézishez alkalmazkodó alkatrészekkel dolgozott, amelyek két függvény szorzata grafikonjának előállításához nem voltak mind okvetlenül szükségesek. 2° Az eljáráshoz ott egyetlen kezelő kellett ugyan, de ennek három görbét kellett egy leolvasó-mikroszkóp látóterében metszésben tartani, ami az összegezés szempontjából elengedhetetlen, a szorzás szempontjából felesleges — főleg pedig fárasztó volt.

Egyszerűbb megoldást kerestünk tehát, melynél kíváncsún tartottuk, hogy a szorzatintegrálás elvégzéséhez ne külön készüléket tervezzünk, hanem valamilyen segédberendezést, amelyet valamilyen egyszerűbb és

általánosan használt matematikai géppel kombinálva a szorzatintegrálást nagyjából épp annyi idő alatt elvégezhetjük, mint pl. Stieltjes-planiméterrel.

Vizsgálataink eredménye az alább leírt egyszerű segédkészülék. Ha ezt úgynevezett kvadrátplaniméterrel (lásd például : [1], p. 198) kombináljuk, segítségével megállapítható két, papírra rajzolt függvény szorzatának integrálja ; egymagában pedig Fourier- és egyéb szintézis grafikus elvégzésére használható fel. Egyetlen kezelőt kíván, mechanikusan igénybevett sablont vagy különleges optikai alkatrészeket nem tartalmaz. Elkészítése egyszerű, kezelése könnyebb, mint már említett készülékünké.

A működési elv ismertetésénél nézzük először a szorzatintegrálást.

Abból indulunk ki, hogy kvadrátplaniméterrel egy (a, b) intervallumon megadott $\varphi(x)$ függvény grafikonjából

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx$$

értékét határozhatjuk meg. Legyen a két összeszorzendő függvény $f(x)$ és $g(x)$ (mindkettő az (a, b) intervallumon értelmezve). Képezzük valamilyen módon a $h(x) = f(x) + g(x)$ függvényt, és kvadrátplaniméterrel határozzuk meg a következő értékeket :

$$(1) \quad \int_a^b [h(x)]^2 dx = T_1,$$

$$(2) \quad \int_a^b [f(x)]^2 dx = T_2, \quad \int_a^b [g(x)]^2 dx = T_3.$$

Nyilván

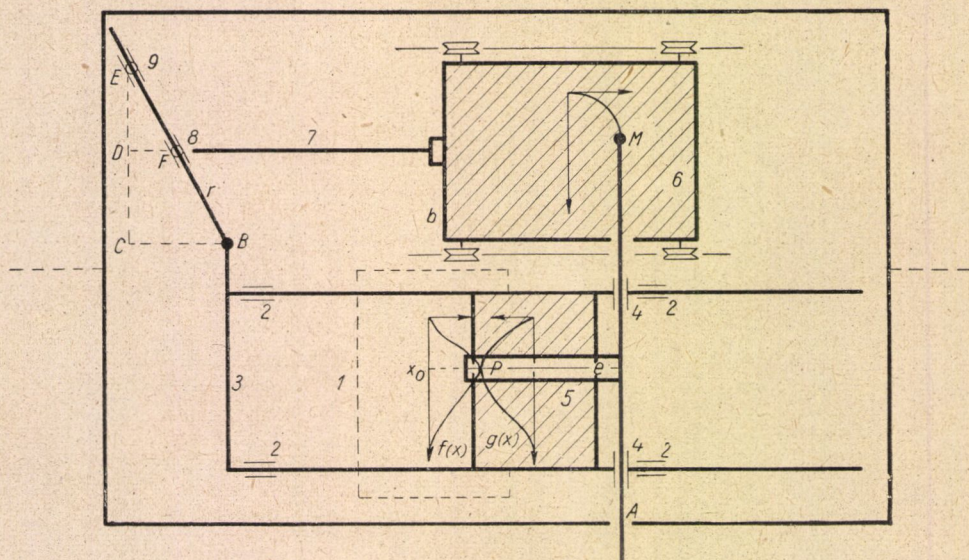
$$(3) \quad T = \int_a^b f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} (T_1 - T_2 - T_3).$$

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonja adott, és így a kvadrátplaniméterrel azonnal körüljárható. Az $f(x) + g(x)$ függvényt azonban elő kell állítani. A grafikus összeadás pontatlan és hosszadalmas ; helyette alkalmazzuk segédkészülékünket, amelynek elve a következő (lásd az 1. ábra szaggatott vonal alatti részét!) :

Az alulról megvilágított 1 üveglap felett (vonalkázva) a 2 hüvelyekben jobbra-balra mozoghat a 3 keret. 3-ra merőlegesen, a 4 hüvelyekben mozog az AM rúd. E rúd közepéhez csatlakozik az 5 átlátszó vonalzó. Az ebbe karcolt e egyenes merőleges az AM rúdra. Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket azonos léptékben pauszpapírra rajzoljuk az ábrán feltüntetett koordináta-rendszerekben (vagyis az y -tengelyek szembenéznek). A $g(x)$ függvény papírját alkalmas módon a 3-ra feszítjük, $f(x)$ rajzát pedig 1-en rögzítjük, úgy hogy a két ábra origói és x -tengelyei 3 elcsúsztatásával pontosan fedésbe legyenek hozhatók [$f(x)$, $g(x)$ papírja és 5 teljesen egymáson fekszenek].

Most 5-öt az AM rúdon elhelyezett fogantyúval megfogva, AM -et és 3-at úgy mozgatjuk, hogy e és $g(x)$ metszéspontja végighaladjon $f(x)$ görbén, végül vissza az x -tengelyen az origóig. Azonnal látható, hogy ekkor

$f(x) + g(x)$ négyzet-integráljának meghatározása ezek után úgy történik, hogy a kvadrátplaniméter vezetőcsúcsát alkalmasan M -hez kapcsoljuk, majd a leírt módon végigjárjuk $g(x)$ és e metszéspontjával $f(x)$ görbét. A planiméter ekkor az (1) alatti T_1 -et adja meg. A (2) alatti T_2 és T_3 értéke-



ket ugyanazon rajzok alapján külön határozzuk meg ugyanazzal a planiméterrel: ezekből a (3) alatti T -t nyerjük.

A készülék semmi kényes mechanikai alkatrészt nem tartalmaz. A görbékét igazán a legegyszerűbb formában »elkészítve« használtuk fel. Első

pillanatra hátrányosnak látszik, hogy $f(x)$ -et és $g(x)$ -et is végig kell planimetrálni, ha azonban — s ez a leggyakoribb — ortogonális függvényrendszer szerinti sorfejtés együtthatóit megadó szorzatintegrálokat kell meghatározni, az ortogonális függvényeket $[g(x)]$ egyszersmindenkorra megrajzolhatjuk, négyzetük integrálját megállapíthatjuk; — a »sorfejtés« közben ez külön munkát nem fog jelenteni. Világos, hogy $f(x)$ négyzetének integrálját sorfejtésnél egyetlen egyszer kell meghatározni — így tehát alig lesz többletmunka a szabványos szorzatintegrátorok használatához viszonyítva.

Megszerkeszthető a készülék úgy is, hogy képezi a négyzetet is és akkor közönséges planimétert kell hozzákapcsolni. Mivel az itt szükséges mechanikai konstrukciók jól ismertek, részletekre nem térünk ki (tulajdonképp a kvadrátplaniméter szerkezetét kellene újból megépítenünk).

A készülék hátránya, hogy egyforma léptékben megrajzolt görbéket kíván; a szükséges átrajzolást azonban affinográfal gyorsan és pontosan elvégezhetjük. A legtöbb eddigi készüléknél sem jobb a helyzet.

Térjünk most rá a szintézisre.

Láttuk, hogy a segédkészülék M pontja a $\pm f(x) \pm g(x)$ függvény grafikonját írja le; így tehát — az abszcissa-tengelyeket megfelelően rögzítve — az M -be helyezett írón alája helyezett pausz-papíron megrajzolja $\pm f(x) \pm g(x)$ grafikonját. A készülék tehát alkalmas különböző függvények grafikus összeadására és kivonására.

A hozzáadandó függvényt azonban — eddig ismertetett konstrukciójában — nem szorozza egy konstanssal, mint [5] alatti gépünk.

Segédkészülékünk kiegészítésével azonban könnyen elérhető, hogy ne $a \pm f(x) \pm g(x)$ függvényt, hanem $k [\pm f(x) \pm g(x)]$ függvényt rajzolja fel (k konstans). Mielőtt a részletezésre térnénk, kimutatjuk, hogy $f(x)$ és $g(x)$ görbéjéből a $k [\pm f(x) \pm g(x)]$ függvény grafikonját megrajzoló készülék segítségével — több lépésben — meg tudjuk rajzolni tetszőleges

$$F(x) = \sum_{r=1}^N A_r \cdot \Phi_r(x)$$

alakú függvény grafikonját, ahol a $\Phi_r(x)$ függvények görbéi ugyanazon intervallumon, egyforma léptékben megrajzolva rendelkezésre állnak, az A_r értékek pedig megadott konstansok. Megrajzolhatjuk tehát harmonikus vagy más ortogonális függvényrendszer tagjainak lineáris kifejezését is (Fourier-, Hermite- stb. szintézis).

Az eljárás alapja a következő azonosság:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \sum_{r=1}^N A_r \cdot \Phi_r(x) = \\ &= A_N \begin{vmatrix} A_{N-1} \\ A_N \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} A_3 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4 + \dots - \Phi_N \end{aligned} \right.$$

Ennek segítségével $F(x)$ -et így állítjuk elő: $f(x)$ -ként Φ_1 -et, $g(x)$ -ként az azonosan 0 függvényt vesszük, és a készülékkel megrajzoltatjuk $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$ görbét (vagyis a $k = \frac{A_1}{A_2}$ értéket állítatjuk be). Most az $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$ és Φ_2 görbék segítségével, a $k = \frac{A_2}{A_3}$ érték beállításával, megrajzoltatjuk

$$\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$$

görbét, és így tovább, lépésről lépésre. Látjuk, hogy az említett identitás folytán végül $F(x)$ -et rajzolja fel a gép. Az utolsó szorzótényező A_N ; ezt 1-nek is vehetjük, ha csak az eredő lefutása érdekes, és nem az egyes ordináta-értékek (ez a leggyakoribb; legrosszabb esetben a végeredményt felnagyítjuk).

A k -val való szorzást többféle kiegészítő berendezéssel is elérhetjük. Ezek közül egyet az 1. ábra szaggatott vonal feletti része mutat: A 3 kerettel párhuzamosan a 6 jobbra-balra guruló asztalka van 1-en elhelyezve. M írónja a 6-on rögzített pausz-papírhoz nyomódik. 3-nak B pontjából indul ki az r rúd; felső vége az E körül forgó 9 hüvelyen megy át. 6 bal széléből b -n rögzíthetően fel-le tolható, b -re merőleges 7 rúd vezet ki. Vége F -nél az r -en csúszó 8 hüvelyhez kapcsolódik. Legyen a készülékbe helyezve $+f(x)$ és $+g(x)$. A készülék működésbe hozásakor $f(x)$ és $g(x)$ x -tengelyei egybeesnek. r ekkor EC irányában van. Toljuk el e -t valamilyen x_0 abszcissa-értékig, majd 3-at annyira, hogy $g(x)$ és e metszéspontja $f(x)$ görbén legyen, vagyis $f(x_0) + g(x_0)$ távolságnyra. Eközben B is ugyanennyit (CB) mozdul el, F (és vele együtt 6) azonban csak az

$$\frac{ED}{EC} \cdot CB = \frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$$

távolsággal mozdul el; M tehát 6-hoz viszonyítva a

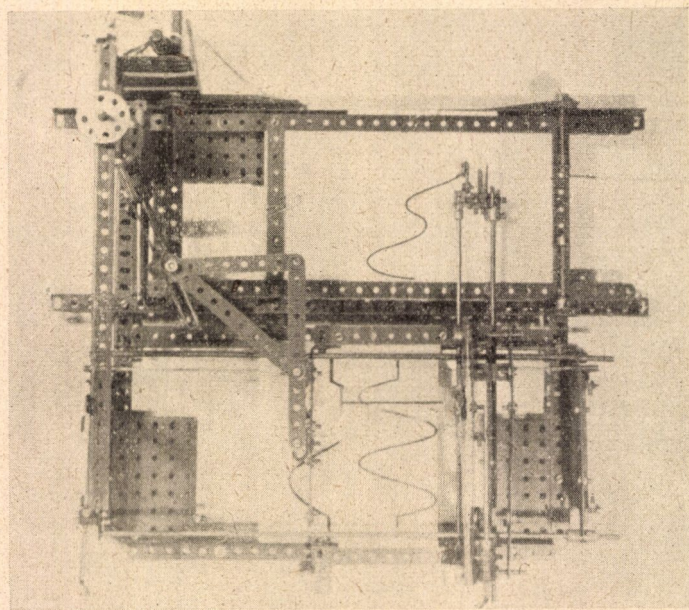
$$\left(1 - \frac{ED}{EC}\right) [f(x_0) + g(x_0)] = k [f(x_0) + g(x_0)]$$

távolsággal.

Mindez M fel-le mozgásától független, következésképp $f(x)$ [és ezzel együtt $g(x)$] végigjárásakor M a 6-ra helyezett papírra a $k [f(x) + g(x)]$ függvény görbét fogja felrajzolni, megfelelő koordináta-rendszerben (ennek az origóját a bejárás megkezdésekor könnyen kijelölhetjük).

Ezzel tehát elértük az $F(x)$ előállításához szükséges lépések gépi megvalósítását. 7 (s így 8) fel-le mozgatásával $\frac{ED}{EC}$ folytonosan változtatható s így 0-tól 1-ig k minden értéke beállítható. Mechanikai szempontból előnyös

az itt bevezetett $k \leq 1$ korlátozás. $F(x)$ fenti előállításánál ez nem jelent hátrányt, mert az A_v , Φ_v tagok mindig átrendezhetők úgy, hogy az $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{A_2}{A_3}$, ... tényezők abszolút értékben 1-nél kisebbek legyenek, az A_N -nel való szorzásra pedig legtöbbször nincs szükség. Közelebbi technikai részletekre nem térünk itt ki.



2. ábra

A megoldás egyetlen hátránya, hogy nem a megelőző tagok összegéhez adja hozzá a következőket s így $F(x) = \sum_{v=1}^N A_v \cdot \Phi_v$ alakulását nem követhetjük. Ez azonban csak demonstrációs céloknál hátrány.¹⁾

Megjegyezzük, hogy csak Fourier-szintézis esetén az 1. ábra felső részén látható mellékkészülék is elhagyhatjuk. Erre a legújabbban a *Caimann-Hoppe*-féle szintetizátornál [6] is felhasznált átalakítás nyújt módot: Egy Fourier-sor-szelet mindig előállítható, mint egyenlő amplitudójú, de különböző fázisú *sinus*- és *cosinus*-függvények összege. Az ilyen összeget azonban tagról tagra elő tudjuk állítani a készülékkel: Elég a $g(x)$ -ként szereplő *sinus* (*cosinus*) függvénygörbét a keretben a fázisnak megfelelő távolsággal fel (le)

¹⁾ Az [5] dolgozatban, illetve itt leírt készülékek elemeit természetesen kombinálhatjuk is egymással: kvadrátplaniméter hozzákapcsolása, átlátszó, egymáson csúszó sablonok stb. [5]-nél is szóbajöhetnek, és így tovább.

eltolva helyezni el, és egyszerűen hozzáadni az addigi részletösszeget képviselő, $f(x)$ helyén levő görbéhez.

Ha készülékünket ortogonális függvények szerinti sorfejtéshez használjuk, egyszer s mindenkorra el kell készíteni a függvényrendszer tagjainak rajzát, egyforma léptékben. Ezek segítségével dolgozunk analízisnél vagy szintézisnél egyaránt. (Harmónikus függvényeknél elég a *sinus*-függvények rajza is; ha negyedperiódussal eltoljuk, a *cosinus*-függvényekre jutunk.)

Látható, hogy segédkészülékünket egyetlen kezelő egy kézzel kezelheti. Mind a »sablonok« elkészítése, mind a leolvasás a lehető legegyszerűbb. Mindezeket figyelembe véve, mondhatjuk, hogy *készülékünk, illetve eljárásunk talán a legegyszerűbb olyan készülék, illetve eljárás, amely nemcsak Fourier-, hanem általános ortogonális függvényanalízisnél és szintézisnél is használható.* Ha csak Fourier-analízisről van szó, berendezésünk jóval olcsóbb egy külön harmonikus analízátornál. Nyilvánvaló, hogy diagrammok egyszerű összeadására, affin transzformálására is felhasználható.

A segédkészülék Märklin-fémítőszekrény alkatrészeiből megépített primitív modelljét a 2. ábrán látható fénykép mutatja.

IRODALOM

[1] W. MEYER ZUR CAPELLEN: *Mathematische Instrumente*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.

[2] H. L. HAZEN—G. S. BROWN: »The cinema integrator.« *Journal of the Franklin Institute* 230 (1940) 19—44 és 183—200.

[3] A. B. MACNEE: »A high speed product integrator.« *Review of Scientific Instruments* 24 (1953) 207.

[4] М. Г. СЕРЕБРЕННИКОВ: *Гармонический анализ*. Гостехиздат, Москва, 1948 (p. 356—393).

[5] MEDGYESSY P.: »Új készülék Fourier-szintézis és analízis, valamint hasonló sorfejtési feladatok elvégzésére.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 179—185.

[6] V. CALMANN—W. HOPPE: »Die Berechnung von ein- und mehrdimensionalen Fourier-reihen mit einem mechanischen Überlagerer neuer Konstruktion.« *Zeitschrift für angewandte Physik* 5 (1953) 120—130.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРОВЕДЕНИЕ СИНТЕЗА ФУРЬЕ И РЕШЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЗАДАЧ СОЧЕТАНИЕМ КВАДРАТНОГО ПЛАНИМЕТРА И НОВОГО ПРИБОРА

П. Меддеши

Резюме

Представленный автором механический прибор может найти применение для следующих целей: 1. его сочетание с квадратным планиметром [5] может служить для интегрирования произведения двух функций, заданных в графическом виде; 2. отдельно можно прибором провести синтез Фурье и подобные синтезы. Все эти задачи решаются проще, чем общепринятыми приборами ([1], [2], [3], [4], [6]).

Конструкция прибора показана на рисунке. Рама 3 движется во втулках 2, над просвечиваемой стеклянной пластинкой 1. Во втулках 4 движется стержень АМ перпендикулярный к 3. К середине прикреплен прозрачная линейка 5 на которой линия e перпендикулярна к АМ. Графики рассматриваемых функций $f(x)$ и $g(x)$ следует нарисовать на кальке в идентичном масштабе («шаблоны»), с противоположно направленными осями у ординат. $g(x)$ закрепляется на 3, $f(x)$ на 1. $f(x)$, $g(x)$ и 5 перекрывают друг друга. Системы координат функций $f(x)$ и $g(x)$ можно привести в совпадение пере-

мещением 3. Если двигать e и 3 таким образом, чтобы точка пересечения e и $g(x)$ описывала $f(x)$, а потом возвращаясь вдоль оси x в начало координат, то точка M (при удобном выборе системы координат) описывает $f(x) + g(x)$. Осуществление такого движения точки пересечения нетрудно, ибо кривые можно просвечивать, так что становится видимым расположение $f(x)$, $g(x)$ и e . Переворачивая $f(x)$ и $g(x)$ можно получить $-f(x)$ и $-g(x)$.

В M помещен карандаш с острием, прижатым к кальке, прикрепленной к катящемуся столику 6. Из B исходит стержень r , который при движении 3 двигает при помощи 8 и 7 столик 6. Параллельным перемещением 7 (изменением передаточного отношения ED/EC) можно добиться того, что при смещении 3 на $f(x_0) + g(x_0)$, 6 смещается только на $\frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$ относительно оси абсцисс $f(x)$ ($0 \leq \frac{ED}{EC} \leq 1$). Тогда M смещается по сравнению с 6 на $(1 - \frac{ED}{EC}) [f(x_0) + g(x_0)]$. Так как все эти движения независимы от движения M вверх и вниз, то при описании $f(x)$, M нарисует на бумажный лист в 6 график функции $k[f(x) + g(x)]$ ($k = 1 - \frac{ED}{EC}$, $0 \leq k \leq 1$), то есть прибором осуществляется однонаправленное аффинное преобразование.

Интегрирование произведения осуществляется следующим образом:

Установим $k = 1$ и прикрепим к M вместо карандаша направляющее острие квадратного планиметра. Если пройдем вдоль $f(x)$, то квадратный планиметр дает интеграл функции $[f(x) + g(x)]^2$, из которого можно непосредственно вычислять интеграл $f(x)g(x)$. Взяв за $f(x)$ ортогональные функции, можно определить этим методом коэффициенты соответствующего ортогонального разложения.

Синтез Фурье, или синтез по ортогональным функциям проводится следующим образом: Пусть в искомой сумме (4) $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$ (этого всегда можно добиться надлежащей перестановкой членов). Предварительно вычерчиваем графики ортогональных функций Φ_i (изготавливаем «шаблоны»). Взяв за $f(x) = \Phi_1$, $g(x) \equiv 0$, установив $k = \frac{A_1}{A_2} \leq 1$,

мы можем нарисовать на 6 $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$. Исходя из этой функции и из Φ_2 мы можем при установке $k = \frac{A_2}{A_3}$ нарисовать $\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$ и т. д. последовательно все скобки в правой части (4).

Описанный прибор является результатом дальнейшего развития прибора, обсуждаемого в [4]. По сравнению с другими подобными приборами он имеет следующие преимущества: требует лишь одного обслуживателя, не находят применения оптические детали, а также и механически используемые шаблоны. Конструкция прибора проста. Если его сочетать с часто встречающимся квадратным планиметром, то он может заменить и продукт-интегратор (гармонический анализатор). Изготовление шаблонов самое простое. Невыгодным является необходимость задания кривых в идентичном масштабе. Если нас интересует только синтез Фурье, то на основе принципов, сообщенных в [6], достаточно просто складывать графики функций $f(x)$ и $g(x)$ после сдвига на соответствующую «фазу», без умножения на k . Тогда 6 и связанные с ним детали отпадают. Применение данного прибора к аффинному преобразованию уже выше было изложено.

PRODUCT INTEGRATION, FOURIER-SYNTHESIS AND SIMILAR OPERATIONS CARRIED OUT BY MEANS OF A SQUARE PLANIMETER AND A NEW APPARATUS

P. MEDGYESSY

Summary

The mechanical apparatus described in the present paper can be used as follows: 1. Combining it with square planimeter [5] the integral of the product of two graphically given functions can be determined; 2. It can perform Fourier-synthesis and can be applied to similar purposes. All these operations will be performed in a simpler way than by using the apparatuses applied commonly (see [1], [3], [4], [6]).

Figure 1. shows the sketch of the apparatus. The framework 3 moves in the sleeves 2 over the glass plate 1 illuminated from below. The bar AM , which is per-

pendicular to 3 moves in the sleeves 4. In the middle of AM , the transparent rule 5 is mounted; the line e on it is perpendicular to AM . $f(x)$ and $g(x)$, the two functions in question, are drawn in the same scale on tracing-paper («templates») so that the ordinates face each to the other. $g(x)$ and $f(x)$ are fixed on 3 and 1 respectively. $f(x)$, $g(x)$ and 5 lie one on the other. Slipping 3, the coordinate systems of $f(x)$ and $g(x)$ may be brought in covering. If we move e and 3 so that the intersection point of e and $g(x)$ runs along $f(x)$ and, on the x -axis, back to the origin then (in a suitable coordinate system) the point M describes $f(x) + g(x)$. Guiding may be performed easily since the curves can be illuminated from below so that we see $f(x)$, $g(x)$ and e simultaneously one over the other. Turning over $f(x)$ and $g(x)$, $-f(x)$ and $-g(x)$ can also be introduced.

In M there is a pencil; it is pressed to the tracing-paper fixed on the rolling desk 6. A bar r starts from B ; if we move 3, r moves 6 by the aid of 8 and 7. By such a parallel translation of 7 (this may be obtained by varying the ratio ED/EC) it can be obtained that if 3 moves with $f(x_0) + g(x_0)$ then 6 will move only with

$\frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$ as compared to the axis of abscissae of $f(x)$ ($0 \leq ED/EC \leq 1$).

In this case M will move with $(1 - ED/EC) [f(x_0) + g(x_0)]$ as compared to 6. Since all these are independent from the up and down motion of M , then running along $f(x)$, M will draw $k [f(x) + g(x)]$ on the paper fixed on 6 ($k = 1 - ED/EC$, $0 \leq k \leq 1$), i. e. the apparatus will perform an unidirectional affine transformation.

The product integration is performed as follows: Put $k = 1$ and instead of the pencil connect the tracer point of a square planimeter with M . Running along $f(x)$ the planimeter yields the integral of $[f(x) + g(x)]^2$, from which the integral of $f(x)g(x)$ may be computed. Taking orthogonal functions for $f(x)$, we can determine by this procedure the coefficients of the concerning orthogonal expansion.

Fourier-synthesis (synthesis of orthogonal functions) can be performed as follows: In the sum (4) to be determined let $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$ (this can always be reached by a suitable rearrangement) the orthogonal functions Φ_v are previously

sketched («templates» are made). Taking $f(x) = \Phi_1$, $g(x) \equiv 0$ and, putting $k = \frac{A_1}{A_2} \leq 1$,

let us draw $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$ on 6. By the aid of the latter and Φ_2 and taking $k = \frac{A_2}{A_3}$ we let

the apparatus plot $\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$, — and so on each of the brackets figuring on the right-hand side of (4).

The apparatus is a development of that described in [4]. Comparing with other analogous apparatuses, its advantages are as follows: It needs only one operator and does not contain optical parts and mechanically employed templates. Its construction is simple. Combining with a square planimeter substitutes also for a product integrator (harmonic analyser). The chief disadvantage is that the curves must be drawn according to the same scale. If we want to make Fourier-synthesis only, then, on the basis of some formulae in [6], it suffices to add the curves of $f(x)$ and $g(x)$ displaced with a suitable «phase» (without any multiplication by k). In this case 6 and all the other component parts connected to it can be omitted. Applications for affine transformations have already been mentioned.

DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSOK KEVERÉKÉNEK FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐIRE

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

Korábbi dolgozatainkban ([1], [2]) folytonos eloszlás-, illetve sűrűség-függvények konstans súlyokkal vett keverékének felbontásával foglalkoztunk. Ebben a cikkben diszkrét valószínűség-eloszlásokra végzünk hasonló vizsgálatokat. Tudomásunk szerint ezzel a problémával eddig nem foglalkoztak, bár fontos gyakorlati alkalmazásai vannak.

Problémánk a következőképp fogalmazható meg: legyen $\psi_\nu(x)$ $(-\infty < x < \infty; \nu = a_1, a_2, \dots)$ az x paramétertől függő diszkrét eloszlás, amelyet az a_1, a_2, \dots pontokban értelmeztünk; $\psi_\nu(x)$ az x -nek folytonos függvénye. Legyen továbbá $\Phi(x)$ egy eloszlásfüggvény. Bevezetjük a következő definíciót:

A $\psi_\nu(x)$ komponensek $\Phi(x)$ súlyfüggvénnyel való keverékének az

$$(1) \quad f_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\nu(x) d\Phi(x) \quad (\nu = a_1, a_2, \dots)$$

Stieltjes-integrállal értelmezett diszkrét eloszlást nevezzük.

A definíció az [1] dolgozat bevezetésében közölt, folytonos sűrűség-függvények keverékére vonatkozó definíció értelemszerű kiterjesztése. (A diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényét tartalmazó definíció hasonlóan adható meg, semmi előnnyel sem jár azonban, ha ebből indulunk ki s ezért mellőzzük.)

Az (1)-ben szereplő f_ν keverékeloszlás *felbontásán* általánosságban $\psi_\nu(x)$ vagy $\Phi(x)$ (esetleg mindkettő) meghatározását értjük az (1) összefüggés és az f_ν értékek ismerete alapján. Esetenként még azt is megengedjük, hogy a keresett függvények *típusát* is ismerjük, csak paramétereit nem.

Ha $\Phi(x)$ tiszta lépcsős függvény, (1) nyilván végtelen sorba megy át. Alkalmasan választott $\psi_\nu(x)$ és tiszta lépcsős $\Phi(x)$ függvényekkel elérhetjük, hogy f_ν az

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\nu = \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{\nu} p_k^\nu (1-p_k)^{M_k-\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \max M_k) \\ \text{illetőleg} \\ f_\nu = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^\nu}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \dots) \end{array} \right.$$

alakot öltse $\left(A_k > 0, \sum_{k=1}^N A_k = 1, M_k > 0, 0 < p_k < 1, \lambda_k > 0 \text{ valós paramé-}\right.$
 $\left.\text{terek}\right)$. A (2) alatti kifejezések közül az első különböző M_k, p_k para-

méterű binomiális eloszlások konstans A_k súlyokkal vett keverékének, a másodikat pedig λ_k paraméterű Poisson-eloszlások A_k súlyokkal vett keverékének nevezzük.

A dolgozatunkban tárgyalt problémák erre a két speciális keverékre vonatkoznak.

Az (1) alatti alakhoz viszonyítva látjuk, hogy a keverékek komponenseinek típusát ismerjük, de paramétereit nem, a súlyfüggvényről pedig csak azt tudjuk, hogy tiszta lépcsős függvény.

A következőkben ezen keverékek felbontásával fogunk foglalkozni, ami itt az ismeretlen A_k, M_k, p_k, λ_k paraméterek meghatározásával ekvivalens.

Az A_k mennyiségek valószínűségszámítási interpretációjához $\left(\sum_{k=1}^N A_k = 1\right)$ nem szükséges ragaszkodnunk s ezért a (2) alatti alakot egyszerűen mint binomiális, illetve Poisson-eloszlások szuperpozícióját kezeljük.

Binomiális eloszlások keveréke felbontásának gyakorlati szerepével és jelentőségével egy másik dolgozatban [3] már foglalkoztunk.

1. §.

Az

$$(3) \quad f_v = \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{v} p_k^v (1-p_k)^{M_k-v} \quad (v = 0, 1, \dots, \max M_k)$$

($A_k > 0, M_k > 0$ egész, $0 < p_k < 1$, azonos M_k, p_k pár nincs) keverék felbontásánál, — ami itt az A_k, M_k, p_k értékek meghatározásával ekvivalens — az [1] dolgozatban említett »szórás-csökkentési« elvet alkalmazzuk: legyenek egyelőre a p_k -k mind különbözőek, s tegyük fel, hogy a (3)-ban szereplő f_v -értékek ismeretében alkalmasan választott $\mu > 1$ valós paraméterrel elő tudunk állítani egy

$$(4) \quad F_v(\mu) = \sum_{k=v}^N A_k \binom{M_k}{v} (\mu p_k)^v (1 - \mu p_k)^{M_k-v}$$

($v = 0, 1, \dots, \max M_k$) eloszlást; ez (3)-tól csak abban különbözik, hogy benne p_k helyett μp_k szerepel ($0 < \mu p_k \leq 1$).

A nem-negatív monoton növekvő $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i, \dots$ értékekkel állítsuk elő sorban a megfelelő $F_v(\mu_i)$ -ket. Tegyük fel, hogy valamelyik μ_i épp

egyenlő $\max p_k = p_\tau$ reciprokával, vagyis $\mu_i = \frac{1}{p_\tau}$. Ennél a μ_i -nél a (4)

a τ indexű komponens egyetlen ponttá elfajult binomiális eloszlás lesz, melynek 0-adik, 1-ső, $\dots, M_{\tau-1}$ -edik eleme zérus, az M_τ -adik pedig A_τ .

Ez az egyetlen pont nyilván ki fog ugrani az eloszlás többi pontja fölé és ha szomszédságában már igen kicsik az eloszlás tagjai, ordinátája jó közelítéssel megadja A_r -t, abszcisszája pedig M_r -t. p_r nyilván az alkalmazott μ reciproka lesz.

Ezen körülmények mellett tehát egy komponens adatait meghatározhatjuk. Az M_r -ban közel A_r magasban kiugró pontot elhagyva és helyette a szomszédos adatokból interpolált új pontot vezetve be, kis hibával olyan keverékre jutunk, amelynek a kiindulónál eggyel kevesebb komponense van, és amelyben p_k helyett p_k/p_r paraméterek szerepelnek. Ezen az eljárást megismételhetjük és újabb komponenszt választhatunk le, és így tovább. A felbontással nyert adatok természetesen a komponensek számát, N -et is megadják.

A gyakorlatban legtöbbször egyetlen lépés (sőt. már egyetlen μ -értékkel való kísérlet) is elég, mert kimutatható, hogy az eljárás során az egyes komponensek maximumhelyeinek távolsága általában megnő, szórásnégyzeteik pedig általában csökkennek. Ennek a részletes tárgyalására nem térünk itt ki, mert előbbi okoskodásunk értelmében másodrendű fontosságúak¹⁾, csak azt jegyezzük meg, hogy szomszédjaitól erősen különvált komponenszt egyetlen binomiális eloszlásként kezelhetünk, ekkor pedig paramétereit közelítőleg megállapíthatjuk. A komponensek száma legtöbbször egyetlen μ -vel való kísérletből is kiderül.

Állapodjunk meg abban, hogy a felbontást gyakorlatilag elintéztük, ha az f_v értékek ismeretében általunk megadott μ -vel elő tudjuk állítani az $F_v(\mu)$ mennyiségeket.

Ezt az előállítást megadja a következő

Tétel: Ha az f_v diszkrét eloszlás binomiális eloszlások

$$f_v = \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{v} p_k^v (1-p_k)^{M_k-v} \quad (v = 0, 1, \dots, \max M_k)$$

alakú keveréke, a komponensek szétválasztására alkalmas új

$$F_v(\mu) = \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{v} (\mu p_k)^v (1 - \mu p_k)^{M_k-v}$$

keverékeloszlást az

$$(5) \quad F_v(\mu) = \mu^r \sum_{q=v}^{\max M_k} \binom{M_k}{q} (1-\mu)^{q-r} f_q$$

összefüggés adja meg.

¹⁾ A maximumhelyek távolságának változása annak az ismert ténynek az alapján vizsgálható, hogy egy M_k , μp_k paraméterű binomiális eloszlás maximuma kb. $M_k \mu p_k$ -nál van; ilyenformán pl. két egymásra következő maximumhely távolsága $\mu(M_{k+1} p_{k+1} - M_k p_k)$, ami μ -vel együtt növekedik, ha csak μ tényezője $\neq 0$. (Analog módon okoskodunk a szórásnégyzetek esetében.)

Bizonyítás: Felhasználva az

$$(1 - \mu p_k)^{M_k - \nu} = [(1 - \mu) p_k + (1 - p_k)]^{M_k - \nu} = \\ = \sum_{\sigma=0}^{M_k - \nu} \binom{M_k - \nu}{\sigma} (1 - \mu)^\sigma p_k^\sigma (1 - p_k)^{M_k - \nu - \sigma}$$

azonosságot,

$$F_\nu(\mu) = \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{\nu} (\mu p_k)^\nu \sum_{\sigma=0}^{M_k - \nu} \binom{M_k - \nu}{\sigma} (1 - \mu)^\sigma p_k^\sigma (1 - p_k)^{M_k - \nu - \sigma}$$

Vezessük be a $\nu + \sigma = \varrho$ új összegezési változót; ekkor

$$F_\nu(\mu) = \mu^\nu \sum_{k=1}^N A_k \sum_{\varrho=\nu}^{M_k} \binom{M_k}{\nu} \binom{M_k - \nu}{\varrho - \nu} (1 - \mu)^{\varrho - \nu} p_k^\varrho (1 - p_k)^{M_k - \varrho}.$$

Használjuk fel az

$$\binom{M_k}{\nu} \binom{M_k - \nu}{\varrho - \nu} = \binom{M_k}{\varrho} \binom{\varrho}{\nu}$$

összefüggést, és vegyük figyelembe, hogy az $F_\nu(\mu)$ nem változik, ha M_k helyett $\max M_k$ -ig összegezzünk. Ekkor azonban az összegezések felcserélhetők,

$$F_\nu(\mu) = \mu^\nu \sum_{\varrho=\nu}^{\max M_k} \binom{\varrho}{\nu} (1 - \mu)^{\varrho - \nu} \sum_{k=1}^N A_k \binom{M_k}{\varrho} p_k^\varrho (1 - p_k)^{M_k - \varrho},$$

vagyis, (3) alapján

$$F_\nu(\mu) = \mu^\nu \sum_{\varrho=\nu}^{\max M_k} \binom{\varrho}{\nu} (1 - \mu)^{\varrho - \nu} f_\nu$$

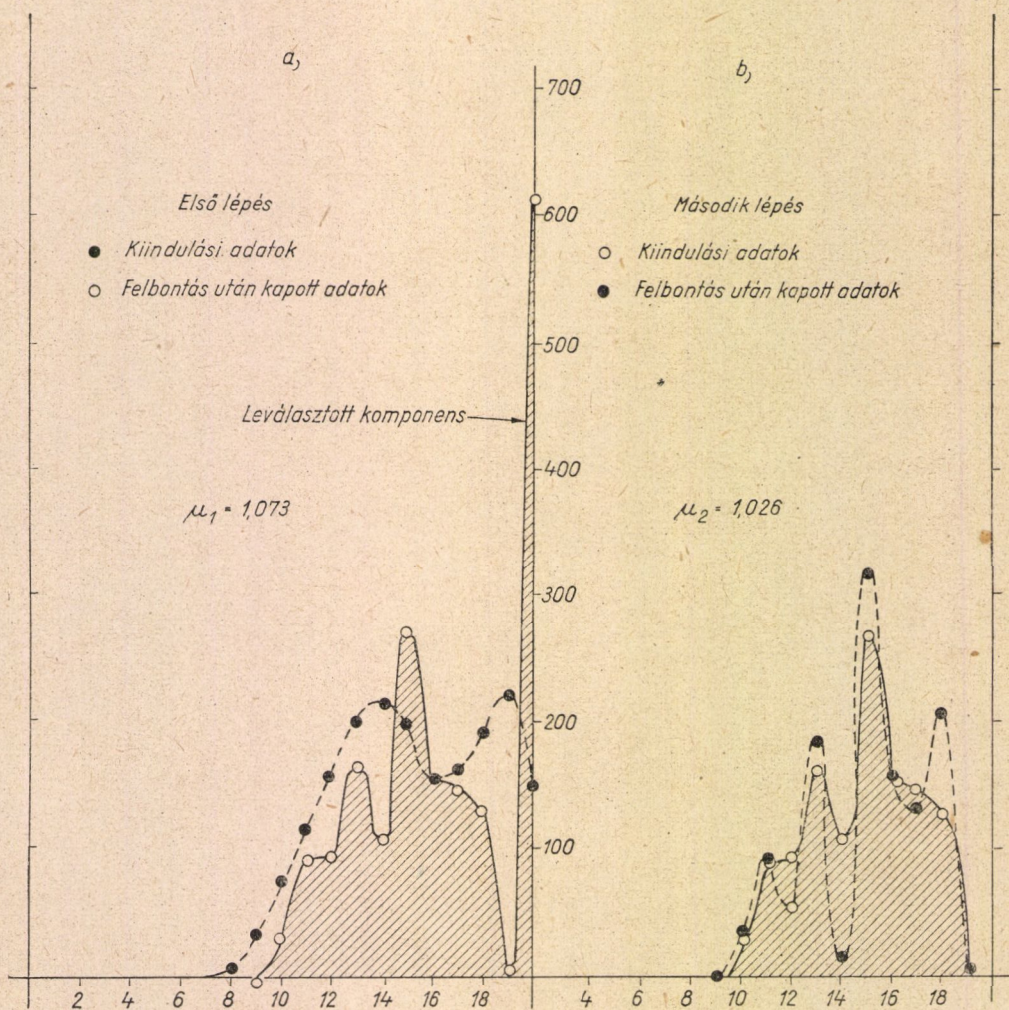
ahogy állítottuk.

Ezek után egyszerűen kínálkozik a keverék felbontásának gyakorlati módszere: Választunk valamilyen μ_1, μ_2, \dots sorozatot és a felbontandó binomiális keverék-eloszlás f_ν értékei segítségével (5) felhasználásával kiszámítjuk az $F_\nu(\mu_1), F_\nu(\mu_2), \dots$ eloszlásokat. (Ha $\max M_k$ értéke 10–20 körül van, ez géppel gyorsan megy.)

Vegyük észre, hogy $F_\nu(\mu)$ meghatározásához csak az $f_\nu, \dots, f_{\max M_k}$ (a ν -nél nagyobb indexű) értékek szükségesek. Ha μ_i megközelíti az $1/\max p_k$ értéket, a vonatkozó komponens egyetlen pontként kiugrik a többi közül, ahogy azt fent már részleteztük. Ennek a ténynek a megállapítása az $F_\nu(\mu_1), F_\nu(\mu_2), \dots$ eloszlások ábrázolása segítségével könnyű. A kiugró komponens paramétereinek megállapítása ugyancsak a fentebb már tárgyalt módon történik. — A gyakorlatban az M_k értékek általában egyenlők.

(4) alakjából következik, hogy $\mu p_k > 1$ esetén az $F_v(\mu)$ komponensei közül egyesek negatív értékeket is felvesznek, vagyis várható, hogy maga $F_v(\mu)$ is helyenként negatív értékeket vesz fel: Ha tehát az eljárás során valamilyen μ értéknél már negatív tagokat is kapunk $F_v(\mu)$ -ben, biztos, hogy túlléptük μ -vel az $1/\max p_k$ értéket. Ennek a fordítottja azonban már nem mondható ki, s ezért legbiztosabb eljárás több μ -vel végzett felbontások eredményeinek összehasonlítása.

Ha a p_k -k közt egyenlők is vannak, csak az lesz a különbség, hogy a szétválasztás valamelyik lépésénél egyszerre több pont »ugrik ki«. Mivel ez fenti okoskodásunkat nem befolyásolja és az eljárás menete is rögtön látható, ezért részletesen nem tárgyaljuk.



1. ábra

Binomiális eloszlások keverékének felbontása válik szükségessé a [3] dolgozatban (jelen kötet) tárgyalt fizikai-kémiai problémánál. Ilyen eredetű keveréket és felbontását mutatjuk be az 1. ábrán. *Áttekinthetőség kedvéért* folytonos görbét fektettünk át az adatokon. A közölt felbontás $\mu_1 = 1,073$, majd — a kiugró komponens leválasztása után nyert eloszlásnál, második lépésként — $\mu_2 = 1,026$ -tal történt; jól láthatók a különvált komponensek (bizonyos különválás az eredeti felvételen is látszik). Vegyük észre, hogy nem két komponens van, mint azt a kiinduló eloszlásból gondolnánk, hanem öt! A keresett paraméterek a felbontás után kapott eloszlásból:

$$p_1 \approx 0,49 \quad p_2 \approx 0,59 \quad p_3 \approx 0,68 \quad p_4 \approx 0,82 \quad p_5 \approx 0,91$$

$$A_1 \approx 140 \quad A_2 \approx 220 \quad A_3 \approx 560 \quad A_4 \approx 280 \quad A_5 \approx 610,$$

amelyek jól egyeznek az itt történetesen gyakorlatból is ismert értékekkel.

Természetesen ajánlatos ellenőrzésként az így kiszámított paraméterekkel néhány eloszlás-pontot meghatározni, és egybevetni a kísérleti adatokkal.

Bemutatjuk még az

$$f_\nu = \binom{10}{\nu} 0,4^\nu (1-0,4)^{10-\nu} + 2 \binom{10}{\nu} 0,5^\nu (1-0,5)^{10-\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 10)$$

keverék felbontását is. Itt

$$N = 2, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad M_1 = M_2 = 10, \quad p_1 = 0,4, \quad p_2 = 0,5.$$

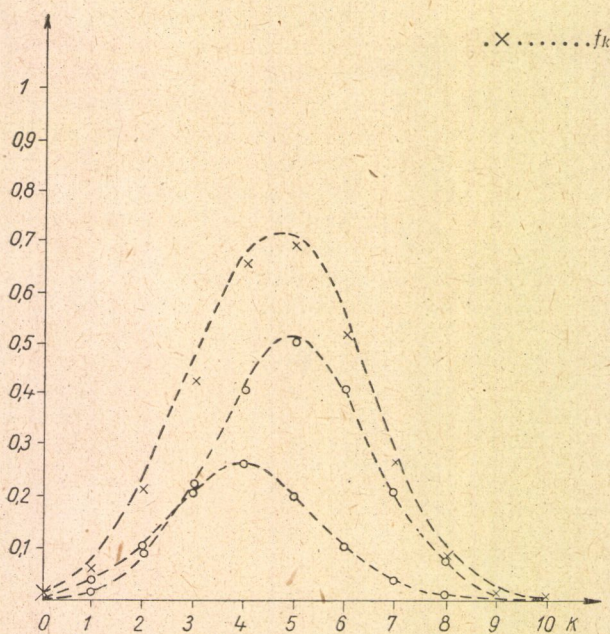
A 2. a. ábra mutatja a két komponens külön (o) és összegüket (x), a 2. b pedig összegüket (o) és a $\mu = \frac{10}{6}$ -dal történt felbontás eredményét (x),

vagyis az $F_\nu\left(\frac{10}{6}\right)$ értékeket (itt is Gauss-görbékét fektettünk át az adatokon, a szemléltetés céljára). Az f_ν keverék nem árul el semmit a komponensekről, az $F_\nu\left(\frac{10}{6}\right)$ értékek viszont már élesen különvált két eloszlást mutatnak, bár még nem járunk az extrémális esethöz.

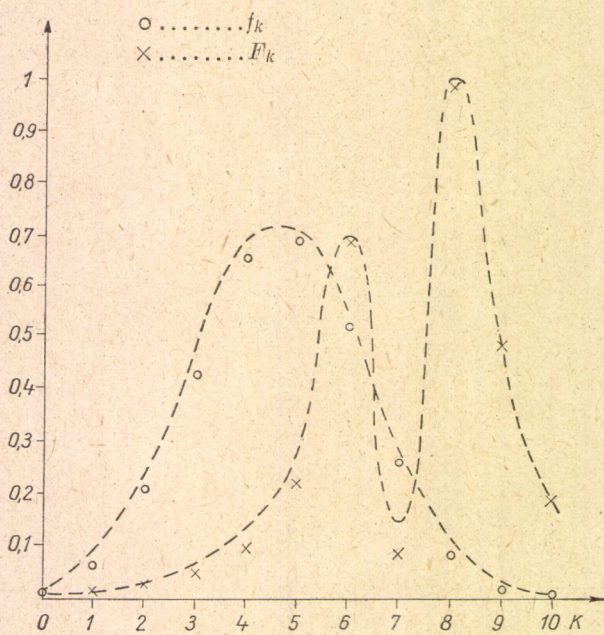
2. §

Az előző §-ban tárgyalt eljárás gyakorlati végrehajtásakor több nehézségre bukkanunk. Az egyik: a kísérleti adatok vagy 0, vagy $\max M_k = M$ szomszédságában (esetleg mindkét helyen is) sokszor hibahatáron belül kicsik, és ezért a kutatók zérusnak veszik őket, hiszen nincs alap más érték hozzárendelésére.

Ha csak a bal-, illetve jobbszélen ilyenek az adatok, a nehézség még áthidalható, mert az $F_\nu(\mu)$ -k szempontjából csak a ν -nél nagyobb indexű f_ν -értékek fontosak (vesd össze: (5)), vagyis hibás *balszéli* adatok legfeljebb az első $F_\nu(\mu)$ értékeket rontják el, ami a felbontást alig zavarja, hibás *jobbszéli* adatoknál pedig egyszerűen tükrözzük az egész eloszlást a 0, ..., $\max M_k$ intervallum felező



2. a. ábra



2. b. ábra

merőlegese körül, mikoris a keverék lényegileg változatlan marad, a használhatatlan adatok pedig a balszélre kerülnek, s így lényegtelené válnak. Kritikus tehát csak az az eset marad, amidőn mindkét szélen használhatatlanok az adatok. Számunkra ez azt jelenti, hogy valamilyen l -nél és j -nél az f_0, f_1, \dots, f_l és $f_M, f_{M-1}, \dots, f_{M-j}$ értékeket is 0-nak kell vennünk, holott értékük véges, bár igen kicsiny. Ezzel azonban (5) alkalmazásakor igen nagy hibákat követhetünk el: pl. az $F_M(\mu) = \mu^M f_M$ értéket 0-nak kell tekintenünk, holott nagy M esetén $\mu > 1$ folytán μ^M nagy szám és így $F_M(\mu)$ kis f_M -nél is elég nagy marad. Egyenlő M_k értékeknél éppen ebben a pontban várhatnánk a kiugró eloszlás-értéket, az említett elhanyagolás azonban épp ezt (meg a szomszédos) adatokat teszi használhatatlanná.

Olyan eljárást kell tehát keresnünk, amely szélső adatokra *nem* támaszkodva szolgáltatja a felbontást vagy mindjárt az egyes adatokat.

Bebizonyítható, hogy a fentebb tárgyalt szétválasztási eljárás nem alkalmazható, ha nem használhatjuk fel az összes f_v -értékeket. Közelfekvő gondolat megpróbálni az f_v értékek olyan $\Phi_s(f_1, \dots, f_M)$ ($s = 0, 1, \dots$) függvényeit előállítani, amelyeknek értékét alig befolyásolják a szélső f_v -k értékei, amellet a $\Phi_s(f_1, \dots, f_M)$ értékekből vagy következtetni tudunk az ismeretlen paraméterekre, vagy visszavezethetjük a problémát a 2. §-ban tárgyalt módszer alkalmazására. (Itt tulajdonképpen globálisan kezelnénk az f_v -ket, ami a kísérleti adatok feldolgozásánál azért előnyös, mert a hibák kevésbé befolyásolják a végeredményt.) Végeredményben az f_v -k sorozatát kellene áttranszformálnunk

a $\Phi_s(f_1, \dots, f_M)$ sorozatba egy $\Phi_s(f_1, \dots, f_M) = \sum_{k=1}^M B_k(s) \cdot f_k$ típusú transzformáció

segítségével, ahol azonban a $B_k(s)$ transzformáló sorozatot feltételeinknek megfelelően kell meghatározni. Sajnos, minden kikötésünknek eleget tevő $B_k(s)$ sorozatot eddig nem sikerült találnunk.

Ha tudjuk, hány komponenst várhatunk (a gyakorlatban sokszor ez az eset) és az összes M_k -k egyenlőek, sikerrel alkalmazható a következő, algebrai eljárás:

Tekintsük ismét a keverék (3) alatti alakját ($M_k = n$):

$$(6) \quad f_v = \sum_{k=1}^N A_k \binom{n}{v} p_k^v (1-p_k)^{n-v}, \quad (v=0, 1, \dots, n).$$

Ez felfogható magasabbfokú egyenletrendszernek az A_k és p_k -k értékek meghatározására, amely $2N \leq n$ esetén meg is oldható. A megoldást egy már régebben kidolgozott módszer²⁾ általánosítása adja meg: Vezessük be az új D_v, B_k, x_k paramétereket, amelyeket az

$$\frac{f_v}{\binom{n}{v}} = D_v, \quad p_k = \frac{x_k}{1+x_k}, \quad B_k = \frac{A_k}{(1+x_k)^n}$$

összefüggések definiálnak. Ekkor (6) így alakul:

$$(7) \quad D_v = \sum_{k=1}^N B_k \cdot x_k^v, \quad (v=0, 1, \dots, n),$$

²⁾ Lényegében szerepel már Gauss-nál: [4]. Lásd még: [5], p. 275 — Alkalmazását illetően lásd: [6], főleg p. 713.

ahol a B_k, x_k mennyiségek az ismeretlenek. Mivel a B_k, x_k mennyiségekből az A_k és p_k értékek egyértelműen kiszámíthatók, elég a (7) egyenlettel foglalkoznunk. Olyan megoldási módszert keresünk, amely nem használja fel a szélső f_v értékeket, illetve a megfelelő indexű D_v értékeket.

Tekintsünk pozitív egész számokból álló olyan

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{N+1}$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{N+1}$$

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{N+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

rendszert, amelyre

$$a_2 - a_1 = \beta_2 - \beta_1 = \gamma_2 - \gamma_1 = \dots = \tau_2 - \tau_1 = \dots$$

$$a_3 - a_1 = \beta_3 - \beta_1 = \gamma_3 - \gamma_1 = \dots = \tau_3 - \tau_1 = \dots$$

$$(8) \quad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{N+1} - a_1 = \beta_{N+1} - \beta_1 = \gamma_{N+1} - \gamma_1 = \dots = \tau_{N+1} - \tau_1 = \dots,$$

és tegyük fel, hogy

$$(9) \quad a_{N+1} \leq n, \quad \beta_{N+1} \leq n, \quad \gamma_{N+1} \leq n, \quad \dots, \quad \tau_{N+1} \leq n, \quad \dots$$

Szemeljük ki a (7) rendszerből először a $\nu = a_1, a_2, \dots$ indexű egyenleteket:

$$B_1 x_1^{a_1} + \dots + B_N x_N^{a_1} = D_{a_1}$$

$$B_1 x_1^{a_2} + \dots + B_N x_N^{a_2} = D_{a_2}$$

$$(10) \quad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_1 x_1^{a_{N+1}} + \dots + B_N x_N^{a_{N+1}} = D_{a_{N+1}}$$

Szorozzuk ezeket sorban az egyelőre ismeretlen c_1, c_2, \dots, c_N értékkel, az utolsót 1-gyel s adjuk össze a jobb- és baloldalakat:

$$\begin{aligned}
 & B_1 x_1^{a_1} (c_1 + c_2 x_1^{a_2 - a_1} + \dots + c_N x_1^{a_N - a_1} + x_1^{a_{N+1} - a_1}) + \\
 & + B_2 x_2^{a_1} (c_1 + c_2 x_2^{a_2 - a_1} + \dots + c_N x_2^{a_N - a_1} + x_2^{a_{N+1} - a_1}) + \dots \\
 (11) \quad & \dots + B_N x_N^{a_1} (c_1 + c_2 x_N^{a_2 - a_1} + \dots + c_N x_N^{a_N - a_1} + x_N^{a_{N+1} - a_1}) = \\
 & = c_1 D_{a_1} + c_2 D_{a_2} + \dots + c_N D_{a_N} + D_{a_{N+1}}
 \end{aligned}$$

Válasszuk meg c_1, \dots, c_N -t úgy, hogy az x_1, x_2, \dots, x_N értékek épp a

$$(12) \quad c_1 + c_2 x_1^{a_2 - a_1} + \dots + c_N x_1^{a_N - a_1} + x_1^{a_{N+1} - a_1} = 0$$

egyenlet gyökei legyenek. Ekkor (11) baloldala zérus, vagyis a c_i értékek közt fenn kell állnia a

$$(13) \quad D_{a_1} c_1 + D_{a_2} c_2 + \dots + D_{a_N} c_N = -D_{a_{N+1}}$$

összefüggésnek.

Vegyük most a (7) rendszerből a $\nu = \beta_1, \beta_2, \dots$ indexű egyenleteket, szorozzuk meg őket ismét az előbbi c_1, c_2, \dots értékekkel és adjuk össze:

$$\begin{aligned}
 & B_1 \cdot x_1^{\beta_1} (c_1 + c_2 x_1^{\beta_2 - \beta_1} + \dots + c_N x_1^{\beta_N - \beta_1} + x_1^{\beta_{N+1} - \beta_1}) + \dots \\
 (14) \quad & \dots \\
 & = c_1 D_{\beta_1} + c_2 D_{\beta_2} + \dots + c_N D_{\beta_N} + D_{\beta_{N+1}}.
 \end{aligned}$$

Mivel azonban (8) fennállásából indultunk ki,

$$c_1 + c_2 x_1^{\beta_2 - \beta_1} + \dots + x_1^{\beta_{N+1} - \beta_1} \equiv c_1 + c_2 x_1^{a_2 - a_1} + \dots + x_1^{a_{N+1} - a_1}$$

(és így tovább a többi x_i változóra).

Ezek azonban feltevés szerint zérusok, következésképp (12) baloldala is zérus és a c_i értékekre a következő újabb összefüggést kapjuk:

$$(15) \quad D_{\beta_1} c_1 + D_{\beta_2} c_2 + \dots + D_{\beta_N} c_N = -D_{\beta_{N+1}}.$$

Hasonlóan járunk el a $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ indexű egyenletekkel, végeredményül a

$$(16) \quad D_{\gamma_1} c_1 + D_{\gamma_2} c_2 + \dots + D_{\gamma_N} c_N = -D_{\gamma_{N+1}}$$

összefüggést kapjuk. Újabb, a (8) és (9)-nek megfelelő τ_1, τ_2, \dots indexrendszerhez tartozó egyenleteket választva ki (7)-ből, ismét más összefüggést nyerünk a c_i -k közt. Az eljárást mindaddig folytatjuk, míg (12), (14), (15)

és a többi egyenlet N számú egyenletet nem szolgáltat. Ezek együtt lineáris egyenletrendszert adnak a c_i értékekre.

Tegyük fel, hogy ez az egyenletrendszer megoldható (ennek a vizsgálatára nem térünk ki; ha a gyakorlatban valamilyen a_i, β_i, \dots értékrendszerrel esetleg zérus volna az egyenletrendszer determinánsa, más értékrendszerrel próbálkozunk). — A megoldással nyert c_i értékeket beírjuk a (12) egyenletbe s az így kapott $(a_{N+1} - a_1)$ -edfokú egyismeretlenes egyenletet pontosan vagy közelítő módszerrel megoldjuk. A gyökök szolgáltatják az x_i értékeket, ezeket a (7) alatti egyenletrendszer N darab egyenletébe beírjuk és az ily módon a B_i -értékekre kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk. Az x_i és B_i értékekből a keresett p_k, A_k értékek könnyen meghatározhatók.

Az ismeretlenek meghatározását tehát visszavezettük két N -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer és egy $(a_{N+1} - a_1)$ -edfokú egyismeretlenes egyenlet megoldására, mindehhez a szükséges kísérleti adatokat elég tág határok között választhattuk ki. A kísérleti adatokból akkor kell a legkevesebb, ha $\beta_1 = a_2, \beta_2 = a_3, \dots, \gamma_1 = a_3, \gamma_2 = a_4, \dots$, és így tovább, vagyis ha az egyes adatok egyenlő távolságú pontokból valók. Ez azonban meg is köti a pontok választását; az eredeti (8) értékrendszer jobban biztosítja, hogy megbízható adatokat használhassunk fel. A (8) rendszert mindig az adatok megbízhatóságát figyelembe véve állítsuk össze. Természetesen csak addig használható a leírt eljárás, amíg (9) fennáll, ez azonban a gyakorlatban legtöbbször teljesül.

Általában ajánlatos többféleképpen megválasztott adatseregéből többször határozni meg az ismeretlen paramétereket, s azután közepelni az eredményeket.

2—3 komponensnél ez az eljárás jól alkalmazható. Legfőbb haszna, hogy akkor is alkalmazható, ha az f_v -értékeknek csak egy része ismeretes; ez gyakran előfordul, mert a gyorsaság kedvéért nem mindig mérik ki az összes f_v értéket.³⁾

E paragrafus záradékául még a következőket említjük meg:

Ha $\max M_k$ illetve n nagy (esetleg több száz), a szóráscsökkentő eljárást meglassítja a nagy számolási munka. Az algebrai módszer ekkor is használható, feltételezve, hogy ismerjük a komponensek számát. Gondolhatnánk arra is, hogy az eloszlást lépcsősfüggvénnyé alakítjuk át (egységnyi vízszintes szakaszokat illesztünk az egyes pontokhoz), s ezt a függvényt valamilyen ortogonális függvényrendszer szerint kifejtjük, majd összefüggést keresünk a kiindulási és a csökkentett szórású keverék sorfejtésének együtthatói között. Sajnos, Fourier-sor alkalmazásakor ez az ötlet keresztülvihetetlen. Másirányú vizsgálataink még folyamatban vannak, s ezért nem időzünk tovább ennél a kérdésnél, csak azt említjük meg, hogy nagy $\max M_k$ illetve n esetén a binomiális eloszlások már jól közelíthetők a normális sűrűségfüggvénnyel, vagyis az eloszlás pontjait összekötő folytonos görbe jó közelítéssel Gauss-függvények keverékének tekinthető, erre pedig alkalmazhatjuk az [1]-ben leírt eljárásokat.

³⁾ A (7) magasabbfokú egyenletrendszer egyike azoknak, amelyeket »ad hoc« módszerrel meg lehet oldani, illetve egyszerűbb egyenletekre vissza lehet vezetni. Az irodalomban nem sok ilyen speciális, megoldható típus ismeretes; érdemes volna az ilyeneket és megoldási módszerüket összegyűjteni.

3. §.

A következőkben célkitűzésünknek megfelelően Poisson-eloszlások konstans súlyokkal vett

$$(17) \quad f_v = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^v}{v!} \quad (v = 0, 1, \dots)$$

keverékének $\left(A_k > 0, \sum_{k=1}^N A_k = 1, \lambda_k > 0, \text{ a } \lambda\text{-értékek különbözők} \right)$ felbontásával foglalkozunk: az f_v értékek ismeretében meg akarjuk határozni az ismeretlen A_k és λ_k paramétereket.

A binomiális eloszlásnál bemutatott szóráscsökkentés, illetve algebrai módszerek lényegében itt is alkalmazhatók. Itt is elég különböző λ_k értékek esetével foglalkoznunk.

A szóráscsökkentés módszer ebben az esetben azon az észrevételen alapszik, hogy a $\mu < \min \lambda_k$ paraméterrel képezett

$$(18) \quad F_v(\mu) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-(\lambda_k - \mu)} \frac{(\lambda_k - \mu)^v}{v!} \quad (v = 0, 1, \dots)$$

keverék a (17) alattitól csak abban különbözik, hogy a komponensek maximális eloszlásértéke ebben nagyobb, szórása kisebb, és $\mu \rightarrow \min \lambda_k = \lambda_\tau$ esetén a τ indexű komponens a $v = 0$ -nál A_τ magasságban jelentkező egyetlen ponttá fajul el, ami paraméterek megállapítását, komponens-leválasztást, további kezelést épp oly módon tesz lehetővé, mint ahogy azt a binomiális eloszlás esetében már részletesen letárgyaltuk.

Tekintsük problémánkat itt is megoldottnak, ha az f_v és általunk választott, monoton növekvő μ -értékek segítségével elő tudjuk állítani az $F_v(\mu)$ kifejezéseket.

Erről az előállításról szól a következő

Tétel: Poisson-eloszlások

$$(19) \quad f_v = \sum_{k=1}^N A_k e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^v}{v!}$$

keveréke és az ismeretlen A_k, λ_k paraméterek meghatározására szolgáló

$$(20) \quad F_v(\mu) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-(\lambda_k - \mu)} \frac{(\lambda_k - \mu)^v}{v!}$$

($\mu < \min \lambda_k$ általunk választott valós szám) keverék közt a következő kapcsolatot áll fenn:

$$(21) \quad F_v(\mu) = e^\mu \sum_{q=0}^v \frac{(-\mu)^{v-q}}{(v-q)!} f_q.$$

$$F_\nu(\mu) = e^\mu \sum_{q=0}^{\nu} \binom{\nu}{q} \frac{1}{\nu!} (-\mu)^{\nu-q} \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\lambda_k} \lambda_k =$$

$$= e^\mu \sum_{q=0}^{\nu} \frac{(-\mu)^{\nu-q}}{(\nu-q)!} \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^q}{q!} = e^\mu \sum_{q=0}^{\nu} \frac{(-\mu)^{\nu-q}}{(\nu-q)!} f_q$$

mivel a szummációkat felcserélhetjük, q. e. d.

Vegyük észre, hogy $F_\nu(\mu)$ meghatározásához az első f_ν -kre van szükség. Ha a legelső f_ν -k megbízhatatlanok, vagy nem mindegyiket ismerjük — viszont ismerjük a komponensek számát —, 2–3 komponensnél itt is alkalmazható algebrai eljárás, épp úgy, mint a binomiális eloszlásoknál láttuk. Az

$$(22) \quad f_\nu = \sum_{k=0}^N A_k \cdot e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^\nu}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \dots).$$

értékeket az $A_k \cdot e^{-\lambda_k} = G_k$, $\nu! f_\nu = H_\nu$ relációkkal bevezetett új G_k , H_ν paraméterek segítségével átvisszük a

$$(23) \quad \sum_{k=1}^N G_k \cdot \lambda_k^\nu = H_\nu$$

egyenletrendszerbe. Ez azonban ugyanúgy kezelhető, mint a (7) egyenletrendszer. Gyakorlati felhasználására is az ott mondottak vonatkoznak, s így itt mindezt felesleges lenne megismételni.

IRODALOM

- [1] MEDGYESSY P.: »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőikre.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.
- [2] MEDGYESSY P.: »Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 155—169 (jelen kötet).
- [3] MEDGYESSY P.—RÉNYI A.—TETTAMANTI K.—VINCZE I.: »A frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem-teljes diffúzió esetében.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 81—97 (jelen kötet).
- [4] C. F. GAUSS: »Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.« — *Werke*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866, Band 3. 165—196.
- [5] C. RUNGE—R. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen*. Springer, Berlin, 1924.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. Меддеш

Резюме

Настоящая работа посвящается следующим проблемам:

a) Известное дискретное распределение вероятностей является наложением биномиальных распределений с различными параметрами, (то есть «смесью с постоянными весами»), то есть оно имеет вид (3). Зная f_v , следует определить неизвестные параметры A_k, M_k, p_k компонентов.

b) Известное дискретное распределение является наложением (17) распределений Пуассона с различными параметрами. Следует определить неизвестные параметры A_k, λ_k .

Такие смеси часто встречаются при различных исследованиях. Проблема a) возникает, например, при т. н. фракционирующем разделении в химической промышленности (см. список литературы в (3)).

При решении обеих проблем используем, главным образом, т. н. «метод уменьшения дисперсии», примененный в (1) и (2). В случае a) это приводит к следующему:

Зная значения f_v из (3), мы в состоянии представлять распределение $F_v(\mu)$ (4). Оно отличается от (3) только тем, что все значения p_k умножены на выбранный нами параметр μ . Пусть распределения μ представляются при помощи возрастающих $F_v(\mu)$. Если параметром μ достигается значение $1/\max p_k$, то компоненты $F_v(\mu)$ с параметром вырождаются в единственную выступающую точку, из данных которой параметры соответствующих компонентов определяются хорошим приближением. В то же время уменьшается и дисперсия других компонент. После отделения вырожденных компонент, предлагаемый прием повторяется.

Величины $F_v(\mu)$, представляющие решение проблемы, суть линейные выражения, составленные из f_v формулой (5).

В качестве иллюстрации приводим два примера (рис. 1 и 2). На рис. 1 исходная смесь распределение изображается полными точками (это распределение характеризует результат фракционирующего разделения). Результат разложения, соответствующего значению $\mu = 1,073$, представляется неполными точками. Видно, что мы имеем не 2, а 5 компонент. Это подтверждается и разложением, проведенном после отщепления сильно выступающей последней компоненты (рис. 1.b.). — На рис. 2.a. и 2.b. показывается разделение фиктивной смеси. Смесь имеет единственный максимум; после разделения отдельные компоненты отчетливо проявляются.

Описанный прием может найти применение лишь при известных f_v . В случае, если известна лишь часть этих данных, можно применять следующий способ: Пусть нам известно число N компонент и $M_k = n$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Запишем для достаточного числа точек сложного распределения соотношение (6). Таким образом мы приходим к системе уравнений для A_k и p_k , которую преобразуем к форме (7).

Предположим, что известные нам f_v делаем возможным записать (7) для систем $v = \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \dots$ соответствующим (8) [(10), (14)]. Решение полученной таким образом системы уравнений приводится при помощи известного приема [5] к решению уравнения высшей степени и двух систем линейных уравнений. Из решений уже можно вычислить искомые A_k и p_k .

Следует заметить, что для больших n , смесь (6) с достаточной точностью представляется как смесь нормальных функций плотности. В этом случае применимы методы, изложенные в [1] и [2].

В случае разложения смеси (17) распределений Пуассона (случай b) мы также применяем изложенный метод. Основой разложения служит представление смеси (18) при помощи (17). Здесь параметр μ следует вычитать из λ_k . Компоненты (18) разделяются в случае $\mu = \min \lambda_k$ таким же образом, как и компоненты смеси a). Связь между (17) и (18) устанавливается формулой (21). При надобности можно прибегнуть и в данном случае к алгебраическим методам.

DECOMPOSITION OF DISCRETE COMPOUND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

P. MEDGYESSY

Summary

This paper deals with the following problems:

a) A given discrete probability distribution is the superposition (a compound) of binomial distributions with different parameters, — i. e. it is of the form (3). The probabilities f_r being given, we have to determine the unknown parameters A_k , M_k , p_k of the components.

b) A given discrete probability distribution is a superposition (17) of Poisson-distributions with different parameters; the unknown parameters A_k , λ_k are to be determined.

We often meet such compound distributions in various scientific investigations. E. g. the problem a) arises in connection with the procedure called «counter-current distribution» used in chemical industry (see the bibliography of [3]).

For the solution of both problems we primarily apply the so called «variance reduction method» used in [1] and [2]. In the case of a) the application of this method can be done as follows: From the knowledge of the probabilities f_r (see (3)) we can construct the distribution $F_r(\mu)$ given by (4). This differs from (3) so far as all the p_k -s in it are multiplied with the parameter μ . μ will be chosen arbitrarily (but so that $\mu p_k \leq 1$). When increasing μ we reach $1/\max p_k$, those components of $F_r(\mu)$ which have the parameter $\max p_k$ degenerate into a single point (see fig. 1. a.). If these points appear separately their coordinates furnish approximate values of the parameters A_k , M_k . — Simultaneously, the variances of all the other components will also diminish. After the separation of the degenerated components the procedure can be repeated.

The values $F_r(\mu)$ yielding the solution are given by (5) as linear forms of the probabilities f_r .

The method is illustrated by two examples (Fig. 1. and 2.) On Fig. 1. the full points show the original compound distribution (it is the result of some counter-current distribution). The result of a transformation with $\mu = 1,073$ is marked by circles. It is easy to see that there are not 2 but 5 components. This is also justified by a second decomposition performed after the separation of the last component. (Fig. 1. b.)

Fig. 1. a. and b. show the decomposition of an artificial compound distribution. There is only one maximum; after the decomposition the separate components present themselves very markedly.

The described method uses all the probabilities f_r . If they are not all available, then instead of the preceding procedure we may apply the following method [inasmuch the number N of the components is known and $M_k = n$ ($k = 1, 2, \dots, N$)]. We write (6) for an adequate set of the points of the compound distribution. Then we obtain a system of equations for the A_k and p_k -s, which can be brought to the form (7). Suppose that the known f_r -s make possible to write (7) for the systems of values $r = \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \dots$ corresponding to (8) (see (10), (14)). By the aid of a well-known technique [5] the solution of the system of equations thus obtained can be reduced to that of an equation of higher degree with an only unknown and of two systems of linear equations. From this solution, the A_k and p_k -s can already be determined.

We remark that in the case of larger n , the compound distribution (6) can very well be approximated by a compound of normal frequency functions; then the methods given in [1] and [2] may be applied.

Similarly, for the decomposition of a compound (17) of Poisson-distributions (case b)), the above method can be applied. The basis of a decomposition is the construction of the compound distribution (18) by the aid of (17). Here the parameter μ will be subtracted from the λ_k . In the case of $\mu = \min \lambda_k$ the components of (18) will generally separate from each other like those of the compound a). The relation between (17) and (18) is given by (21). If necessary an algebraic procedure may be applied in this case also.

ÚJABB EREDMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐIRE BONTÁSÁVAL KAPCSOLATBAN

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

[1] dolgozatunkban a következő problémával foglalkoztunk : Legyen $F^*(x, t)$ a t paramétertől függő eloszlásfüggvény-család, $(-\infty < t < \infty)$ és $F^*(x, t)$ folytonos t -ben ; legyen továbbá $P(t)$ egy valószínűség-eloszlás-függvény. Az $F^*(x, t)$ komponensek $P(t)$ súlyfüggvénnyel vett keverékén az

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$$

függvényt értettük ; ez maga is eloszlásfüggvény. Megvizsgálandó, meghatározható-e bizonyos feltételek mellett $F(x)$ és $P(t)$ vagy csak $F(x)$ ismeretében az (1) relációban szereplő többi függvény.

Ha a probléma megoldható, a megoldási eljárást $F(x)$ összetevőkre bontásának, *felbontásának* neveztük.

A felbontás problémája akkor is felvethető, amidőn bizonyos $f^*(x, t)$ sűrűségfüggvények (1)-hez hasonlóan értelmezett keverékéről van szó (mely maga is sűrűségfüggvény), vagy amidőn $P(t)$ tiszta lépcsősfüggvény véges számú ugrással.

Említett dolgozatunk azzal az egyetlen speciális esettel foglalkozott, amidőn a keverék sűrűségfüggvényén kívül csak a komponensek típusát ismertük, s azok Gauss-függvények voltak, a súlyfüggvényről pedig csak azt tudtuk, hogy tiszta lépcsős függvény véges számú ugrással ; ily módon az volt a feladatunk, hogy egy

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}$$

típusú keverékből (amely tulajdonképpen különböző paraméterű, konstans faktorokkal szorzott Gauss-függvények szuperpozíciója), egyedül $f(x)$ ismeretében meghatározzuk az ismeretlen A_k, m_k, σ_k paramétereket. Az egyszerűbb

tárgyalás kedvéért, illetőleg a gyakorlati vonatkozásokat szem előtt tartva ezekről azt is feltettük, hogy

$$A_k > 0, \quad 0 < m_1 < \dots < m_N, \quad \sigma_k > 0.$$

A probléma gyakorlati fontosságáról említett cikkünkben eleget beszélünk. Mostani dolgozatunknak kettős célja van: egyrészt össze akarjuk foglalni azokat az újabb eredményeinket, amelyek a (2) keverék felbontására (az úgynevezett *Gauss-analízisre*) vonatkoznak és a gyakorlat szempontjából elsőrendű fontosságúak, másrészt ismertetni akarjuk, hogyan terjeszthető ki a Gauss-analízisnél alkalmazott úgynevezett »szóráscsökkentés« módszere egységesen egy egész függvény-családra, illetve hogyan alkalmazható ebbe a családba tartozó függvények (2) típusú keverékének felbontására.

1. §.

[1]-ben részletesen ismertettük a szóráscsökkentés módszerét Gauss-függvények esetében. Ennek az volt a lényege, hogy az általunk választott λ^2 paraméterrel csökkentett szórású komponenseket tartalmazó s így a komponensek grafikus különválasztására alkalmasabb,

$$(3) \quad f^*(x, \lambda^2) \equiv f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}} \quad (\lambda^2 < \min \sigma_k^2)$$

keverék [$f(x)$ úgynevezett λ -transzformáltja] és a (2) alatti $f(x)$ függvény \mathcal{F} -fel jelölt Fourier-transzformáltjai között az

$$(4) \quad \mathcal{F}\{f^*\} = e^{\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \cdot \mathcal{F}\{f\}$$

összefüggés áll fenn, amelynek alapján $f(x)$ ismeretében $f^*(x)$ előállítható.

A (4) reláció a gyakorlatban nem használható; az [1] dolgozatban azonban megemlítettük, hogy ha az elég nagy $(0, l)$ intervallumon tekintett $f(x)$, illetve $f^*(x)$ függvényt a $(-l, 0)$ intervallumra párosan kiterjesztjük, és az így kapott függvényt a $(-l, l)$ intervallumon Fourier-cosinus-sorba fejtjük, a Fourier-együtthatók között (4)-hez hasonló összefüggés áll fenn közelítőleg.

Ezzel a λ -transzformált közelítő előállítására már találtunk egy módszert. Ez a módszer különben nem az egyetlen; mielőtt azonban a többire rátérnénk, ebből a Fourier-soros eljárásból ismertetünk annyit, amennyi a gyakorlat szempontjából szükséges (részletes tárgyalást itt nem közölhetünk).

Tekintsük az előbb említett $f(x)$ ill. $f^*(x)$ függvényeket és jelöljük ki oly nagy $(0, l)$ intervallumot, hogy annak határain az általában empirikusan adott $f(x)$ gyakorlatilag zérus. (Mivel $f^*(x)$ komponensei gyorsabban csökkennek $f(x)$ -énél, $f^*(x)$ -nek eleve meglesz ez a tulajdonsága.) A $(-l, l)$

intervallumra történő kiterjesztés után kapott Fourier-cosinus-együtthatókat $f(x)$ esetében a

$$(5) \quad Q_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

$f^*(x)$ esetében pedig az

$$(6) \quad R_n = \frac{2}{l} \int_0^l f^*(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

integrálok adják meg. Ezek között $f^*(x) \equiv f^*(x, \lambda^*)$ esetén közelítőleg fennáll az

$$(7) \quad R_n \sim Q_n e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}}$$

összefüggés. Következésképpen az $f^*(x, \lambda^2)$ függvényt úgy állíthatjuk elő, hogy $f(x)$ és a mondottak szerint választott l alapján meghatározzuk (pl. harmonikus analízissal) a Q_n együtthatókat, majd általunk választott λ^2 -tel (7) alapján az R_n együtthatókat. $f^*(x, \lambda^2)$ -et ekkor az R_n értékekkel,

mint együtthatókkal képezett $\frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x$ trigonometrikus sor ad-

ja meg közelítőleg, vagyis az R_n -értékekkel Fourier-szintézist kell végeznünk.

Természetesen a sorfejtést illetve szintézist csak bizonyos M indexig bezárolag végezhetjük el. Ez újabb hibát von maga után. Mindent figyelembe véve, bonyolult számítások után az ezen közelítő eljárásnál elkövetett hibára, D -re (az említett trigonometrikus sor szelete és közti különbség abszolút értékére) a

$$(8) \quad D \leq \left| \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{M\pi \sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}}{l} \right) \right] \right|$$

felső korlátot kapjuk $\left(\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$. Ha a $\min \sigma_k^2 - \lambda^2$ értéket

rögzítjük, M növelésével csökkenthető a hiba. Az itt szereplő mennyiségek mind

megállapíthatók, vagy az eljárás során megbecsülhetők. $\sum_{k=1}^N A_k$ nagy pon-

tossággal az $f(x)$ alatti terület. Egy »kísérleti« λ^2 -értékkel elvégezve az eljárást, az egyes komponensek általában már annyira szétválnak, hogy a legkisebb szórás, $\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}$ értéket már meg tudjuk állapítani. Ezek után D -t is megbecsülhetjük. A paraméterek alkalmas választását itt nem taglalhatjuk. Nyilván mennél nagyobb M kívánatos; az l értékét úgysem lehet nagyon változtatni.

Berencz Ferenc [2] ezzel az eljárással ($M = 33$ mellett) feldolgozta atomos *Fe* bizonyos spektrumszakaszának hullámhossz-megállapításra közvetlenül nem használható intenzitás-diagrammját, (2) típusú keveréknek fogva fel azt. A szóráscsökkentés után az egyes spektrumvonalakhoz tartozó komponensek annyira különváltak, hogy a vonalak helyét már meg lehetett állapítani. Ellenőrzésül nagyobb felbontóképességű készülékkel is felvette ugyanazt a spektrumszakaszt. Ezen a felvételen az egyes vonalakhoz tartozó komponensek már nem mosták el egymást és így a vonalak helyét pontosan ki lehetett mérni. A Gauss-analízis alkalmazása után megállapított hullámhosszak jól egyeztek a nagyobb készülékkel kapott felvételtől közvetlenül kimért értékekkel: a matematikai eljárás mintegy pótolta a nagyobb felbontóképességű készüléket.

2. §.

Az [1] dolgozat 4. §-ában kimutattuk, hogy

$$(9) \quad f^*(x, \lambda^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda^{2\nu}}{\nu! 2^{\nu}} f^{(2\nu)}(x)$$

vagyis a λ -transzformált előállítható az analizálandó $f(x)$ páros deriváltjainak függvényesoraként. [1] 5. §-ában részletesen tárgyaltuk, hogyan alkalmazhatjuk a véges differenciákkal kifejezett differenciálhányadosokat, illetve. (9) egyes szeleteit $f^*(x, \lambda^2)$ közelítő meghatározásánál. Az eljárás hibáját ott csak érintettük; itt — részletek mellőzésével — most meg is adjuk.

Ha a sorfejtésben az R -edik tagnál állunk meg, emellett a differenciálhányadosokat közelítőleg határozzuk csak meg, kétszeres hibát követünk el, először is a sor maradéktagja elhanyagolásával, másodsor azzal, hogy a deriváltak közelítő értékei folytán a sorszelet sem lesz pontos. Legyen a 2ν -edik derivált numerikus meghatározásakor elkövetett abszolút hiba $\Delta_{2\nu}$, akkor a második hibaforrásból származó δ_2 abszolút hibára nyilván fennáll a

$$\delta_2 \leq \sum_{\nu=0}^R \frac{\lambda^{2\nu}}{\nu! 2^{\nu}} \Delta_{2\nu}.$$

reláció. A maradéktag elhagyásából származó abszolút hibát jelöljük δ_1 -gyel. Az összes abszolút hiba nyilván $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ lesz. $\Delta_{2\nu}$ -t és így δ_2 -t, mint tudjuk, tetszőlegesen lecsökkenthetjük a véges differenciák lépéseinek finomításával; $\Delta_{2\nu}$ kifejezését a közelítő számítások kézikönyveiben megtalálhatjuk (lásd például [3]). δ_1 -ről kimutatható, hogy

$$(10) \quad \delta_1 < \frac{0,85}{\sqrt{2\pi(R+1)} \min \sigma_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R+1}} \frac{\sqrt{f(x)}}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)}.$$

Itt ismét csupa kísérletileg könnyen meghatározható mennyiség szerepel; δ_1 függ azonkívül $f(x)$ -től is, vagyis a vizsgált helytől; ez előnyösebb, mint a Fourier-sorfejtés esetében volt, hiszen ott $f(x)$ kis értékei már hibahatáron belül estek.

Természetes, hogy előre megadott δ esetén is megmondhatjuk, milyen pontossággal végezzük a deriváltak meghatározását, valamint, hogy milyen R -ig menjünk el a sorfejtéssel. Részletekbe itt azonban nem bocsátkozhatunk

3. §.

Még egy közelítő eljárást említettünk az [1] dolgozat 5. §-ában : ennek az volt a lényege, hogy ha az analizálandó függvényt

$$(11) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

$$\left(\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

Hermite-sorba fejtjük, $f^*(x)$ Hermite-sorfejtését bizonyos, a gyakorlatban mindig teljesíthető feltételek mellett, az

$$(12) \quad f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

kifejezés szolgáltatja, ahol

$$(13) \quad c_n^* = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! (-1)^q \lambda^{2q}}{(n-2q)! q! 2^q} c_{n-2q}$$

A gyakorlatban persze az a helyzet, hogy $f(x)$ sorfejtését bizonyos S indexnél abbahagyjuk, és $f^*(x)$ -et is csak közelítőleg határozzuk meg, (12)-t az S -edik tagnál zárva le. Az ekkor elkövetett Δ_S abszolút hibára a következő korlát adható meg :

$$(14) \quad \Delta_S < \frac{1,23}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\sum_{k=1}^N A_k \right) \frac{e^{\frac{\max m_k^2}{4(1 - \max \sigma_k^2 + \lambda^2)}} (\sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2})^{S+1}}{1 - \sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2}}$$

amelyben ismét könnyen megállapítható mennyiségek szerepelnek. Ez a korlát is függ a vizsgált helytől ; ha egy empirikus görbét nagyjából szimmetrikusan helyezünk el az origó körül, a görbe szélei felé a hibakorlát jóval kisebb lesz, mint az origó körül, minthogy a szélek felé a hibakorlátban szereplő $e^{-\frac{x^2}{4}}$ tag is rohamosan csökken.

Mindebből látható, hogy a Fourier-soros eljárás kivételével a többinél jól használható hibakorlátokat kapunk, s így gyakorlatban jobban beválnának. Ha megfelelő gépi segédeszközök rendelkezésre állanak, a Fourier-soros eljárással szemben határozottan előnyben kell részesíteni őket.

Ezzel lezártuk a Gauss-analízisre vonatkozó kiegészítéseinket.

4. §.

Mindeddig *normális* sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékének a szóráscsökkentés módszerével történő felbontásáról volt szó.

A következőkben megmutatjuk, hogy a szóráscsökkentés módszere egy egész sűrűség- (illetve eloszlás-) függvénycsaládra is kiterjeszthető, illetve mindazon sűrűség-(eloszlás-) függvények konstans súlyokkal vett keveréke is felbontható ezzel a módszerrel, amelyek a szóbanforgó függvénycsaládba tartoznak.

Tudomásunk szerint a módszer ilyen általánosításával eddig nem foglalkoztak.

Megállapításainkat először eloszlásfüggvényekre fogalmazzuk meg.

A szóbanforgó függvénycsalád az úgynevezett *stabilis* eloszlás-, illetve sűrűségfüggvények családja (lásd például: [4]).

Egy $F(x)$ eloszlásfüggvényt akkor nevezünk stabilisnek, ha tetszőleges valós $a_1 > 0$, b_1 , $a_2 > 0$, b_2 esetén

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b)$$

ahol $a > 0$ és b az a_1 , a_2 , b_1 és b_2 értékektől függő valós állandók, a $*$ pedig a kompozíció műveletét jelenti.

Az így definiált stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $F(x)$ karakterisztikus függvényére, $\varphi(t)$ -re fennálljon a

$$(15) \quad \log \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^a \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \omega(t, a)\}$$

összefüggés, ahol a , β , γ és c állandók: γ tetszőleges valós szám, $|\beta| \leq 1$, $0 < a \leq 2$, $c \geq 0$, ezenkívül

$$\omega(t, a) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} a, & \text{ha } a \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t|, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Mindezek értelemszerűen kiterjeszthetők sűrűségfüggvényekre is.

Ezen összefoglalás után eredményünket a következőképpen fogalmazzuk meg:

Tekintsük azokat az $F_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) stabilis eloszlásfüggvényeket, amelyeknek $\varphi_k(t)$ karakterisztikus függvénye

$$(16) \quad \varphi_k(t) = e^{i\gamma_k t - c_k |t|^a [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, a)]}$$

alakú. Ezek az általános esettől abban különböznek, hogy a és β mindegyik $F_k(x)$ -függvényénél ugyanaz. Vizsgáljuk az *ismert*

$$(17) \quad F(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot F_k(x)$$

keveréket ($A_k > 0$), amelynek karakterisztikus függvénye (16) alapján

$$(18) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{i\gamma_k t - c_k |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}$$

Erről kimondható a következő

Tétel: Legyen a (17) keverék-eloszlásfüggvény (18) karakterisztikus függvényében α, β ismert, a γ_k és c_k -k pedig ismeretlenek, ezen felül (az egyszerűség kedvéért) $\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$) és $0 < c_1 < \dots < c_N$. Legyen továbbá $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ 0-tól monoton növekvő valós számok olyan sorozata, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$ és

$$(19) \quad \Psi(x, \lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}[\varphi(t) \cdot e^{i\lambda_n |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}]$$

(\mathcal{F}^{-1} inverz Fourier—Stieltjes-transzformálást jelent). Ekkor az ismeretlen c_1, γ_1, A_1 konstansokat egyértelműen meghatározzák a $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x, \lambda_n) = \Psi^*(x)$ eloszlásfüggvény következő tulajdonságai:

$$(20) \quad \begin{aligned} a) \quad & \Psi^*(\gamma_1 + 0) - \Psi^*(\gamma_1 - 0) = A_1 \\ b) \quad & \Psi^*(x) \text{ minden más helyen folytonos.} \end{aligned}$$

Mielőtt a bizonyításra rátérnénk, rámutatunk a tétel lényegére: olyan keverékről van szó, ahol a komponensekről tudjuk, hogy ismert, közös α, β és ismeretlen γ_k, c_k paraméterű karakterisztikus függvényű stabilis eloszlásfüggvények, és az A_k súlyok is ismeretlenek. Ha ennek a keveréknek képezzük a karakterisztikus függvényét, majd általunk választott különböző λ_n paraméterértékekkel a (19)-ben szereplő szorzatot, s ezeket sorban vissza-transzformáljuk, az így kapott $\Psi(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvények sorozata $\lambda_n \rightarrow c_1$ esetén olyan $\Psi^*(x)$ eloszlásfüggvényhez fog tartani, amely az $x = \gamma_1$ helyen (és csakis itt) A_1 értékű ugrást mutat. Így tehát $\Psi^*(x)$ alakú tulajdonságaiból meghatározhatók az ismeretlen paraméterek.

Bizonyítás: Legyen $\psi_k(t) = e^{i\gamma_k t - (c_k - \lambda_n) |t|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}$,

$$\Psi_k(x, \lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}[\psi_k(t)] \quad (k = 1, \dots, N).$$

(18) és (19) alapján

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda_n) &= A_1 \cdot \mathcal{F}^{-1}[\psi_1(t)] + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \mathcal{F}^{-1}[\psi_k(t)] = \\ &= A_1 \cdot \Psi_1(x, \lambda_n) + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \Psi_k(x, \lambda_n). \end{aligned}$$

$\Psi_k(x, \lambda_n)$ a $\psi_k(t)$ karakterisztikus függvényhez tartozó eloszlásfüggvény. Tekintsük a

$$\Psi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x, \lambda_n) = A_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1(x, \lambda_n) + \\ + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$$

függvényt. $n \rightarrow \infty$ esetén, amidőn $\lambda_n \rightarrow c_1$, $\psi_1(t)$ minden t -re a folytonos $e^{i\gamma_1 t}$ karakterisztikus függvényhez konvergál. Ekkor a karakterisztikus- és eloszlásfüggvények közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés értelmében (lásd például: [4], p. 55, 1. és 2. tételek) a $\psi_1(t)$ -hez tartozó $\Psi_1(x, \lambda_n)$ eloszlás-

függvény konvergál az $e^{i\gamma_1 t}$ -hez tartozó $E_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > \gamma_1 \\ 0, & \text{ha } x \leq \gamma_1 \end{cases}$ eloszlásfüggvényhez, ennek minden folytonossági pontjában, azaz

$$A_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1(x, \lambda_n) = \begin{cases} A_1, & \text{ha } x > \gamma_1 \\ 0, & \text{ha } x < \gamma_1 \end{cases},$$

vagyis olyan lépcsős függvény, amelynek egyetlen, A_1 értékű ugrása van az $x = \gamma_1$ pontban.

Ha $k \geq 2$, minden t -re

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k(t) = e^{i\gamma_k t - (c_k - c_1)|t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \text{sgn } t \cdot \omega(t, a)]}$$

és így (lásd például: [4], p. 55, 1. és 2. tételek) a $\psi_k(t)$ -hez tartozó $\Psi_k(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvény konvergál a $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k(t)$ -hez tartozó eloszlásfüggvényhez,

ennek minden folytonossági pontjában, — vagyis azonos vele, mert a stabilis eloszlásfüggvények folytonosak, ha karakterisztikus függvényükben $|t|^\alpha$ együtthatója pozitív (lásd például: [4], p. 189). Így tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$ folyto-

nos ($k \geq 2$); mindezekből végülis az következik, hogy az $x = \gamma_1$ helyen $\Psi^*(x)$ jobb- és baloldali határértékének különbsége A_1 , egyébként pedig $\Psi^*(x)$ folytonos. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a karakterisztikus függvények unicitási tétele értelmében (lásd például: [4], p. 55, 2. tétel) $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$ ($k \geq 2$) a kiindulási (17) keverék k -adik komponensével azonos típusú stabilis eloszlásfüggvény; ez azonnal látható (21) alatti karakterisztikus függvényéből.

Mielőtt továbbmennénk, nézzük a tétel gyakorlati alkalmazását. Mindenesetre tudnunk kell, milyen α, β paraméterekhez tartozó stabilis eloszlásfüggvények keverékéről van szó; ha a komponensek típusát ismerjük, ezt is tudjuk. Ekkor képezzük a keverék karakterisztikus függvényét, majd egyes monoton növekvő λ_n értékekkel kísérletezve megalkotjuk az $e^{\lambda_n |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \text{sgn } t \cdot \omega(t, a)]}$ függvényeket, szorozzuk velük a karakterisztikus függvényt és visszatranszformáljuk. Ha λ_n -nel közel járunk c_1 -hez, a visszatranszformálás után kapott eloszlásfüggvény az $x = \gamma_1$ helyen egyre inkább (A_1 értékű) ugrást fog mu-

tatni. Mivel c_1 -et nem ismerjük, a λ_n -eket sem adhatjuk meg előre; legjobb néhány kis értékű λ_n -nel elvégezni az eljárást és eredményeiket összehasonlítani. Ha nem léptük túl c_1 -et a λ_n -ekkel, a nagyobb λ_n -ekhez tartozó eredménygörbék egyre jobban mutatják az említett ugrást. Ha egy λ_n -nel c_1 -et már túlléptük, a hozzátartozó eredménygörbe a megelőzőhöz viszonyítva teljesen szabálytalan menetet mutat. Mindebből nagyjából megállapítható, melyik λ_n közelíti meg legjobban alulról c_1 -et; ezzel közelítő értéket kapunk c_1 -re is.

Azonnal látható, hogy az $\Psi^*(x) - A_1 E_1(x)$ függvényen az egész eljárás megismételhető és eredményéből most már c_2 , γ_2 , A_2 határozható meg, szem előtt tartva, hogy ekkor mindenütt $c_k - c_1$ szerepel, — és így tovább, komponensről komponensre.

Tételünk mechanikusan kiterjeszthető arra a legáltalánosabb esetre is, amidőn mind a c_k , mind a γ_k értékek közt egyenlők is vannak [de nincs olyan c_k , γ_k értékpár, amely megegyezne valamely másik c_l , γ_l ($l \neq k$) értékpárral]. Ekkor ugyanis legfeljebb egyszerre több helyen lép fel ugrás a határeloszlásfüggvényben. Ezeket persze mind le kell vonnunk, amidőn az eljárás ismétlésével újabb paramétereket akarunk meghatározni.

Mindezekből az is látható, hogy az ismeretlen paraméterek meghatározása egyértelmű (a diszkontinuitások egyértelműen jelentkeznek az eljárás után kapott eloszlásfüggvényben). *A különböző c_k , γ_k párok megszámlálásával N -et is megkapjuk.*

Ha ismerjük a komponensek típusát, azt is tudjuk, hogyan függnek össze a komponensek alakját jellemző paraméterek a karakterisztikus függvényben szereplő c_k , γ_k paraméterekkel. Ha tehát eljárásunk során egy komponens *karakterisztikus függvényének* c_k , γ_k értékpárját már megkaptuk, ebből meghatározhatjuk a *komponens* ismeretlen paramétereit is.

Sajnos, csak pár esetben ismerjük a stabilis eloszlásfüggvények explicit alakját. *Minden esetben meghatározható azonban a komponensek száma, mint arra fentebb már utaltunk.* Sokszor ez is elég. A gyakorlatban különben az is előadódhat, hogy egy ismert keverék komponenseinek karakterisztikus függvényét tudjuk csak meghatározni, — például elméleti fizikai úton, — a komponensek formuláját azonban nem (lásd például: [5]). Lehet tehát jelentősége az eljárásnak akkor is, amidőn a komponensek típusát explicite nem is ismerjük.

5. §.

Nagyon fontos a következő megállapítás: az előző §-ban ismertetett tétel és alkalmazása a gyakorlatba csak közelítőleg vihető át: az említett ugrást az eloszlásfüggvényben sohasem kapjuk meg a szó exakt értelmében, hanem csak többé-kevésbé lépcsőszerűen kiemelkedő szakasz jelentkezik. Ebből azonban nehéz paramétereket megállapítani. Éppen ezért nem az eloszlás-, hanem a hozzájuk tartozó *sűrűségfüggvények* keverékén végezzük az 5. §. tételében közölt eljárást, azzal a különbséggel, hogy Fourier—Stieltjes-transzformáció helyett Fourier-transzformációt szerepeltetünk. Az eredmény az lesz, hogy ha λ_n már közel jár c_1 -hez, az $x = \gamma_1$ helyen nem ugráshoz hasonló görberészletet, hanem végtelenbe keskenyedő görbeszakaszt (»tű«) kapunk. Ez azonban sokkal jobban felismerhető, mint az ugrás és segítségével γ_1 is könnyen meghatározható (itt lesz a »tű« maximuma). A következő lépésnél

ezt a »tűt« hagynánk ki a görbéből, megfelelően az ugrás levonásának. — A_1 -et viszont ekkor már nem olvashatjuk le közvetlenül, csak akkor, ha a »tű« alatti területet elég pontosan kimérhetjük (tudniillik könnyen igazolható, hogy ez éppen A_1 -gyel egyenlő). Minthogy ezt a gyakorlatban legtöbbször megtehetjük, egyéb módszerekre nem térünk ki. Általában az a helyzet, hogy egy-két λ_n érték alkalmazása után már »tűkre« válik szét a görbe, s ezekből az egyes paramétereket jó közelítéssel meghatározhatjuk. A $\lambda_n = c_1$ ideális esetet a gyakorlatban nem is érhetjük el soha.

6. §.

Befejezésül néhány példával illusztráljuk általános eljárásunkat.

Két olyan sűrűségfüggvény-keveréssel foglalkozunk, amely egyrészt stabilis komponensekből áll, másrészt explicit alakját és karakterisztikus függvényének paramétereit is ismerjük.

Az egyik Gauss-függvények keveréke :

$$(22) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k},$$

ahol A_k , m_k , σ_k ismeretlenek, s egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$). Ezek a komponensek stabilisak; $f(x)$ karakterisztikus függvénye

$$(23) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{i\gamma_k t - \frac{\sigma_k^2}{2} t^2}.$$

vagyis a komponensek karakterisztikus függvényeinek paramétereit: $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma_k = m_k$, $c_k = \frac{\sigma_k^2}{2}$. Eljárásunk itt alkalmazható és úgy végezzük el,

hogy a $\varphi(t)$ függvényt megszorozzuk alkalmas λ -val képezett $e^{i\lambda t}$ függvénnyel $\left(\lambda < \min \frac{\sigma_k^2}{2}\right)$, s a szorzatot visszatranszformáljuk. Az eredményben az

egyes komponensek jobban különválnak és ha λ közel jár a $\frac{\sigma_1^2}{2}$ értékhez, az »1«

indexű komponens »tűként« jelentkezik. Az eljárásból tehát az m_1 , és $\frac{\sigma_1^2}{2}$ ér-

tékeket jó közelítéssel megkaphatjuk; ezek nemcsak a karakterisztikus függvény jellemzői: a sűrűségfüggvény ismeretlen paramétereit is azonnal kiszámíthatók belőlük. Ez az eljárás különben az [1]-ben külön tárgyalta Gauss-analízis (csak ott λ helyett $\frac{\lambda^2}{2}$ szerepelt), ezért tovább nem foglalkozunk vele.

Második példaként tekintsük az úgynevezett Cauchy-féle sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékét, vagyis legyen

$$(24) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{1}{\pi \sigma_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x - m_k)^2}{\sigma_k^2}}.$$

ahol $A_k > 0$, σ_k , m_k ismeretlen konstansok. Az egyszerűség kedvéért ismét feltesszük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$).

Ezek a komponensek is stabilisak és $f(x)$ karakterisztikus függvénye:

$$(25) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{im_k t - \sigma_k^2 |t|^2}.$$

A komponensek karakterisztikus függvényeinek paraméterei tehát $a = 1$, $\beta = 0$, $\gamma_k = m_k$, $c_k = \sigma_k$. Ismét alkalmazhatjuk felbontási tételünket; az eljárás a következő lesz: a keverék ismeretében képezzük a $\varphi(t)$ függvényt, majd szorozzuk alkalmas λ -val képezett $e^{\lambda |t|}$ -vel ($\lambda < \min \sigma_k$), s a szorzatot visszatranszformáljuk. A visszatranszformálás után kapott sűrűségfüggvény-keverék már alkalmasabb a komponensek karakterisztikus függvényeiben szereplő ismeretlen paraméterek meghatározására. (A komponensek az eljárás folytán elkeskenyednek.) Ha $\lambda = \sigma_1$, $x = m_1$ esetén itt is végtelenbe futó »tű«, jelentkezik s így ezt a két paramétert máris ismerjük. Az eljárás azután éppúgy folytatható, mint a Gauss-analízisnél. Az így kapott paraméterek azonban egyszersmind a komponens Cauchy-sűrűségfüggvények ismeretlen paraméterei is. (Itt tapasztaljuk a legegyszerűbb összefüggést a komponensek és karakterisztikus függvények paraméterei közt: azonosak.)

A gyakorlatban persze ismét közelítő eljárással dolgozunk, pl. ismét Fourier-sorfejtést használunk. Erre itt nem térhetünk ki részletesen. Alkalmazásokat illetőleg megjegyezzük, hogy bizonyos körülmények közt spektrumvonalak intenzitáslefutását is leírhatja Cauchy-sűrűségfüggvény (legalábbis jó közelítéssel), így tehát eljárásunk felhasználásra találhat a spektroszkópiában. Más területeken is találkozunk Cauchy-sűrűségfüggvényekkel (például atommagfizikai vonatkozásban, lásd: [6]); felbontás gyakorlati elvégzésére azonban eddig még nem került sor.

Nem foglalkozunk itt azzal az esettel, amidőn a komponensek a Pearson-féle V-típus néven ismert stabilis sűrűségfüggvények. A függvény és karakterisztikus függvénye itt is explicite ismert, paramétereik közt azonban az összefüggés bonyolult és a szóráscsökkentési eljárás általában már nem alkalmas a komponensek szétválasztására, csak számuk meghatározására.

Záradékol bizonyítás nélkül még a következőket említjük meg:

1° A szóráscsökkentés módszer nyitja a komponensek karakterisztikus függvényeinek jellegzetes $e^{P(t)}$ típusa, ahol $P(t)$ a t és $|t|$ valós együtthatós polinomja. Ez a típus nem-stabilis sűrűségfüggvénynél is fellelhető s bebizonyítható, hogy eljárásunk ekkor is alkalmazható. Ezzel még jobban kiszélesítettük a szóráscsökkentés módszerének alkalmazási területét. — Az ettől a típustól eltérő komponenseknél egyes esetekben található ugyan »ad hoc« eljárás, általánosságban azonban még feldolgozatlan a problémának ez a része.

2° Ha a keverék komponensei olyan stabilis sűrűségfüggvények, amelyek a (16) alatt közölt karakterisztikus függvényeiben $\alpha = p/q$ racionális szám (p és q relatív prímek), $\beta = 0$, ha $\alpha = 1$, a (19) egyenletben szereplő $\Psi(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvény, illetve ennek sűrűségfüggvénye, amelynek alapján a keverék felbontása történik, elegendő tesz egy parciális differenciálegyenletnek, amelynek együtthatói csak az ismert α és β értékektől függnének. A kezdeti feltétel a keverék-függvény, amelynek a görbáját ismerjük; ekkor azonban a differenciálegyenlet alapján a $\Psi(x, \lambda_n)$ függvényt numerikus módszerekkel bármilyen α, β értékpár esetén közelítőleg meghatározhatjuk.

Lehetőség nyílik ezenkívül arra is, hogy a 2. §-ban közölt Fourier-sorfejtéses eljárást kiterjesszük bármilyen stabilis sűrűségfüggvényekből álló keverékre.

Ezeket a széleskörű általánosításokat tartalmazó vizsgálatokat azonban itt már nem közölhetjük. Ezekkel majd újabb dolgozatban foglalkozunk teljes részletességgel.

IRODALOM

- [1] MEDGYESSY P.: »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.
- [2] F. BERENCZ: »Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven.« *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* 4 (1954) 317—325.
- [3] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
- [4] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [5] L. A. J. EMSLIE—G. W. KING: »Spectroscopy from the point of view of the communication theory. II. Line-width.« *Journal of the American Optical Society* 43 (1953) 658—663.
- [6] В. ГЕЙЗЕНБЕРГ: *Теория атомного ядра*. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1953. (W. Heisenberg »Theorie des Atomkerns« (1951) c. könyvének orosz kiadása.)
- [7] G. DOETSCH: »Die Elimination des Dopplereffekts bei Spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten.« *Zeitschrift für Physik* 49 (1928) 705—730.

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. Меддеши

Резюме

Пусть $F^*(x, t)$ семейство функций распределения, зависящая от параметра $t - \infty < t < \infty$, и пусть $F^*(x, t)$ непрерывна относительно t . Если $P(t)$ является некоторой функцией распределения вероятностей, то функция

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$$

называется смесью компонентов $F^*(x, t)$ с весовой функцией $P(t)$. Аналогично определяется смесь $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) dP(t)$, компоненты которой функции плотности $f^*(x, t)$

В первой части настоящей работы, точно так же как и в предшествующей работе [1], рассматривается проблема:

В смеси функций плотности выбираем компоненты и весовую функцию так, чтобы она приняла вид (2), (то есть стала наложением нормальных функций плотности с различными параметрами). Пусть в (2) $f(x)$ известна, $A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ неизвестны. Наша задача — определить при помощи $f(x)$ неизвестные параметры.

Если нам известны параметры, то мы уже знаем и компоненты, поэтому мы и можем называть метод решения нашей задачи *разложением на компоненты смеси* $f(x)$.

Решаем нашу проблему при помощи т. н. «метода уменьшения дисперсии» (см. также [1]). Произведем при помощи $f(x)$ смесь (3), которая отличается от (2) только тем, что она содержит σ_k^2 вместо $\sigma_k^2 - \lambda^2$. (λ^2 выбранный нами параметр). В (3) дисперсия компонент меньше, чем в (2), так что они показываются отдельно. Если записать (3) для нескольких λ^2 , монотонно возрастающих, то при $\lambda^2 \rightarrow \sigma_k^2$ компонента с σ_k^2 вырождается в «диракову δ ». Сильно отделяющиеся компоненты можно рассматривать как единственную кривую Гаусса, и таким образом можно приближенно определить их параметры. (Например, «дираковка δ » помещается у $x = m_k$ соответствующей σ_k^2 , а σ_k^2 равна λ^2 , приводящей к «дираковой δ »). После графического отделения «дираковой δ » (что по существу равносильно исключению одной компоненты), можно повторить применение приема.

(3)—т. н. преобразованную λ -нетрудно, однако, представить при помощи (4), связывающей преобразованные Фурье (2) и (3). Это соотношение было впервые замечено У. Дётчем ([7]).

(4) на практике неприменима, поэтому ищем приближенные методы. Краткому обсуждению таких методов и их оценок погрешности посвящается вторая часть настоящей работы.

В своей упомянутой работе Г. Дётч применяет ряды Фурье для представления преобразованной λ . Если продолжить $f(x)$ и $f^*(x)$ четно и разложить их ряд по косинусам в некотором интервале $(-l, l)$, то коэффициенты (5) и (6) этих разложений при больших l мало отличаются от преобразованных Фурье, взятых для $t = \frac{n\pi}{l}$, так что ввиду

(4) имеет место (7). $f^*(x)$ тогда можно задать приближенно при помощи синтеза Фурье. Абсолютная погрешность этого приближенного метода задается формулой (8) (этим вопросом Дётч не занимался). M означает число членов, до которых можно дойти анализом и синтезом Фурье.

Этим методом успешно были обработаны части спектра Fe [2].

Другой метод для приближенного представления $f^*(x)$ получается из легко доказываемого соотношения (9), (см. [1], § 4). Производные $f(x)$ однако следует определять численными методами. Если взять из (9) только R членов, то оценка для получаемой ошибки дается формулой (10), в которой — в противоположность (8) — фигурирует и $f(x)$. Погрешность при численном определении производных можно найти в соответствующих руководствах. В (1), § 5, мы уже дали пример для этого приема.

Третий метод основывается на том, что коэффициенты (11) и (12) разложений в ряд Чебышева—Эрмита функций $f(x)$ и $f^*(x)$ связаны соотношением (13). Если в разложении для $f(x)$ остановиться у индекса S , то для погрешности имеется предел (14).

В последней части настоящей работы метод уменьшения дисперсии распространяется на разложение таких смесей функций распределения (17) компонентами $F_k(x)$ которых служат т. н. *стабильные* функции распределения (см. [4]), то есть преобразованная Фурье смеси есть (18). Имеет место следующая.

Теорема. Пусть в (18) α , β -известны, γ_k , c_k неизвестны [$\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$)], $0 < c_1 < \dots < c_N$, и пусть $\{\lambda_n\}$ последовательность вещественных чисел монотонно возрастающая, исходя от 0, пусть, наконец $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$. Тогда неизвестные c_1 , γ_1 , A_1 однозначно определяются соотношением (20), составленным при помощи (19), и непрерывностью $\Psi^*(x)$ во всех точках $x \neq \gamma_1$.

Доказательство опирается на некоторые теоремы о характеристических функциях и о стабильных функциях распределения ([5], ([6], [7]).

На практике эта теорема применяется следующим образом: представляем при помощи некоторых произвольных λ_n преобразованную Фурье разлагаемой смеси $\varphi(t)$, — а потом и $\Psi(x, \lambda_n)$ из (19). Если λ_n близок к c_1 , то $\Psi(x, \lambda_n)$ имеет скачок A_1 у $x = \gamma_1$, в противном случае непрерывна. Зная этот факт, можем определить параметры. После вычитания скачка прием опять можно применять. Основная идея становится ясной, если сравнить (4) с (19). Важно то обстоятельство, что преобразованные Фурье имеют тип $e^{P(t)}$ [$P(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами от t и $|t|$].

На практике мы имеем дело со смесью функций плотности. Ясно, что в этом случае для $x = \gamma_1$ получается «диракова δ », а не скачок. Некоторые параметры можно определить и из этого факта.

Если известно соотношение, связывающее параметры компонентов и $\alpha, \beta, \gamma_k, c_k$, то после определения γ_k и c_k можно построить также и компоненты. В противном случае можно определить лишь N (число компонент). Первая возможность реализуется для уже исследованной смеси функций Гаусса ($\alpha=2, \beta=0$; (22), (23)) и для смеси функций плотности Коши ($\alpha=1, \beta=0$; (24), (25)). При разложении этой последней смеси можно опять прибегнуть к разложению в ряд Фурье. Предлагаемое разложение может найти применение при некоторых исследованиях спектроскопии и ядерной физики, где результаты измерения является смесью функций плотности Коши ([8], [9]).

В общем случае основой разложения может служить тот факт, что в случае $\alpha = p/q$ (числа p и q взаимно простые) и $\beta = 0$, если $\alpha = 1$ функция $\Psi(x, \lambda_n)$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных (одно из краевых условий — разлагаемая смесь). Численное решение этого уравнения дало бы разложение произвольном данным λ_n . В случае функций плотности Коши, упомянутое дифференциальное уравнение переходит в уравнение Лапласа.

SOME RECENT RESULTS CONCERNING THE DECOMPOSITION OF COMPOUND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

P. MEDGYESSY

Summary

Let $F^*(x, t)$ be a family of distribution functions depending on the parameter t ($-\infty < t < \infty$) and $F^*(x, t)$ be continuous in t . If $P(t)$ denotes another distribution function, the function $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$ (cf. (1)), will be called a compound distribution or, briefly, compound formed by the components $F^*(x, t)$ and the weight function $P(t)$. Similarly $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) dP(t)$ is called the compound of the frequency function components $f^*(x, t)$.

In the first part of this paper the following problem (see also [1]) is considered:

Suppose that a compound of frequency functions has the form (2) (i. e. it is a superposition of normal frequency functions with different parameters). In (2) let $f(x)$ be known and the constants $A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ be unknown. Our task will be to determine the unknown parameters from the curve of the function $f(x)$. Since the knowledge of these yields a perfect information about the components, the procedure giving the solution of our problem may be called the *decomposition* of the compound $f(x)$ into components.

The problem will be solved by the so-called «variance-reduction method» (see also [1]). The essence of this method is that by the aid of $f(x)$ we construct the compound (3) which differs from (2) so far as σ_k^2 is replaced by $\sigma_k^2 - \lambda^2$. (λ^2 denotes an arbitrary chosen parameter, $\lambda^2 < \min \sigma_k^2 \equiv \sigma_1^2$.) In (3) the variance of the components is smaller than that in (2); consequently the components will appear separately. If we form (3), with $\lambda^2 \rightarrow \sigma_1^2$ ($\lambda^2 < \sigma_1^2$) the component with the original variance σ_1^2 degenerates into a «Dirac- δ ». The markedly separated components can be handled as simple Gaussian (normal frequency) functions whose parameters may be approximately determined. After separating the «Dirac- δ » graphically (which actually means the dropping of a component) the procedure may be repeated.

(3) the so-called λ -transform — may be simply determined on the basis of (4) which exists between the Fourier-transforms of (2) and (3). This connection has been stated first by G. Doetsch [7].

In practice, however, (4) cannot be utilised, therefore approximate methods must be found. A short survey of these and their error formulae form the second part of the present paper.

In his paper G. Doetsch uses Fourier-series for the construction of the λ -transform: if, after an even continuation, $f(x)$ and $f^*(x)$ will be expanded into a cosine-series on some interval $(-l, l)$ then, for a sufficiently large l , the coefficients (5) and (6) of the expansions will only slightly differ from the Fourier-transforms taken at $t = \frac{n\pi}{l}$; hence,

by (4) we will have (7). In this case $f^*(x)$ can be approximately obtained by a Fourier-synthesis. The absolute error of this procedure is given by (8). (The error has not been estimated by G. Doetsch.) In (8) M signifies the number of the terms which are taken into account at the Fourier-analysis and synthesis.

Details of the spectrum of atomic Fe have been successfully analysed by this method (see [2]).

Another method for the approximation of $f^*(x)$ may be obtained by the relation (9) which can be proved easily (see [1] § 4.). The derivatives of $f(x)$, however, are to be determined by numerical methods. If we take only R terms from (9), the error arising here will be bounded by (10). In contrary with (8) in this estimation there figures also $f(x)$. The error of the applied numerical derivations may be found in the literature on the subject. In § 5. of [1] we also gave a numerical example for this procedure.

The basis of the third method is that there is a relation (13) between the coefficients (11) and (12) of the Chebyshev—Hermite expansion of $f(x)$ and $f^*(x)$, respectively. If, in the expansion of $f(x)$ we stop at the index S , the error will be bounded by (14).

In the last section of our paper we expand the «variance-reducing method» for the decomposition of such compounds (17) of distribution functions whose components $F_k(x)$ are the so-called stable distribution functions (see [4]), i. e. the Fourier-transform $\varphi(t)$ of the compound is given by (18). We prove the following

Theorem: In (18) let α, β be known and γ_k, c_k be unknown [$\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$), $0 < c_1 < \dots < c_N$] and let $\{\lambda_n\}$ be a monotonically increasing sequence of positive real numbers, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$. Then the unknown values of c_1, γ_1

A_1 will be uniquely determined by the relation (20) together with (19) and by that $\Psi^*(x)$ is continuous for all $x \neq \gamma_1$.

The proof is furnished by the use of some theorems ([5], [6], [7]) concerning characteristic functions and stable distribution functions.

In practice this theorem can be applied as follows: with some arbitrary λ_n 's we construct the Fourier-transform $\varphi(t)$ of the compound to be decomposed and the $\Psi(x, \lambda_n)$ in (19). If λ_n approaches to c_1 , $\Psi(x, \lambda_n)$ shows a jump of value A_1 at $x = \gamma_1$; otherwise it is continuous. From this situation the parameters can be determined. After having subtracted the jump the procedure can be repeated: the basic idea may be seen by the comparison of (4) and (19).

In practice we work with a compound of frequency functions. Evidently, in this case there appears a «Dirac- δ » at $x = \gamma_1$ instead of a jump when we have performed the procedure. Some parameters may be already determined from this fact too.

If we know the relations between the parameters of the components and the α_k 's, β_k 's, γ_k 's, c_k 's, then, after having determined γ_k, c_k the components can also be constructed. In the opposite case we can state the number N of the components only. The first case presents itself at the investigation of a compound of Gaussian functions discussed above ($\alpha = 2, \beta = 0$; see (22), (23)) and that of Cauchy frequency functions ($\alpha = 1, \beta = 0$; see (24), (25)). Decomposing the latter compound we may use Fourier expansions again. This decomposition may be applied e. g. in some investigations in spectroscopy and nuclear physics where the result of the measurements presents a compound of Cauchy frequency functions (see [8], [9]).

In the general case the decomposition can be based on the fact that in the case of $\alpha = p/q$ (p, q are relative primes) and $\beta = 0$ if $\alpha = 1$ $\Psi(x, \lambda_n)$ satisfies a certain partial differential equation.) The compound to be decomposed yields the boundary condition.) The numerical solution of this equation would give the decomposed compound $\Psi(x, \lambda_n)$ for an arbitrary λ_n . In the case of Cauchy frequency functions the mentioned differential equation will be that of Laplace.

HIBÁS SCALEREK (JELOSZTÓK) JELEINEK VALÓSZÍNŰSÉG- ELOSZLÁSÁRÓL

BÉKÉSSY ANDRÁS

Bevezetés

Mint ismeretes, a scaler (jelosztó) nagyon szapora jelek megszámlálására alkalmas elektronikus berendezés, amelynek működési elve a következő: a bemenő jelek — elektromos feszültség-lökések — a scaler első fokozatára kerülnek, amely két stabil állapottal rendelkező multivibrátorból áll. Rövidség kedvéért nevezzük az egyik állapotot »üres« állapotnak, a másikat »töltött« állapotnak. Az első bemenő jel az első fokozatot az üres állapotból töltöttbe billenti át, a második jel a töltött állapotból megint vissza az üresbe, az utóbbi billenés közben azonban az első fokozat jelet ad a második fokozat bemenetére. A második fokozat hasonló az elsőhöz: az első fokozat első jelére üres állapotból töltöttbe billen, a második jelre megint visszabillen, de eközben jelet ad a harmadik fokozatra, és így tovább. Láthatólag az első fokozat minden második, a második fokozat minden negyedik, általában az i -edik fokozat minden 2^i -edik bemenő jelre ad jelet a következő fokozatnak. Az utolsó fokozat kimenő jele végül is mechanikus számlálóhoz kerül, amely azt regisztrálja. Pl. 10 fokozat esetében a mechanikus számláló ilyenformán csak minden 1024-edik jelre van igénybevéve és így a közbeiktatott scaler lehetővé teszi olyan szapora jelek regisztrálását is, amelyeket különben a mechanikus számlálószerkezet, tehetetlensége folytán, nem tudna egyenkint megszámlálni, mert ilyen módon a még éppen megszámlálható jelsorozat sűrűségét nem a mechanikus számláló tehetetlensége, hanem a scalerfokozatok tehetetlensége határozza meg, amely az előbbinél több nagyságrenddel kisebb.

Így működik a scaler, ha jó. Mielőtt azonban a scalert egy készülékbe beépítenénk, természetesen meg kell győződnünk arról, hogy valóban jól működik-e. A hitelesítésnél a scalert ismert frekvenciájú periodikus jelekkel működtetjük. Ha azonban a scalert nem periodikusan érkező, hanem statisztikusan ingadozó időközökben érkező jelek fogják működtetni a mérés során, (mint pl. kozmikus sugárzást mérő készülék esetében), akkor nem árt a scalert ellenőrizni ilyen »statisztikus« jelekkel, még akkor is, ha előre tudjuk, hogy csak elhanyagolhatóan kis valószínűséggel fognak olyan jelek érkezni, amelyeknek egymástól való időbeli távolsága kisebb a scaler periodikus jelek segítségével megállapított felbontóképességénél. A scalereknek éppen statisztikus jelekkel való ellenőrzése még inkább szükségesnek látszik a folyamatos üzemenben, amikor nem akarjuk a berendezésből kivenni, és a mérést megszakítani.

azonban mégis tudni akarjuk, hogy nem romlott-e el kísérlet közben. Kozmikus sugárzással kapcsolatos egyetlen folyamatos mérés hetekig tarthat, ez bőven elég idő ahhoz, hogy a beépített scalerok esetleg időközben hibássá váljanak.

Folyamatos ellenőrzés alapjául szolgálhat a következő gondolat: a scalert működtető jelek számának valószínűség-eloszlása határozza meg a mechanikus számláló jeleit, amelyek tehát szintén valamilyen valószínűség-eloszlást mutatnak. Ha a scaler rossz, akkor a mechanikus számláló más átlagos jelsűrűséget regisztrál, mint amilyent kellene, ezt azonban nem vesszük észre, mert nem tudjuk, hogy milyen volt a bemenő jelek sűrűsége. Várható azonban, hogy az átlagos sűrűsége kívül az egész eloszlás jellege megváltozik, eltorzul, és ebből az eltorzulásból következtethetünk a scaler hibás voltára. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy egy bizonyos, a valószínűségben feltehetően gyakran előforduló scaler-hiba esetében milyen a torzulás.¹⁾

Megköszönöm Jánossy Lajos akadémikusnak, hogy a jelen problémára figyelmemet felhívta, és megköszönöm Rényi Alfréd-nak és Frey Tamás-nak a dolgozat írása folyamán tett értékes megjegyzéseiket.

1. §. A feladat felállítás

Tegyük fel, hogy a scaler hibája abban áll, hogy az egyes fokozatok nem billennek teljes biztonsággal, hanem csak bizonyos valószínűséggel, pl. mert a fokozatok közötti jelek túl kicsinyek, vagy nem egyenlő amplitúdójúak. Tegyük fel, hogy egy k -fokozatú scaler i -edik fokozata az $(i-1)$ -edik fokozat bemenő jelére $p_i^{(1)}$ valószínűséggel billen üres állapotból töltöttbe és $p_i^{(0)}$ valószínűséggel vissza. Lehetséges esetleg, hogy az $(i-1)$ -edik fokozat tévesen nem ad le jelet az i -edik fokozatnak és így az utóbbi nem is billen. Ezt a hibalehetőséget azonban belefoglalva képzeljük a $p_i^{(0)}$, $p_i^{(1)}$ valószínűségekbe, vagyis feltesszük, hogy a töltöttből üres állapotba való átmenetnél a jel-leadás mindig megtörténik, legfeljebb az i -edik fokozat a jelre hibásan nem billen. Tegyük fel, hogy az egyes fokozatok billenései függetlenek. Tegyük fel, hogy a mechanikus számláló az utolsó fokozat kimenő jelét p_{k+1} valószínűséggel regisztrálja. Jó scaler esetében természetesen $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$; $p_{k+1} = 1$.

Más jellegű hibát, mint pl. hogy valamelyik fokozat indító jel nélkül, »magától« billen, nem tételezünk fel. A billenések függetlenségét feltételezve elhanyagoljuk azt, hogy az egyes fokozatok felbontóképessége nem végtelen nagy.

Feltesszük, hogy a scalerre érkező jelek közötti időkülönbségek egymástól függetlenek és egyforma sűrűségfüggvényük van, sőt a végeredmény levezetésénél azt is, hogy az időegység alatt érkező jelek száma Poisson-eloszlást követ.

Más típusú hibák vizsgálatára, valamint gyengébb feltételek mellett való általánosabb eredmények kidolgozására egy későbbi alkalommal kívánunk visszatérni.

A mondott feltételek mellett ki akarjuk számítani annak $Q_n(t)$ valószínűségét, hogy t időpontban a mechanikus számláló n -et mutat, feltéve,

¹⁾ A tárgyalás csupán a valószínűségszámítás tankönyveiben megtalálható ismeretekre támaszkodik. Lásd például: [1].

hogy a $t = 0$ időpontban a scalar minden fokozata üres volt és a mechanikus számláló is nullán állt.

Legyen $V_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy az i -edik fokozat első jelét a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban adja le, feltéve, hogy $t = 0$ -ban az i -nél nem nagyobb sorszámú fokozatok üresek voltak. Legyen $V_i(t)$ Laplace-transzformáltja $v_i(s)$.²⁾ Ahhoz, hogy az i -edik fokozat $(t, t + \Delta t)$ -ben leadja első jelét, előzőleg az $(i-1)$ -edik fokozatnak valamilyen a számú jelet kellett leadni, amelyből az első $a-1$ elveszett $[1 - p_i^{(1)}]^{a-1}$ valószínűséggel, az utolsó pedig $p_i^{(1)}$ valószínűséggel az i -edik fokozatot töltött állapotba billentette át; azután újabb b számú jelet kellett leadnia, amelyekből az első $b-1$ számú $(1 - p_i^{(1)})^{b-1}$ valószínűséggel megint elveszett, az utolsó pedig $p_i^{(0)}$ valószínűséggel az i -edik fokozatot újra üres állapotba billentette vissza, és így az első jelleadás megtörtént. Írhatjuk tehát:

$$V_i(t) = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} [1 - p_i^{(1)}]^{a-1} [1 - p_i^{(0)}]^{b-1} p_i^{(1)} p_i^{(0)} V_{i-1}^{*a+b}(t),$$

ahol $V_{i-1}^{*a+b}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ jelöli annak valószínűségét, hogy az $(i-1)$ -edik fokozat az $(a+b)$ -edik jelét éppen $(t, t + \Delta t)$ -ben adja le. Az $(a+b)$ -edik jel beérkezési ideje olyan valószínűségi változó, amely $a+b$ számú, egyenkint $V_{i-1}(t)$ sűrűségfüggvényű független változó összege. Áttérve tehát a valószínűségi sűrűségfüggvények Laplace-transzformáltjára:

$$v_i(s) = \sum_a \sum_b [1 - p_i^{(1)}]^{a-1} [1 - p_i^{(0)}]^{b-1} p_i^{(0)} p_i^{(1)} [v_{i-1}(s)]^{a+b},$$

vagy elvégezve az összegezést,

$$(1) \quad v_i(s) = \frac{p_i^{(1)} v_{i-1}(s)}{1 - (1 - p_i^{(1)}) v_{i-1}(s)} \cdot \frac{p_i^{(0)} v_{i-1}(s)}{1 - (1 - p_i^{(0)}) v_{i-1}(s)}.$$

Ez a rekurzív összefüggés az $i = 1$ esetben is érvényes marad, ha $V_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$ -vel annak valószínűségét jelöljük, hogy az első fokozatra $(t, t + \Delta t)$ -ben érkezik az első jel.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(2) \quad \begin{cases} p_i^{(0)} p_i^{(1)} = g_i^2, \\ p_i^{(1)} + p_i^{(0)} = 2a_i \end{cases}.$$

Ezekkel a jelölésekkel egyszerű átalakítások után (1)-ből a következő viszonylag egyszerűbb egyenletet kapjuk:

$$(3) \quad \left(\frac{1}{v_i(s)} - 1 \right) = \frac{1}{g_i^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{v_{i-1}(s)} - 1 \right) + a_i \right]^2 - a_i^2 \right\}.$$

Legyen k számú fokozat és $W_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy

²⁾ A következőkben további megjegyzés nélkül az egyes eloszlások idő szerinti Laplace-transzformáltjait a megfelelő kis betűvel fogjuk jelölni.

a mechanikus számláló éppen t és $t + \Delta t$ között ugrik n -ről $(n + 1)$ -re. Hasonlóképpen az előbbiekhöz, könnyen belátható, hogy

$$(4) \quad \frac{1}{w_1(s)} - 1 = \frac{1}{p_{k+1}} \left(\frac{1}{v_k(s)} - 1 \right),$$

és

$$(5) \quad w_n(s) = [w_1(s)]^n.$$

Végül a keresett $Q_n(t)$ valószínűség a $W_n(t)$ -vel a következőképpen függ össze:

$$(6) \quad Q_n(t) = \int_t^\infty [W_{n+1}(\tau) - W_n(\tau)] d\tau,$$

$$(7) \quad Q_0(t) = \int_t^\infty W_1(\tau) d\tau.$$

Hiszen ha az $(n + 1)$ -edik jel a t időpont után érkezett meg az utolsó fokozatról, akkor a mechanikus számláló mutathat 0-tól n -ig akármit, ha pedig az n -edik jel érkezett t után, akkor 0-tól $(n - 1)$ -ig akármit. Tehát:

$$\int_t^\infty W_{n+1}(\tau) d\tau = Q_0(t) + Q_1(t) + \dots + Q_{n-1}(t) + Q_n(t),$$

$$\int_t^\infty W_n(\tau) d\tau = Q_0(t) + Q_1(t) + \dots + Q_{n-1}(t).$$

A felső egyenlőségből kivonva az alsót, megkapjuk a (6) összefüggést, míg (7) egyszerűen azt fejezi ki, hogy a számláló akkor és csak akkor mutathat nullát, ha az első jel t után érkezett.

Vezessük be a $Q_n(t)$ valószínűségek generátorfüggvényét:

$$(8) \quad G(u; t) + \sum_{n=0}^{\infty} u^n Q_n(t),$$

illetve ennek t szerinti Laplace-transzformáltját:

$$(9) \quad g(u; s) = \int_0^\infty G(u; t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u^n q_n(s),$$

akkor a (4)–(9) összefüggések felhasználásával:

$$(10) \quad g(u; s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + (1 - u) \frac{p_{k+1} V_k(s)}{1 + v_k(s)}}.$$

$V_0(t)$ ismeretében (1) segítségével kiszámítható $v_k(s)$, azután (10)-ből $g(u; s)$ és végül — legalább is elvben — $Q_n(t)$.

2. §. A hibátlan scaler esete

Most $p_i^{(1)} = p_i^{(0)} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$), és így az (1) és (10) összefüggések a következőkre redukálódnak:

$$v_i(s) = v_{i-1}^2(s), \quad g(u; s) = \frac{1}{s} \frac{1 - v_k(s)}{1 - u v_k(s)},$$

vagyis

$$(11) \quad g(u; s) = \frac{1}{s} \frac{1 - v_0^{2k}(s)}{1 - u v_0^{2k}(s)}.$$

Írhatjuk tehát:

$$(12) \quad Q_n(t) = \int_0^t [V_0^{*2kn}(\tau) - V_0^{*2k(n+1)}(\tau)] d\tau,$$

ahol $V_0^{*r}(t)$ jelenti $V_0(t)$ -nek önmagával való r -szeres kompozícióját, jelekben

$$V_0^{*r}(t) = \int_0^t V_0(t - \tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} V_0(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{r-2}} V_0(\tau_{r-2} - \tau_{r-1}) V_0(\tau_{r-1}) d\tau_{r-1}$$

A (12) eredmény triviális, hiszen $\int_0^t V_0^{*2kn}(\tau) d\tau$ jelenti annak valószínűségét,

hogy az $n2^k$ -adik jel a t időpont előtt érkezik, de az $(n+1)2^k$ -adik jel t -ig még nem érkezett meg, vagy ami ugyanaz, hogy a $(0, t)$ intervallumban vagy $n2^k$, vagy $n2^k + 1, \dots$, vagy $(n+1)2^k - 1$ jel futott be, amelyekből n jutott a mechanikus számlálóra.

Ha a bemenő jelek egymástól függetlenek és egy jel beérkezésének valószínűsége a Δt időintervallumban $p \Delta t + o(\Delta t)$ (Poisson-folyamat), akkor mint ismeretes:

$$V_0(t) = p e^{-pt}.$$

tehát $v_0(s) = \frac{p}{s + p}$, és (10) szerint

$$q_n(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{p^{n2^k}}{(s + p)^{n2^k}} - \frac{p^{(n+1)2^k}}{(s + p)^{(n+1)2^k}} \right],$$

ebből pedig inverz Laplace-transzformációval

$$(13) \quad Q_n(t) = \sum_{v=0}^{2^k-1} \frac{(pt)^{n2^k+v}}{(n2^k + v)!} e^{-pt}.$$

Mivel a bemenő jelek Poisson-folyamatot alkotnak, $\frac{(pt)^{n2^k+v}}{(n2^k + v)!} e^{-pt}$ a való-

színüségére annak, hogy t idő alatt $n2^k + \nu$ jel érkezzék és így a (13) eredmény megint csak triviális, mert egyszerűen csak azt fejezi ki, hogy a mechanikus számláló akkor mutat n -et, ha vagy $n2^k$, vagy $n2^k + 1, \dots$, vagy $(n+1)2^k - 1$ bemenő jel érkezett t idő alatt.

Az eloszlás momentumainak meghatározására szolgálhat a következő megfontolás: a faktoriális momentumokat a generátorfüggvény deriváltjai adnák, Laplace-transzformáltjaikat tehát a generátorfüggvény Laplace-transzformáltjainak megfelelő deriváltjai adják. Képezzük ezeket a deriváltakat:

$$(14) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u=1} &= \frac{p^{2^k}}{s} \frac{1}{(s+p)^{2^k} - p^{2^k}}, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \right|_{u=1} &= \frac{2! (p^{2^k})^2}{s} \frac{1}{[(s+p)^{2^k} - p^{2^k}]^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

A (14) jobboldalán álló mennyiségek inverzei rendre adják a faktoriális momentumokat. Mármost pl. a $\frac{p^{2^k}}{s} \frac{1}{(s+p)^{2^k} - p^{2^k}}$ kifejezésről látható, hogy $s=0$ a nevezőben álló polinom kétszeres gyöke, az összes többi gyökök pedig $-p \left(1 - \exp \frac{2i\pi\nu}{2^k} \right)$ ($\nu=1, 2, \dots, 2^k-1$) alakúak. Tehát a parciális-tört forma

$$\frac{A_0^{(1)}}{s^2} + \frac{A_1^{(1)}}{s} + \sum_{\nu} \frac{C_{\nu}}{s+p \left(1 - \exp \frac{2i\pi\nu}{2^k} \right)}$$

volna, az inverz transzformált pedig, amely n várható értéke, ennek megfelelően:

$$\mathbf{M}(n) = \bar{n} = A_0^{(1)}t + A_1^{(1)} + \sum_{\nu} C_{\nu} \exp \{ -pt(1 - e^{2i\pi\nu/2^k}) \}.$$

Ha t elég nagy,

$$t \gg \frac{1}{2p \sin^2 \frac{\pi}{2^k}},$$

akkor a fenti Σ alatti tagok már elhanyagolhatóan kicsinyek és akkor $\mathbf{M}(n) = \bar{n} \sim A_0^{(1)}t + A_1^{(1)}$. (Az \sim jelet $t \rightarrow \infty$ értelemben használjuk.) $A_0^{(1)}$ értékére $p2^{-k}$, $A_1^{(1)}$ -ére pedig $\frac{1-2^{-k}}{2}$ adódik, tehát

$$\mathbf{M}(n) = \bar{n} = pt \cdot 2^{-k} - (1 - 2^{-k})/2 + O(e^{-ct}).$$

Hasonlóképpen számíthatók a magasabb momentumok is nagy t esetében. A

$$\frac{\partial^m g}{\partial u^m} \Big|_{u=1} = \frac{m! (p^{2k})^m}{s} \frac{1}{[(s+p)^{2k} - p^{2k}]^m}$$

kifejezés parciális tört-alakja a következő:

$$m! (p^{2k})^m \left\{ \frac{A_0^{(m)}}{s^{m+1}} + \frac{A_1^{(m)}}{s^m} + \dots + \frac{A_m^{(m)}}{s} + R(s) \right\},$$

ahol $R(s)$ olyan törtfüggvény, amelynek $s = 0$ már nem pólusa. Könnyen belátható, hogy

$$A_l^{(m)} = \frac{1}{e!} \frac{d^l}{ds^l} \left[\frac{s}{(s+p)^{2k} - p^{2k}} \right]_{s=0}^m,$$

és innen

$$\mathbf{M}[n(n-1)\dots(n-m+1)] \sim (p^{2k})^m [A_0^{(m)} t^m + m A_1^{(m)} t^{m-1} + \dots + m! A_m^{(m)}].$$

Ki kell számítani tehát az $A_l^{(m)}$ együtthatókat. Mivel az $A_l^{(m)}$ -ek az

$\left(\frac{s}{(s+p)^{2k} - p^{2k}} \right)^m$ függvény $s = 0$ körüli Taylor-sorának együtthatói, előállítjuk ezt a sort:

$$\left(\frac{s}{(s+p)^{2k} - p^{2k}} \right)^m = \frac{1}{2^{mk} p^{m(2k-1)}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{-m}{\lambda} \left[\sum_{n=1}^{2k-1} \binom{2k}{n+1} \left(\frac{s}{p} \right)^n \frac{1}{2^k} \right]^\lambda,$$

és így az $A_l^{(m)}$ mennyiségeket s megfelelő hatványainak együtthatói adják. Ilyen módon számítva például a szórásnégyzet kifejezése a következő:

$$(15) \quad \mathbf{D}^2(n) = \sigma^2 = \frac{pt}{2^{2k}} - \frac{(1-2^{-k})(2-2^{-k})}{6} + O(te^{-ct}).$$

A magasabb momentumok számítása meglehetősen fáradságos, de a jelzett úton elvégezhető. Látható, hogy az eloszlás várható értéke a bemenő jelszám várható értékének 2^k -ad részére csökken, amint ez nagyon természetes is, a szórás azonban még relatíve is lecsökken: míg a bemenő Poisson-eloszlásnál

$$\frac{\sigma^2}{n} = 1, \text{ itt } \frac{\sigma^2}{n} \sim \frac{1}{2^k}, \text{ ha } t \text{ elég nagy.}$$

Mindezek a hibátlan scalarre vonatkozó eredmények vagy triviálisak, vagy pedig elemi eszközökkel egyszerűbben is elérhetőek³⁾, az alábbiakban tárgyalásra kerülő hibás scalar esetében azonban már kényelmesebb éppen a fenti tárgyalásmódot választani mintának.

3. §. A hibás scalar esete

A generátorfüggvény Laplace-transzformáltját (10) adja meg, $v_k(s)$ pedig (3)-ból számítható. Egyszerűség kedvéért legyen

$$\frac{1}{v_k(s)} - 1 = u_k(s),$$

vagyis (3) szerint

$$(16) \quad u_i(s) = \frac{1}{g_i^2} \left[\left(u_{i-1}(s) + a_i \right)^2 - a_i^2 \right].$$

Ha a bemenő jelek Poisson-folyamatot alkotnak, akkor mint az előbb, $v_0(s) = \frac{p}{s+p}$, és a (16) rekurzióból látható, hogy $u_k(s)$ az s -nek 2^k -adfokú polinomja lesz, amelynek $s=0$ egyszerű gyöke.

Míg a $Q_n(t)$ Laplace-transzformáltjának meghatározása (10)-ből egyszerű:

$$q_n(s) = \frac{p_{k+1}^n}{s[u_k(s) + p_{k+1}]^n} - \frac{p_{k+1}^{n+1}}{s[u_k(s) + p_{k+1}]^{n+1}},$$

a visszatranszformálás általánosságban nagyon fáradságos volna, bár elvileg semmi akadálya sincs. Megelégszünk az eloszlás várható értékének és szórásának kiszámításával — mint az előbb, nagy t esetére. Ugyanúgy, mint előbb:

$$\mathbf{M}(n) = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + O(e^{-ct})$$

$$\mathbf{M}[n(n-1)] = \frac{1}{2} A_0^{(2)} t^2 + A_1^{(2)} t + A_0^{(2)} + O(e^{-ct}),$$

ahol

$$(17) \quad A_l^{(m)} = \frac{m!}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \left[\frac{p_{k+1} s}{u_k(s)} \right]_{s=0}^n.$$

Az $A_l^{(m)}$ együtthatók meghatározásához szükségünk lesz $u_k(s)$ deriváltjainak az $s=0$ helyen felvett értékére. A (16) szerint

$$u_i'(0) = \frac{2a_i u_{i-1}'(0)}{g_i^2} \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

tehát $u_0'(0) = \frac{1}{p}$ miatt

³⁾ Lásd például: [1], 9. fejezet 25. feladat, p. 334—335.

$$u'_i(0) = \frac{2^k a_1 a_2 \dots a_k}{p g_1^2 g_2^2 \dots g_k^2},$$

továbbá

$$u''_i(0) = \frac{2 a_i}{g_i^2} u'_i(0) + \frac{2}{g_i^2} [u'_{i-1}(0)]^2,$$

vagyis

$$\frac{u''_i(0)}{[u'_i(0)]^2} = \frac{g_i^2}{2 a_i} \frac{u''_{i-1}(0)}{[u'_{i-1}(0)]^2} + \frac{g_i^2}{2 a_i^2},$$

és $u''_0(0) = 0$ miatt végül is

$$\frac{u''_k(0)}{[u'_k(0)]^2} = \frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{2^2 a_k a_{k-1}^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 g_{k-2}^2}{2^3 a_k a_{k-1} a_{k-2}^2} + \dots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 g_{k-2}^2 \dots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1^2}.$$

Írhatjuk tehát:

$$A_0^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s p_{k+1}}{u_k(s)} = \frac{p_{k+1} p g_1^2 g_2^2 \dots g_k^2}{2^k a_1 a_2 \dots a_k},$$

$$A_1^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{s p_{k+1}}{u_k(s)} \right) = - \frac{1}{2} \frac{u''_k(0)}{[u'_k(0)]^2},$$

hasonlóképpen

$$A_0^{(2)} = [A_0^{(1)}]^2, A_1^{(2)} = 4 A_0^{(1)} A_1^{(1)},$$

és így a várható értékre, illetve szórásnégyzetre a következő kifejezést kapjuk:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(n) = \bar{n} \sim \frac{p_{k+1} g_1^2 g_2^2 \dots g_k^2 p t}{a_1 a_2 \dots a_k 2^k} \\ \sigma^2 \sim n \left[1 - p_{k+1} \left(\frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{4 a_k a_{k-1}^2} + \dots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 \dots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1^2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Mint látható,

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\bar{n}} &\sim 1 - p_{k+1} \left(\frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{4 a_k a_{k-1}^2} + \dots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 \dots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1^2} \right) \geq \\ &\geq 1 - p_{k+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{g_k}{4} + \frac{g_k g_{k-1}}{8} + \dots + \frac{g_k g_{k-1} \dots g_2}{2^k a_k a_{k-1} \dots a_2} \right) \geq \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

vagyis nagyobb, mint a hibátlan scaler esetében. Folyamatos mérésnél tehát a σ^2/\bar{n} arány abnormisan nagy értékének scaler-hiba lehet az egyik valószínű

oka. Mivel kozmikus sugárzás mérésénél úgylis éppen az időegység alatt beérkező jelek számát mérjük, ebből az empirikus várható értéket és empirikus szórást számíthatjuk, a szórásnégyzet/várható érték arány becsülhető.

A fenti arány a hibákra meglehetősen érzékeny. Így pl. 10-fokozatú scaler esetében, ha $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 0,9999$, akkor a várható érték csökkenése a hibátlan scalerhez viszonyítva csupán egy ezrelék, a szórásnégyzet/átlag növekedése viszont ugyanekkor 10⁰%. Mindenesetre magasabb fokozatok hibájára az arány érzékenyebb. Az első fokozat hibája csak akkor növeli az arányt, ha $p_i^{(0)} \neq p_i^{(1)}$.

IRODALOM

[1] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИГНАЛОВ ПОВРЕЖДЕННЫХ СКЭЛЕРОВ

А. Бекешин

Резюме

Скэлеры, встроенные в приборы для счета космических частиц, в течение длительного действия могут выходить из строя. В таком случае желательно обнаружить дефект без прерывания эксперимента. Если некоторые импульсы не регистрируются скэлером, то кажущееся число частиц уменьшается, однако, отсюда нельзя вывести заключение, так как верное число частиц заранее неизвестно.

Из распределения чисел частиц, приходящих на единицу времени, можно вычислять распределение числа импульсов, исходящих из скэлера. Однако, это последнее распределение искажается, если скэлер не работает безупречно: оказывается, что отношение дисперсии к математическому ожиданию больше, чем для безошибочного скэлера, если только число импульсов, приходящих в одинаковые интервалы времени, подвергается распределению Пуассона, а дефект скэлера заключается в том, что отдельные каскады, получив сигнал, не действуют непременно, но только с вероятностью < 1 . В соответствии с двумя возможными состояниями отдельных каскадов, обозначим эти вероятности через $p_i^{(0)}, p_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), где k число каскадов. p_{k+1} вероятность действия механического счетного прибора в конце скэлера. Если i -ый каскад безошибочный, то $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$. Положение иллюстрируется формулами (18) и (19) а также формулой (2); при этом однако предполагается, что одинаковые интервалы времени, в конце которых проводятся отсчеты, имеют достаточную длительность. Отношение (19) можно оценить исходя из эмпирического ожидания и из дисперсии. Если это отношение значительно превышает $\frac{1}{2k}$, то можно скэлер считать испорченным. Другие источники ошибок, а также и то обстоятельство, что четкость разложения скэлеровых каскадов не бесконечна, при наших выводах пренебрегались.

ÜBER DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER IMPULSANZAHL BEI FEHLERHAFT ARBEITENDEN UNTERSETZERN

A. BÉKÉSSY

Zusammenfassung

Die Untersetzer (scaler), welche für Abzählung kosmischer Teilchen in irgendwelchen Apparaten eingebaut sind, und seit längerer Zeit arbeiten, werden während des Betriebs möglicherweise fehlerhaft. Es ist erwünscht solche Fehler ohne Unterbrechung des Experimentes aufzudecken. Wenn ein Untersetzer einige Impulse nicht registriert, so vermindert sich die scheinbare Teilchenzahl, daraus kann aber keine Folgerung gezogen werden, weil die tatsächliche Teilchenanzahl vorher unbekannt ist.

Aus der Verteilung der Teilchenanzahl, die in der Zeiteinheit ankommt, kann man auch die Verteilung der vom Untersetzer ausgehenden Impulssignale berechnen. Diese letztere Verteilung verändert sich aber, wenn etwaige Fehler vorhanden sind und zwar es stellt sich heraus, dass das Verhältnis des Streuungsquadrats zum Erwartungswert grösser wird, als beim fehlerfreien Untersetzer, vorausgesetzt, dass die ankommenden Impulse einen Poissonschen Prozess bilden und der Fehler des Untersetzers besteht darin, dass die einzelnen Stufen, wenn sie einen Impuls bekommen, nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, die kleiner als Eins ist, funktionieren. Den zwei möglichen Zuständen der einzelnen Stufen entsprechend sind diese Wahrscheinlichkeiten mit $p_i^{(0)}$, $p_i^{(1)}$, ($i = 1, 2, \dots, k$) bezeichnet, wo k die Anzahl der Stufen ist, p_{k+1} bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der mechanische Zählapparat am Ende des Untersetzers, funktioniert. Ist die i -te Stufe fehlerfrei, so ist $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$. Die Formeln (18), (19) nebst (2) zeigen die Verhältnisse, dabei ist aber noch vorausgesetzt, dass diejenigen gleichlangen Zeitintervalle, an deren Ende das Ablesen erfolgt, lang genug sind. Man kann das Verhältnis (19) aus dem empirischen Erwartungswert und aus der empirischen Streuungsquadrats abschätzen und wenn dieses Verhältnis viel grösser als $\frac{1}{2k}$ wird, so kann man einen Fehler in dem Untersetzer vermuten. Andere Fehlermöglichkeiten sind nicht in Rücksicht genommen. Auch die Tatsache, dass das Auflösungsvermögen des Untersetzers nicht unendlich gross ist, wurde ausser Acht gelassen.

A VÁRHATÓ ELTÉRÉSRE VONATKOZÓ SHEPPARD-KORREKCIÓ

SARKADI KÁROLY

Bevezetés

Az ebben a dolgozatban tárgyalt problémával a *Textilipari Minőség-ellenőrző Intézet* felkérésére foglalkoztunk. A kérdés gyakorlati jelentőségét az adja meg, hogy a textiliparban ez idő szerint még mindig a várható eltérés használata az általános a szórás helyett. A közönséges momentumokra vonatkozó Sheppard-korrekciónak elég bő irodalma van, a várható eltérés Sheppard-korrekcijára vonatkozóan azonban semmilyen irodalmi adatot nem találtunk.

A következőkben tehát azzal fogunk foglalkozni, hogy milyen eltérést okoz az, ha a várható eltérés kiszámításához osztálybasorolást alkalmazunk, és megadható-e — a közönséges momentumok Sheppard-korrekcijához hasonlóan — olyan képlet, amely ezt az eltérést jó közelítéssel megadja.

1. §.

A közönséges momentumok esetén a Sheppard-korrekciónak bizonyos eloszlások esetében, jó közelítéssel megadja az eredeti eloszlás és a csoportosított eloszlás momentumai közötti különbséget (lásd például: [1]). Ebben az értelemben a Sheppard-korrekciónak a várható eltérésre nem terjeszthető ki.

Az a bizonyítás, amely az Euler—MacLaurin-formulán alapszik, ebben az esetben ugyanis nem alkalmazható, mert az

$$\left| \xi \right| \int_{\xi - \frac{1}{2}h}^{\xi + \frac{1}{2}h} f(x) dx$$

függvény ξ szerinti deriváltja nem folytonos. (Itt $f(x)$ az eloszlás sűrűségfüggvénye.) A 3. §-ban pedig látni fogjuk, hogy még a normális eloszlás esetében is — amelynél pedig a sűrűségfüggvény valamennyi deriváltja folytonos — az eredeti eloszlás és a csoportosított eloszlás várható eltérése közötti különbség minden esetben felvehet pozitív előjelet is az osztályok elhelyezkedésétől függően.

2. §.

Van a Sheppard-korrekciónak még egy más értelmezése is ([2], p. 74). Jelöljük az osztályintervallum hosszát h -val, az abszolút értékben legkisebb intervallum közepét η -val. η általában $-\frac{h}{2}$ és $\frac{h}{2}$ között minden értéket

felvehet. Ha feltesszük, hogy η a $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ intervallumban egyenletes elosz-

lású valószínűségi változó; akkor képezhetjük folytonos alapeloszlás esetén a csoportosított eloszlás és az eredeti eloszlásból számított momentumok különbségének várható értékét. Az erre kapott eredmény számszerűen megegyezik az előző pontban ismertetett Sheppard-korrekciónal, azonban minden folytonos eloszlásra érvényes. Ebben az értelemben a Sheppard-korrekciónál beszélhetünk az abszolút eltérés esetében is.

A csoportosított eloszlás várható eltérése

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\eta + jh| \int_{\eta + (j - \frac{1}{2})h}^{\eta + (j + \frac{1}{2})h} f(x) dx .$$

Ennek η szerinti várható értéke :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |y + jh| \int_{y + (j - \frac{1}{2})h}^{y + (j + \frac{1}{2})h} f(x) dx dy = \\ (1) \quad & = \frac{1}{h} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{(j - \frac{1}{2})h}^{(j + \frac{1}{2})h} \int_{t - \frac{h}{2}}^{t + \frac{h}{2}} |t| f(x) dx dt = \\ & = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t - \frac{h}{2}}^{t + \frac{h}{2}} |t| f(x) dx dt = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \int_{x - \frac{h}{2}}^{x + \frac{h}{2}} |t| dt dx . \end{aligned}$$

Azonban

$$\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} |t| dt = \begin{cases} \operatorname{sgn} x \cdot \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} t dt = h|x|, & \text{ha } |x| > \frac{h}{2}, \\ \int_0^{x-\frac{h}{2}} t dt + \int_0^{x+\frac{h}{2}} t dt = x^2 + \frac{h^2}{4}, & \text{ha } |x| < \frac{h}{2}; \end{cases}$$

ennélfogva a csoportosított eloszlás várható eltéréseinek várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{x^2}{h} + \frac{h}{4} - |x| \right) f(x) dx$$

lesz. E kifejezés első tagja a korrekt várható eltérés, vagyis a második tag a Sheppard-korrektúra:

$$(2) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{x^2}{h} + \frac{h}{4} - |x| \right) f(x) dx.$$

Speciálisan a standardizált normális eloszlás esetében a Sheppard-korrektúra

$$(3) \quad \left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h} \right) \left[2 \Phi \left(\frac{h}{2} \right) - 1 \right] + \varphi \left(\frac{h}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standardizált normális eloszlás eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye.

3. §.

Gyakorlati szempontból természetesen az még nem eléggé megnyugtató, ha a korrekt és a csoportosítás útján számított várható eltérés különbségének várható értékét ismerjük. Szükséges azt is tudnunk, hogy η konkrét értéke esetében mekkora lesz ez a hiba. Ha ezt η minden értékére ismerjük,

akkor azt is fogjuk tudni, hogy milyen értékek között mozog, ha η a $-\frac{h}{2}$ és $\frac{h}{2}$

értékek között változik. A közönséges momentumokra vonatkozóan ezt a problémát *R. A. Fisher* oldotta meg ([3], lásd: [2], p. 75). Teljesen

hasonlóan járhatunk el a várható eltérés esetében is. Mivel a csoportosított eloszlás várható eltérése

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \eta \int_{\eta - \frac{h}{2}}^{\eta + \frac{h}{2}} f(x) dx$$

η -ban h szerint periodikus, a fenti kifejezést egyenlővé tehetjük az

$$A_0 + A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + \dots \\ + B_1 \cos \theta + B_2 \cos 2\theta + \dots$$

kifejezéssel, ahol

$$(4) \quad \theta = \frac{2\pi\eta}{h},$$

és az $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ együtthatók integrálással számíthatók ki:

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\theta d\theta \int_{\eta - \frac{h}{2}}^{\eta + \frac{h}{2}} \eta |f(x)| dx \\ B_s &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\theta d\theta \int_{\eta - \frac{h}{2}}^{\eta + \frac{h}{2}} \eta |f(x)| dx \end{aligned} \right\} s = 1, 2, \dots$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\eta - \frac{h}{2}}^{\eta + \frac{h}{2}} \eta |f(x)| dx.$$

Ha A_0 kifejezésében a θ helyébe beírjuk a (4) alatti értéket, az (1)-re jutunk és így az állandó tag a Sheppard-korrekciónhoz vezet.

A periodikus tagok kifejezésében is, ha az integrálás sorrendjét felcseréljük, az egyik integrálás elvégezhető. A kapott kifejezések azonban így is bonyolultak és áttekinthetetlenek, ezért felírásukat mellőzzük.

4. §.

Az alábbiakban egy egyszerűbb közelítő módszert adunk meg az osztálybasorolás által okozott hiba kiszámítására. Írjuk a csoportosított eloszlás és az eredeti eloszlás várható eltéréseinek a különbségét a következő formába :

$$S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (|\eta + jh| - |x + \eta + jh|) f(x + \eta + jh) dx.$$

Ha h elég kicsi, akkor nem követünk el nagy hibát, ha $f(x + \eta + jh)$ helyett az

$$f\left(\eta + \left[j - \frac{1}{2}\right]h\right) + \left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{f\left(\eta + \left[j + \frac{1}{2}\right]h\right) - f\left(\eta + \left[j - \frac{1}{2}\right]h\right)}{h}$$

kifejezést írjuk, vagyis az $f(x)$ függvényt az $\eta + \left(j - \frac{1}{2}\right)h$ és $\eta + \left(j + \frac{1}{2}\right)h$ pontok között húrjával helyettesítjük. Az integrálást így elvégezhetjük a $j = 0$ eset kivételével, tehát

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} S &\approx - \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \operatorname{sgn} j \frac{h^2}{12} \left\{ f\left(\eta + \left[j + \frac{1}{2}\right]h\right) - f\left(\eta + \left[j - \frac{1}{2}\right]h\right) \right\} + \\ &+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (|\eta| - |x + \eta|) f(x + \eta) dx = \\ &= \frac{h^2}{12} \left[f\left(\eta + \frac{h}{2}\right) + f\left(\eta - \frac{h}{2}\right) \right] + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (|\eta| - |x + \eta|) f(x + \eta) dx. \end{aligned} \right.$$

Speciálisan a normális eloszlásra közelítőleg

$$S \approx - \frac{h^2}{12 \sqrt{2\pi}} + \frac{|\eta| h}{\sqrt{2\pi}}.$$

Innen rögtön látható, hogy S közelítő értéke a $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ intervallumban a minimumát az $\eta = 0$ helyen veszi fel és az

$$(6) \quad S_{\min} \approx -\frac{h^2}{12\sqrt{2\pi}} \approx -0,033 h^2,$$

maximumát pedig az $\eta = \frac{h}{2}$ helyen és ez

$$(7) \quad S_{\max} \approx \frac{h^2}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0,066 h^2.$$

A fenti érték egyben nyilván S abszolút értékének maximuma is. Így tehát ennek alapján megállapíthatjuk, hogy milyen kicsire kell h -t választani ahhoz, hogy S az empirikus abszolút középeltérés szórásához képest elhanyagolható kicsiny legyen.

Az (5) képlet hibájának megbecslése céljából tegyük fel, hogy $f''(x)$ folytonos és korlátos, írjuk fel az interpolációs maradéktagot: ez a szummáció j -edik tagjára ($j \neq 0$) vonatkozóan

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\eta + jh - x + \eta + jh \right) \left(x - \frac{h}{2} \right) \left(x + \frac{h}{2} \right) f''(\xi_j) dx = \operatorname{sgn} j \frac{h^4}{32} y_j'',$$

lesz, ahol y_j'' egy olyan értéket jelöl, amelyet az $f''(x)$ függvény a j -edik intervallum valamely pontjában felvesz. Így az egész összeg maradéktagja

$$\frac{h^4}{32} \sum_{j=1}^{\infty} (y_j'' - y_{-j}'').$$

A fenti összeg megbecslése ismert konkrét eloszlás esetében általában nem jelent nehézséget.

IRODALOM

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press, Princeton, 1946. (p. 359—362).
- [2] M. S. KENDALL: *The advanced theory of statistics*. Griffin et Comp., London, 1948. (Vol., I., p. 68—85).
- [3] R. A. FISHER: „On the mathematical foundations of theoretical statistics“ *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 22 (1922) 309—368.

ПОПРАВКА ШЕППАРДА ДЛЯ ОЖИДАЕМОГО ОТКЛОНЕНИЯ

К. Шаркади

Резюме

В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии группировки данных на ожидаемое отклонение. Если в случае дисперсии, и вообще обыкновенных моментов, поправка Шеппарда для большинства классических распределений дает хорошее приближение с уплотнением интервалов, то для разницы группированного и исходного распределений нельзя в общем задать такую поправку, даже в случае этих классических распределений: изменение поправки при изменении интервалов имеет тот же порядок величины, как и сама поправка. Однако, можно вычислять математическое ожидание этой разницы (2). Можно далее вычислять значение этой разницы как функции расположения интервалов по методу Фишера [3]. Полученный результат для вычислений непригоден, однако интерполяционным приближением можно получить наглядный результат [(4), η — средняя интервала содержащего начало координат]. Для стандартизированного нормального распределения математическое ожидание разницы дается формулой (3), а его минимальное и максимальные значения формулами (6) и (7).

ON SHEPPARD'S CORRECTION CONCERNING THE MEAN DEVIATION

K. SARKADI

Summary

This paper deals with the influence on the mean deviation, exerted by the grouping of data. While in the case of standard deviation and, in general, of the moments calculated from grouped data, Sheppard's correction guarantees a good approximation for the majority of classical distributions if the width of the class intervals is sufficiently small, a correction with similar properties for the mean deviation cannot be found, because the variation, effected by shifting the class intervals of the error committed when replacing the mean deviation of the original distribution by that of the grouped distribution, is of the order of magnitude of the correction itself. One can calculate, however, the expectation (see (2)) of this error. In addition the value of this error as a function of the position of the class intervals can be calculated according to Fisher's method [3]; the obtained result is, however, unsuitable for numerical calculations. Nevertheless an interpolatory approximation gives a simple result [(4); η is the mid-point of the interval which contains the origin]. In the case of a standardized normal distribution the expectation of the error is given by (3); the formulae (6) and (7) give the minimum and maximum values of the error, respectively.

MOZDONYOK VÁRAKOZÁSI IDEJÉRŐL

SARKADI KÁROLY

Az alábbi probléma a MÁV-nál a gyakorlatban merült fel, Intézetünk-höz megoldás végett a *Közlekedéstudományi Műszaki Egyetem (Szolnok) Matematikai Tanszéke* küldte meg.

Tegyük fel, hogy egy állomásra naponta n számú vonat érkezik be, és ugyanannyi távozik onnan. A menetrendi adatokat valószínűségi változóknak tekintjük, úgy hogy mind az érkezések, mind az indulások egyenletesen oszlanak el a nap folyamán. Feltételezzük, hogy adott menetrend esetén csak annyi mozdonyral látják el a vonatok közlekedését, amennyire feltétlenül szükség van, és így a mozdonyok átlagos várakozási ideje az állomáson a lehető legkisebb. A feladat az így adódó átlagos várakozási idő várható értékének kiszámítása.

Feltételezzük, hogy a vonatok érkezései és indulásai a nap folyamán egyenletesen oszlanak el: azaz az n vonat érkezési időpontja, nap-egységben kifejezve n darab, a $(0,1)$ számközben egyenletes eloszlású valószínűségi változó, ugyanúgy az n indulásé is.

Jelöljük a t időpontban az állomáson tartózkodó mozdonyok számát ξ_t -vel, a nap kezdetétől a t időpontig beérkezett vonatok számát η_t -vel, az ugyanaz idő alatt kifutott vonatok számát ζ_t -vel. Nyilván fennáll ξ_t és ξ_0 között a következő összefüggés:

$$(1) \quad \xi_t = \xi_0 + \eta_t - \zeta_t.$$

A mozdonyok összes várakozási idejét megkapjuk, ha a várakozó mozdonyok számát megszorozzuk a várakozási idővel. Mivel az előbbi a nap folyamán változik, tehát integrálva,

$$\int_0^1 \xi_t dt$$

lesz az összes mozdony együttes várakozási ideje 1 nap alatt. Mivel naponta n mozdony érkezik be, így egy mozdony átlagos várakozási ideje a beérkezéstől számítva:

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{n} \int_0^1 \xi_t dt$$

Mivel μ maga még valószínűségi változó, $\mathbf{M}(\mu)$ értékét kell kiszámítanunk, ez lesz az egy mozdony várakozási idejének a várható értéke. ξ_t értelmezésénél fogva csak nemnegatív értékeket vesz fel. A mozdonyok akkor vannak jól kihasználva, ha van olyan időpont a nap folyamán, amikor $\xi_t = 0$. Ellenkező esetben ugyanis egy mozdonyt el lehet még vinni az állomásról, anélkül, hogy ez a közlekedésben fennakadást okozna. Feltételezve tehát, hogy a mozdonyok kihasználását a konkrét menetrend által megszabott lehetőségén belül a lehető legjobban biztosítják, min $\xi_t = 0$ és így az (1)-ből

$$\xi_0 = \max (\zeta_t - \eta_t),$$

tehát

$$\xi_t = \max (\zeta_t - \eta_t) + \eta_t - \zeta_t.$$

Ha ezt a (2) képletbe beírjuk és figyelembe vesszük, hogy η_t és ζ_t egyforma eloszlásúak és így

$$\mathbf{M} \left(\int_0^1 \eta_t dt \right) = \mathbf{M} \left(\int_0^1 \zeta_t dt \right),$$

kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}(\mu) = \frac{1}{n} \mathbf{M} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \}.$$

A $\frac{\zeta_t}{n}$ -et egy, a (0,1) intervallumban egyenletes eloszlású változóból vett n -elemű minta empirikus eloszlásfüggvényének, $\frac{\eta_t}{n}$ -et pedig egy ugyanabból az eloszlásból vett, az előbbitől független minta empirikus eloszlásfüggvényének tekinthetjük. Két ilyen empirikus eloszlásfüggvény különbsége szélső értékének az eloszlása ismeretes. *Gnyegyenko* és *Koroljuk* egy tétele szerint [1]

$$\mathbf{P} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \leq x \} = 1 - \frac{\binom{2n}{n-x-1}}{\binom{2n}{n}},$$

ha x nemnegatív egész szám. Ebből

$$\mathbf{M} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \} = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} - \frac{1}{2},$$

tehát

$$(3) \quad \mathbf{M}(\mu) = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} - 1 \right\}.$$

$\mathbf{M}(\mu)$ -nek a fenti képlet alapján kiszámított értékét n -nek 1-től 10-ig terjedő értékeire a függelékként közölt táblázat tünteti fel.

n nagy értékei esetén számolhatunk a fenti képletből a Stirling-formula alkalmazásából adódó

$$\mathbf{M}(\mu) \sim \frac{\sqrt{n\pi} - 1}{2n}$$

képlettel. Ez a közelítő képlet már $n = 10$ esetén is egy tized óránál kisebb eltéréssel adja meg $\mathbf{M}(\mu)$ értékét.

Ezzel feltett kérdésünkre a választ meg is adtuk. Az alábbiakban az eredményt néhány megjegyzéssel egészítjük ki.

A bizonyításban nem használtuk ki azt, hogy az indulások, illetve érkezések eloszlása egyenletes, tehát eredményünk abban az esetben is érvényes, ha pl. a nap egyik szakában sűrűbben érkeznek és indulnak a vonatok, mint egy másik napszakban. Szükséges azonban, hogy az érkezések eloszlása meg-egyezzék az indulások eloszlásával.

A függetlenség feltevésén is enyhíteni lehet: elég, ha az indulások és érkezések időpontjai $2n$ darab ekvivalens valószínűségi változó (ezen azt értjük, hogy közülük bárhogyan választunk ki k darabot, ezek együttes eloszlása nem függ attól, hogy melyik k -t választottuk ki). A Gnyegyenko — Koroljuk-tétel ugyan csak függetlenség esetére vonatkozik, azonban bizonyítása minden további nélkül nyilvánvalóan érvényes ekvivalens változók esetére. Ez a bizonyítás ugyanis abból a feltevésből, hogy a $2n$ darab változó független és egyforma eloszlású, csak annyit használ ki, hogy a belőlük alkotott rendezett mintában a változók bármilyen sorrendje egyformán lehetséges. Ez viszont akkor is fennáll, ha a változók csak ekvivalensek. Így tehát azzal a feltétellel, hogy az érkezések és indulások sem külön-külön, sem egymás között nem eshetnek egymáshoz bizonyos időköznel (pl. fél óránál) közelebb, eredményünk érvényes marad.

Ha ezt az időközt a pálya foglaltságának ideje szabja meg, akkor bizonyára a valóságban — fentitől eltérően — az lesz a helyzet, hogy az indulások nem eshetnek egymáshoz bizonyos t_0 időköznel közelebb, ugyanúgy az érkezések sem; ezzel szemben érkezés után indulás azonnal történhetik, míg indulást követően csak $2t_0$ idő múlva lehet legközelebb érkezés. Fenti meg-gondolásaink akkor is érvényesek maradnak, csak az indulások időpontjai helyett a náluk t_0 -al későbbi időpontokat kell azokban szerepeltetnünk.

Nem marad viszont érvényes a fenti eredmény abban az esetben, ha figyelembe vesszük, hogy mikor egy mozdony befut az állomásra, ugyanaz a mozdony nem indulhat el onnan rögtön, hanem csak egy bizonyos idő múlva. Ennek a feltételnek a figyelembevétele további számításokat tesz szükségessé.

Megoldásra váró probléma továbbá az összes várakozási idő eloszlásának, vagy legalább szórásának meghatározása.

Függelék

Mozdonyok száma	Egy mozdonyra eső várakozási idő óra
1	12
2	10
3	8,8
4	7,97
5	7,35
6	6,87
7	6,39
8	6,14
9	5,86
10	5,61

IRODALOM

[1] Б. В. ГНЕДЕНКО—В. С. КОРОЛЮК : «О максимальном расхождении двух эмпирических распределений.» Доклады Академии Наук СССР 80 (1951) 525—528.

О ВРЕМЕНИ ПРОСТОЯ ПАРОВОЗОВ

К. Шаркади

Резюме

В настоящей работе рассматривается следующая проблема : на железнодорожную станцию ежедневно прибывают n поездов, и отбывает такое же число поездов. Прибытия и отбывания рассматриваются по графику как $2n$ эквивалентные случайные величины. Предположим, что в течение дня наступает момент, когда на станции нет ни одного паровоза. При таких предположениях математическое ожидание для времени простоя отдельного паровоза дается формулой (3). Автор использовал при доказательстве теорему Гнеденко и Королюка о сравнении двух проб [1].

ON THE WAITING-TIME OF LOCOMOTIVES

K. SARKADI

Summary

Suppose that there are n trains arriving every day to a railway-station and the same number of trains leaving it. The moments of arrivals and departures will be regarded as $2n$ equivalent random variables. Suppose that during the day there is a moment when no locomotive stays in the station. In this case the expected waiting-time of a single locomotive is given by (3). In the proof the author utilizes a theorem of Gnedenko and Korolyuk concerning the comparison of two samples [1].

IMPLICIT ALAKÚ FÜGGVÉNYKAPCSOLATOK ÁBRÁZOLÁSA PONTSOROS NOMOGRAMMOKKAL

BOTOS GYÖRGY¹⁾ és HOSSZÚ MIKLÓS²⁾

Bevezetés

Dolgozatunkban egyrészt a (6), (14) és (24) — vagy más alakban az (5), (15) és (27) — alatti differenciálegyenlet-kritériumokat adjuk meg implicit alakú függvénykapcsolat pontsoros nomogrammal való ábrázolhatóságának eldöntésére, másrészt pedig módszert mutatunk a skálafüggvények meghatározására is [(4), (20)]. A probléma felvetése Hajós György-től származik. Az egyes tételekhez fűzött megjegyzések útmutatást nyújtanak arra, hogy adott esetben hogyan lehet eldönteni kritériumaink alapján az ábrázolhatóság kérdését, és hogyan lehet meghatározni a skálafüggvényeket.³⁾

Az 1. és 2. § a három, illetve négy egyenes tartójú kapcsolt nomogrammal ábrázolható $u(x, y, z) = 0$, illetve $u(x, y, t, z) = 0$ implicit alakú függvényekkel foglalkozik, a 3. § pedig a két egyenes és egy görbe tartóval ábrázolhatók.

1. §.

Ismeretes, hogy a három egyenes tartós pontsoros nomogrammal ábrázolható $z = z(x, y)$ függvények legáltalánosabb alakja :

$$(1) \quad Z(z) = X(x) + Y(y), \quad [z = z(x, y)].$$

P. Saint-Robert-től [2] származik a

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = 0$$

differenciálegyenlet-kritérium, melynek teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy $z = z(x, y)$ (1) alakú legyen. (2) igen egyszerűen nyerhető (1)-ből x , illetve y szerinti deriválással, ha a két kapott egyenlet hányadosát képezzük :

$$(3) \quad \frac{z_x}{z_y} = \frac{X'(x)}{Y'(y)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.$$

¹⁾ Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen

²⁾ Rákosi Mátyás Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc

³⁾ E tekintetben Aczél János-nak [1] az explicit alakú függvénykapcsolat esetén követett módszerét használtuk fel, átírva a megfelelő képleteket implicit alakú függvénykapcsolat esetére.

Ennek logaritmusát x , majd y szerint deriválva kapjuk (2)-t. (3) egy-szersmind megadja a független változók skálafüggvényeit is :

$$(4) \quad X(x) = \int \varphi(x) dx, \quad Y(y) = \int \psi(y) dy.$$

Az $u(x, y, z) = 0$ implicit függvény esetében tehát problémánk meg-oldást nyer, ha a szereplő képletekben $z(x, y)$ parciális deriváltjait kifejez-zük $u(x, y, z)$ parciális deriváltjaival :

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

Ezekkel (3) így alakul :

$$(5) \quad \frac{u_x}{u_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}, \quad [u(x, y, z) = 0].$$

Képezzük az (5) x szerinti logaritmikus deriváltját, és helyettesítsük be z_x értékét :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\log u_x - \log u_y] &= \frac{u_{xx} + u_{xz} z_x}{u_x} - \frac{u_{yx} + u_{yz} z_x}{u_y} = \\ &= \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{u_{xz}}{u_z} - \frac{u_{xy}}{u_y} + \frac{u_{yz} u_x}{u_y u_z}. \end{aligned}$$

Mégegyszer deriválva y szerint, és z_y értékét behelyettesítve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{u_x}{u_y} &= \frac{\left(u_{xxy} - u_{xxz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_x - \left(u_{xyy} - u_{xzy} \frac{u_y}{u_z} \right) u_{xx}}{u_x^2} - \\ &- \frac{\left(u_{xyy} - u_{xzy} \frac{u_y}{u_z} \right) u_z - \left(u_{zyy} - u_{zz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_{xz}}{u_z^2} - \\ &- \frac{\left(u_{yyx} - u_{yxz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_y - \left(u_{yy} - u_{yz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_{xy}}{u_y^2} + \\ &+ \frac{\left(u_{yyz} - u_{yzz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_x + \left(u_{xy} - u_{xz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_{yz}}{u_y^2 u_z^2} - u_y u_z - \\ &- \frac{\left(u_{yy} - u_{yz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_z + \left(u_{zy} - u_{zz} \frac{u_y}{u_z} \right) u_y}{u_y^2 u_z^2} - u_{yz} u_x = 0. \end{aligned}$$

Beszorozva az egyenletet $u_x^2 u_y^2 u_z^2$ -nel, és az összevonásokat elvégezve :

$$\begin{aligned} & u_{xxy} u_x u_y^2 u_z^3 - u_{xxz} u_x u_y^3 u_z^2 + u_{yyz} u_x^3 u_y u_z^2 - u_{yyx} u_x^2 u_y u_z^3 + \\ & + u_{xzz} u_x^2 u_y^3 u_z - u_{yzz} u_x^3 u_y^2 u_z + u_{xx} u_y^2 u_z^2 (u_{xz} u_y - u_{xy} u_z) + \\ & + u_{yy} u_x^2 u_z^2 (u_{xy} u_z - u_{yz} u_x) + u_{zz} u_x^2 u_y^2 (u_{yz} u_x - u_{xz} u_y) = 0 \end{aligned}$$

a keresett differenciálegyenlet. A

$$\partial_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial i} & \frac{\partial}{\partial j} \\ u_i & u_j \end{vmatrix}$$

jelölés bevezetésével ez így is írható :

$$\begin{aligned} & u_x u_y^2 u_z^2 \partial_{yz} u_{xx} + u_y u_z^2 u_x^2 \partial_{zx} u_{yy} + u_z u_x^2 u_y^2 \partial_{xy} u_{zz} + u_{xx} u_y^2 u_z^2 \partial_{zy} u_x + \\ & + u_{yy} u_x^2 u_z^2 \partial_{xz} u_y + u_{zz} u_x^2 u_y^2 \partial_{yx} u_z = 0 . \end{aligned}$$

s mivel $\partial_{ij} = -\partial_{ji}$, a megfelelő tagok összevonásával :

$$u_x^2 u_y^2 \begin{vmatrix} \partial_{xy} u_{zz} & \partial_{xy} u_z \\ u_{zz} & u_z \end{vmatrix} + u_y^2 u_z^2 \begin{vmatrix} \partial_{yz} u_{xx} & \partial_{yz} u_x \\ u_{xx} & u_x \end{vmatrix} + u_z^2 u_x^2 \begin{vmatrix} \partial_{zx} u_{yy} & \partial_{zx} u_y \\ u_{yy} & u_y \end{vmatrix} = 0.$$

Röviden :

$$(6) \quad \begin{cases} u_x^2 u_y^2 \Delta_z + u_y^2 u_z^2 \Delta_x + u_z^2 u_x^2 \Delta_y = 0, \\ [u(x, y, z) = 0] , \end{cases}$$

ahol

$$(7) \quad \Delta_k^{ij} = \Delta_k = \begin{vmatrix} \partial_{ij} u_{kk} & \partial_{ij} u_k \\ u_{kk} & u_k \end{vmatrix}, \quad \partial_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial i} & \frac{\partial}{\partial j} \\ u_i & u_j \end{vmatrix}.$$

Mint hogy csupa megfordítható átalakítást végeztünk, ezért a (6) egyenletrendszer egyenértékű (3)-mal, illetve (1)-gyel. Így tehát bebizonyítottuk, hogy érvényes a következő

I. Tétel. Ahhoz, hogy az $u(x, y, z) = 0$ implicit függvénykapcsolat ábrázolható legyen három egyenes tartójú nomogrammal, szükséges és elégséges a (6)–(7) egyenletrendszer fennállása.

Megjegyzés. Adott függvény esetén sokszor nehézkes a (6) kritérium alapján eldönteni az ábrázolhatóság kérdését. De gyakorlatilag legtöbbször nincs is szükség arra, hogy a számolást addig kelljen vezetni. Igen gyakran

már a (6)-tal egyenértékű (5) egyenletrendszer segítségével eldönthető ez a kérdés. Adott esetben tehát azt kell csupán megnézni, hogy $\frac{u_x}{u_y}$ szétválaszt-ható-e — az $u(x, y, z) = 0$ összefüggés esetleges felhasználásával — egy x -től és egy y -től függő tényezőből álló szorzatra. Ha a

$$(8) \quad \frac{u_x}{u_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}, \quad [u(x, y, z) = 0]$$

szétválasztás lehetséges, akkor $\frac{z_x}{z_y} = \frac{u_x}{u_y}$, és (3)-ra való tekintettel (4) adja meg a független változók skálafüggvényeit.

2. §.

Tekintsük a négy egyenes tartójú kapcsolt nomogrammal ábrázolható, azaz

$$(9) \quad Z(z) = X(x) + Y(y) + T(t)$$

alakban felírható $z = z(x, y, t)$ háromváltozós függvényeket. Egyszerű deriválással (2)-höz hasonlóan nyerjük a

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{z_x}{z_y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{z_y}{z_t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \log \frac{z_y}{z_t} = 0$$

differenciálegyenlet-rendszert (lásd: [3])⁴⁾. Kimutatjuk, hogy viszont (10) fennállása elegendő is ahhoz, hogy $z(x, y, t)$ felírható legyen a (9) alakban.

Ugyanis (10) harmadik egyenletéből kétszeri integrálással

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x, t)}{\psi(y, t)}$$

adódik. Minthogy azonban (10) első egyenlete szerint $\frac{z_x}{z_y}$ nem függ t -től, kell, hogy

$$(11) \quad \frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

⁴⁾ E dolgozat a (10) egyenleteken kívül megköveteli a ciklikusan képzett további két egyenlet fennállását is.

legyen. Továbbá (10) első két egyenletéből

$$z_{xt} z_y = z_x z_{yt},$$

$$z_{xy} z_t = z_{xt} z_y,$$

tehát

$$z_{xy} z_t = z_x z_{yt},$$

azaz

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{z_x}{z_t} = 0.$$

Másrészt (11)-ből és a megfelelő analóg

$$\frac{z_y}{z_t} = \frac{\bar{\psi}(y)}{\chi(t)}$$

egyenletből

$$\frac{z_x}{z_t} = \frac{\varphi(x)}{\chi(t)} \frac{\bar{\psi}(y)}{\psi(y)},$$

tehát

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{z_x}{z_t} = \frac{d}{dy} \log \frac{\bar{\psi}(y)}{\psi(y)} = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha

$$\bar{\psi}(y) = c \psi(y).$$

A c -t $\chi(t)$ -be olvasztva

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{z_y}{z_t} = \frac{\psi(y)}{\chi(t)} = \frac{Y'(y)}{T'(t)}.$$

A $\Phi(x, y, t) = X(x) + Y(y) + T(t)$ függvényt bevezetve látjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z_y & z_t \\ \Phi_y & \Phi_t \end{vmatrix} = 0,$$

tehát

$$u(x, y, t) = \Psi(\Phi) = \Psi[X(x) + Y(y) + T(t)],$$

mely (9)-től csak jelölésben különbözik.

Térjünk rá ezután az $u(x, y, t, z) = 0$ implicit függvénykapcsolattal meghatározott $z = z(x, y, t)$ függvény négy egyenes tartójú, kapcsolt nomogrammal való ábrázolhatóságának kérdésére. Egyszerű deriválással számíthatók $z(x, y, t)$ parciális deriváltjai :

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}, \quad z_t = -\frac{u_t}{u_z}.$$

Ezekkel a (8) differenciálegyenletrendszer

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{u_x}{u_y} = 0, & \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{u_y}{u_t} = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{u_x}{u_y} = 0, & \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \log \frac{u_y}{u_z} = 0, \\ [u(x, y, t, z) = 0] \end{cases}$$

alakot ölt. Az első egyenlet rögtön átírható :

$$\left(u_{xt} - u_{xz} \frac{u_t}{u_z} \right) u_y - \left(u_{yt} - u_{yz} \frac{u_t}{u_z} \right) u_x = 0,$$

további átalakítással (felhasználva a (7) alatt bevezetett ∂ -szimbólumot) :

$$u_y \partial_{zt} u_x - u_x \partial_{zt} u_y = \Delta_{xy}^{zt} = 0.$$

Hasonlóan, (12) második egyenletéből :

$$\Delta_{yt}^{xz} = 0,$$

ahol

$$(13) \quad \Delta_{kl}^{ij} = \begin{vmatrix} \partial_{ij} u_k & \partial_{ij} u_l \\ u_k & u_l \end{vmatrix}.$$

(12) harmadik és negyedik egyenlete a (2)–(6) egyenletekből csak a betűk elnevezésében különbözik, úgyhogy végeredményben (12) átírása így fest :

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta_{xy}^{zt} = 0, \quad \Delta_{yt}^{xz} = 0, \\ u_x^2 u_y^2 \Delta_z^{xy} + u_y^2 u_z^2 \Delta_x^{yz} + u_z^2 u_x^2 \Delta_y^{zx} = 0, \\ u_y^2 u_z^2 \Delta_z^{yt} + u_t^2 u_z^2 \Delta_y^{tz} + u_z^2 u_y^2 \Delta_t^{zy} = 0, \\ [u(x, y, t, z) = 0], \end{cases}$$

ahol a Δ -szimbólumok (7), illetve (13) alatt vannak értelmezve.

Kimondhatjuk tehát, hogy érvényes a következő

II. Tétel. Ahhoz, hogy az $u(x, y, t, z) = 0$ implicit függvénykapcsolattal meghatározott $z = z(x, y, t)$ függvény négy egyenes tartójú, kapcsolt nomogrammal ábrázolható legyen, azaz felírható legyen a (9) alakban, szükséges és elégséges a (14) [— (7), (13)] alatti egyenletek fennállása mindazon x, y, t, z értékek mellett, melyek az $u(x, y, t, z) = 0$ összefüggést kielégítik.

1. megjegyzés. Adott $u(x, y, t, z) = 0$ függvénynél legtöbbször nincs szükség a (14) egyenletrendszer kipróbálására, hanem elég csupán azt megvizsgálni, hogy (5) mintájára lehetséges-e a

$$(15) \quad \frac{u_x}{u_y} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{u_y}{u_t} = \frac{Y'(y)}{T'(t)}, \quad [u(x, y, t, z) = 0]$$

szétválasztás, s akkor az $X(x), Y(y), T(t)$ skálafüggvények is (4)-hez hasonlóan egyszerű integrálással számíthatók.

2. megjegyzés. (12) első két egyenlete helyett szerepelhetett volna

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{u_x}{u_y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_y}{u_t} = 0$$

is, de az adott esetben a logaritmikus deriváltakkal egyszerűbb a számolás, és egyébként a másik két egyenlethez úgys szükség van a hányadosok logaritmusára.

3. §.

Foglalkozunk az

$$\alpha(z) f(x) + \beta(z) g(y) = 1$$

alakban felírható, azaz két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolható $z = z(x, y)$ függvényekkel [4].

Képezzük a (16)-ból x , illetve y szerinti deriválással kapott egyenletek felhasználásával a

$$(17) \quad \frac{z_x}{z_y} = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \frac{f'(x)}{g'(y)} = \varphi(x) \psi(y) \chi(z)$$

hányados logaritmusát:

$$\log \frac{z_x}{z_y} = \log \varphi(x) + \log \psi(y) + \log \chi(z) = A(x) + B(y) + C(z).$$

Ebből x és y szerinti deriválással

$$(18) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = C''(z) z_x z_y + C'(z) z_{xy},$$

majd a

$$v = \frac{z_{xy}}{z_x z_y}, \quad \omega = \frac{1}{z_x z_y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y}$$

jelöléssel, többszöri deriválás után a (16) típusú függvényeket jellemző

$$(19) \quad \frac{w_x}{z_x} = \frac{w_y}{z_y} = \omega - v w,$$

z -re nézve ötödrendű differenciálegyenlet-rendszer adódik, ahol

$$w = \frac{\omega_x z_y - \omega_y z_x}{v_x z_y - v_y z_x} = C'(z).$$

A skálafüggvények és a görbeskálát parametriálisan előállító $\alpha(z)$ és $\beta(z)$ függvények is könnyen felírhatók:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\int \varphi(x) dx}, \quad Y(y) = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\int \frac{dy}{\psi(y)}}, \\ \alpha(z) = \frac{1}{\int \varphi(x) dx + \frac{1}{\chi(z)} \int \frac{dy}{\psi(y)}}, \quad \beta(z) = \frac{1}{\chi(z) \int \varphi(x) dx + \int \frac{dy}{\psi(y)}}, \\ [z = z(x, y)]. \end{array} \right.$$

E módszer *L. Lecornu*-tól [5] származik.

Megjegyzés. Gyakorlatilag rendszerint nincs szükség arra, hogy adott $z(x, y)$ függvény esetében a (19) differenciálegyenletrendszerig kelljen vinni a számolást, legtöbbször a (17) alak már megmutatja, hogy $z(x, y)$ a (16) típusúhoz tartozik-e. Sőt (17)-et még egyszerűsíthetjük egy megjegyzéssel. Tekintsük a $z = z(x, y)$ összefüggésben y -t mint x és z függvényét: $y = y(x, z)$; akkor x szerint parciálisan deriválva

$$0 = z_x + z_y y_x,$$

ahonnan

$$y_x = - \frac{z_x}{z_y}.$$

Ezt (17)-tel összevetve látjuk, hogy elég csupán egyik változót kifejezni, s a kapott egyenlet egyik változó szerinti parciális deriváltját megvizsgálni, hogy az felbomlik-e három, x -, y -, illetve z -től függő tényezőre. Ha ez a próbálkozás sikertelen, akkor képezzük a másik változó szerinti parciális deriváltakat, s ha ez sem látszik szétválaszthatónak, akkor képezzük a két derivált hányadosát, majd ha ez sem látszik közvetlenül szétválaszthatónak, akkor

a (19) egyenletrendszerhez folyamodunk. Pontosabban, egy adott $z = z(x, y)$ függvény esetén először képezzük z_x -et; ha ez az x, y , illetve z változók függvényének szorzatára bomlik, akkor $z = z(x, y)$ ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal, ahol a görbe skálára az y értékei kerülnek. Ellenkező esetben képezzük z_y -t; ha ez felbomlik három, külön-külön csupán x, y , illetve z -től függő tényezőre, akkor szintén lehetséges a kérdéses típusú nomogrammal való ábrázolás, csak a görbe skála az x változót hordja. Végül, ha egyik előző próbálkozás sem vezet eredményre, képezzük a z_x/z_y hányadost, s csak ha ez sem látszik közvetlenül szétválaszthatónak, a vázolt módszer alapján tovább számolunk, míg el nem jutunk a (19) egyenletrendszerig.

Térjünk rá ezután az $u(x, y, z) = 0$ implicit alakban megadott függvény két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal való ábrázolhatóságának kérdésére. Feladatunk most is abban áll, hogy átírjuk a differenciálegyenleteket, z parciális deriváltjait kifejezve u parciális deriváltjaival. A (18) egyenletből indulhatunk ki, melynek baloldalát már átalakítottuk az 1. §-ban (6) alatt. Így csak a jobboldalt kell átírni. $z_x z_y$ -nal osztva és a megfelelő átalakításokat végrehajtva a

$$(21) \quad C''(z) + C'(z) v = \omega$$

differenciálegyenletet nyerjük, ahol $\omega(x, y, z)$ és $v(x, y, z)$ kifejezhető pusztán u parciális deriváltjaival:

$$(22) \quad \begin{cases} \omega = \frac{1}{z_x z_y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = \frac{u_z^2}{u_x u_y} (u_x^2 u_y^2 \Delta_z + u_y^2 u_z^2 \Delta_x + u_z^2 u_x^2 \Delta_y), \\ v = \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{\Delta_{zy}^{xz}}{u_x u_y u_z}. \end{cases}$$

(Az utóbbira vonatkozólag ugyanis a

$$z_{xy} = \frac{u_{zy} u_x - u_{zz} \frac{u_y}{u_z} u_x - u_{xy} u_z + u_{xz} \frac{u_y}{u_z} u_z}{u_z^2} = \frac{u_y \partial_{xz} u_z - u_z \partial_{xz} u_y}{u_z^3} = \frac{\Delta_{zy}^{xz}}{u_z^3}$$

relációt tekinthetjük.)

Itt Δ_k a (7) alatt és Δ_{zy}^{xz} a (13) alatt értelmezett szimbólum.

Deriváljuk (21)-et x , illetve y szerint:

$$C'''(z) z_x + C''(z) z_x v + C'(z) (v_x + v_z z_x) = \omega_x + \omega_z z_x,$$

$$C'''(z) z_y + C''(z) z_y v + C'(z) (v_y + v_z z_y) = \omega_y + \omega_z z_y.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet z_y -nal, a másodikat $(-z_x)$ -szel, és adjuk össze őket, s egyúttal írjuk z parciális deriváltjai helyett u parciális deriváltjaival kifejezett alakjukat:

$$C'(z) \left[v_y \frac{u_x}{u_z} - v_x \frac{u_y}{u_z} \right] = \omega_y \frac{u_x}{u_z} - \omega_x \frac{u_y}{u_z};$$

innen

$$(23) \quad C'(z) = \frac{\omega_y u_x - \omega_x u_y}{v_y u_x - v_x u_y} = w(x, y, z).$$

Ezt deriválva x , illetve y szerint :

$$-C''(z) \frac{u_x}{u_z} = w_x - w_z \frac{u_x}{u_z},$$

$$-C''(z) \frac{u_y}{u_z} = w_y - w_z \frac{u_y}{u_z},$$

tehát

$$-C''(z) = w_x \frac{u_z}{u_x} - w_z = w_y \frac{u_z}{u_y} - w_z.$$

Ezt összevetve (21)-gyel és (23)-mal, a keresett differenciálegyenlet-rendszer :

$$(24) \quad w_x \frac{u_z}{u_x} = w_y \frac{u_z}{u_y} = w_z - \omega + v w, \quad [u(x, y, z) = 0].$$

Kimutatjuk, hogy viszont (24) teljesülése elégséges is ahhoz, hogy az $u(x, y, z) = 0$ implicit összefüggéssel meghatározott $z = z(x, y)$ függvény (16) alakban felírható legyen. Tekintsük e célból (24) első egyenletét :

$$\frac{w_x}{u_x} = \frac{w_y}{u_y},$$

másként

$$\frac{w_x}{w_y} = \frac{u_x}{u_y} = \frac{z_x}{z_y},$$

azaz

$$\begin{vmatrix} w_x & w_y \\ z_x & z_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(w, z)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Tehát w és z nem függetlenek :

$$(25) \quad w[x, y, z(x, y)] = C'(z).$$

Deriváljuk ezt pl. y szerint :

$$-C''(z) \frac{u_y}{u_z} = w_y - w_z \frac{u_y}{u_z} ;$$

átrendezéssel (és figyelembe véve (24)-et és (23)-at is) :

$$C''(z) = w_z - w_y \frac{u_z}{u_y} = \omega - vw = \omega - C'(z) v ,$$

s ez éppen (21). Ezután v és ω helyébe visszaírva a (22) értelmezés alapján u majd z parciális deriváltjait, azonos átalakítások után visszakapjuk a (18), illetve a vele ekvivalens

$$(26) \quad \frac{z_x}{z_y} = \varphi(x) \psi(y) \chi(z)$$

egyenletet. Minthogy $u(x, y, z) = 0$ folytán

$$y_x = - \frac{z_x}{z_y} ,$$

a $-g'(y) = \frac{1}{\psi(y)}$ jelöléssel (26) így alakul :

$$g'(y) y_x = \varphi(x) \chi(z) ,$$

amit x szerint integrálva

$$g(y) = \chi(z) \cdot \int \varphi(x) dx + k(z)$$

adódik, s ez a jelölésektől eltekintve megegyezik (16)-tal.

Kimondjuk tehát, hogy érvényes a

III. Tétel. Ahhoz, hogy az implicit $u(x, y, z) = 0$ alakban megadott $z = z(x, y)$ függvény két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolható legyen, azaz felírható legyen a (15) alakban, szükséges és elegendő, hogy mindazon x, y, z értékhármasok mellett, melyek az $u(x, y, z) = 0$ összefüggést kielégítik, fennálljanak a (24) alatti egyenletek, ahol az ω, v, w kifejezések (22) és (23) alatt vannak értelmezve, továbbá az értelmezésnél felhasznált Δ -szimbólumok definíciója megtalálható (7), illetve (13) alatt.

Megjegyzés. Gyakorlatilag természetesen itt is elég legtöbbször a

$$(27) \quad \frac{u_x}{u_y} = \varphi(x) \psi(y) \chi(z), \quad [u(x, y, z) = 0]$$

szétválaszthatóságot megvizsgálni. Ennek a felbontásnak a lehetősége már biztosítja, hogy az $u(x, y, z) = 0$ implicit összefüggéssel meghatározott $z = z(x, y)$ függvény két egyenes és egy görbe tartóval ábrázolható, azaz (16) alakú legyen. A skálafüggvények és a z görbeskálát előállító függvény is könnyen meghatározható (20) alapján.

1. példa. A van der Waals-féle gáz-állapotegyenlet :

$$u(p, T, v) = \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) - RT = 0$$

esetében

$$\frac{u_p}{u_T} = \frac{1}{R} (b - v),$$

tehát a $v = v(p, T)$ összefüggés ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal. A skálafüggvények (20) alapján :

$$X(p) = \frac{1}{\int \varphi(p) dp} = \frac{1}{p}, \quad Y(T) = \frac{1}{\int \frac{dT}{\psi(T)}} = \frac{1}{\int \frac{dT}{RT}} = \frac{1}{RT},$$

$$a(v) = \frac{1}{p + \frac{1}{b - v} \frac{1}{RT}} = -\frac{v^2}{a}, \quad \beta(v) = \frac{1}{(b - v)p + RT} = \frac{v^2}{a(v - b)}.$$

Ez az (a, β) -koordinátarendszerben a

$$\beta = \frac{a}{b - \sqrt{-aa}}$$

görbe, ahol $v > b$ miatt $a = a(v) < -\frac{b^2}{a}$.

A függvénynek közvetlenül a (11) alakra való hozása sem nehéz egyébként.

A fentiek alapján nyert nomogrammot lásd az ábrán.⁵⁾

2. példa. Tekintsük az

$$u = xze^y + \log \frac{x}{z} + y - 1 = 0$$

összefüggést. Minthogy

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{ze^y + 1/x}{xze^y + 1} = \frac{1}{x},$$

tehát lehetséges a három egyenes tartójú nomogrammal való ábrázolás. Az x, y független változók skálafüggvényei :

$$X(x) = \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$Y(y) = \int dy = y.$$

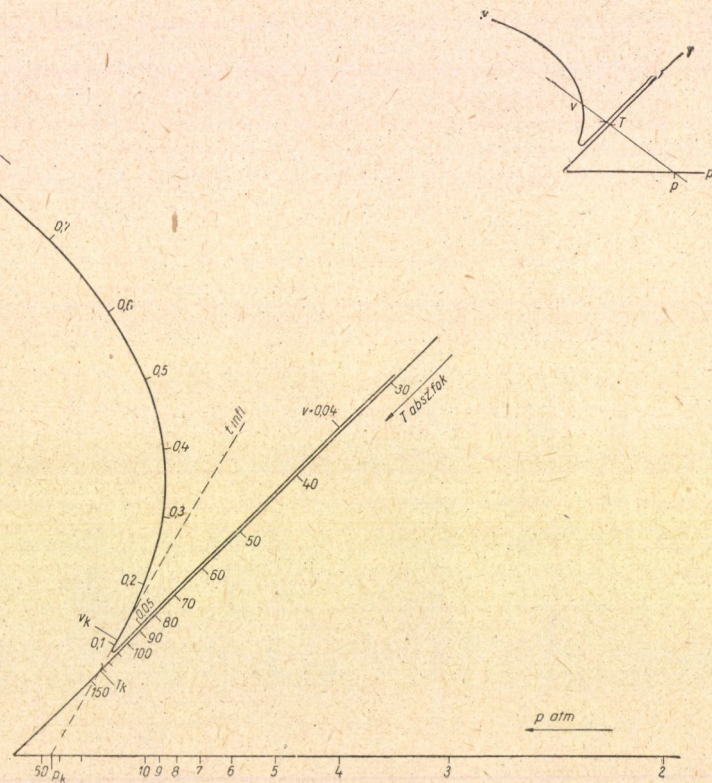
⁵⁾ A nomogrammot Török Sándor rajzolta.

LEVEGŐ $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT = 0$ ÁLLAPOTEGYENLETÉNEK NOMOGRAMMJA

$$a = 1,33 \frac{l^2 \cdot atm}{mol^2}$$

$$b = 0,0366 \frac{l}{mol}$$

$$R = 0,0821 \frac{l \cdot atm}{mol \cdot fok}$$



- [1] J. ACZÉL: »Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen.« *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 12 (1950) 73—80.
 [2] P. SAINT-ROBERT: »De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante.« *Mémoire delle R. Accademia di Scienze di Torino* (2) 25 (1871) 53—72.
 [3] S. MARTIS-BIDDAU: »Sulla caratterizzazione di alcune classi di funzioni.« *Collectanea Mathematica* 1 (1948) 67—84.
 [4] M. D'OCAGNE: *Traité de nomographie*. Paris, 1921 (p. 214).
 [5] L. LECORNU: »Sur le problème de l'anamorphose.« *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* 102 (1886) 813—816.

ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НОМОГРАММИ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

Дь. Ботош и М. Хоссу

Резюме

В настоящей работе задаются критерии в форме дифференциальных уравнений [(6), (14), (24), или в другой форме (5), (15), (27)] для изображаемости неявной функциональной зависимости номограммой из выравненных точек и указывается метод для определения шкальных функций [(4), (20)]. Проблема была поставлена Дь. Хайошом. Примечания к отдельным теоремам дают указания, как в данном случае разрешить на основе наших критериев вопрос об изображаемости и как определить шкальные функции

В §§ 1—2 исследуются неявные функции видов $u(x, y, z) = 0$ и $u(x, y, z, t) = 0$, изображаемых связанной номограммой с тремя или с четырьмя прямыми опорами, а в § 3 исследуются функции, изображаемые номограммой с двумя прямыми и одной кривой опорами.

REPRESENTATION OF IMPLICIT FUNCTIONS BY POINTWISE NOMOGRAMS

GY. BOTOS and M. HOSSZÚ

Summary

In the present paper it is shown that the differential equations (6), (14), (24), or in other form (5), (15), (27) give criteria for the possibility of representing an implicit function by scale nomograms; formulae (4) and (20) can be used to construct the graduation of the scales. The authors apply J. Aczél's method [1] developed for explicitly given functional relations, while the problem was raised by Gy. Hajós.

The §§ 1 and 2 deal with implicit functions $u(x, y, z) = 0$ and $u(x, y, z, t) = 0$ the nomograms of which contain three resp. four straight scales, finally § 3 treats the representation of an implicit function by nomograms with two straight and one curved scales.

TÖBBRÉTEGŰ TEKERCSEKBEN FELLÉPŐ SZKINEFFEKTUS

FÉNYES TAMÁS

Bevezetés

A *Beloianisz V.* kutatórészlegének megbízásából foglalkoztunk tekercsek szkinveszteségeinek számításával szinuszos áramok esetén. A megbízó kérte, hogy a veszteségek számítására egyszerű képletet adjunk meg, melynek hibája legfeljebb 10%, még akkor is, ha a váltakozó áram esetén fellépő többletveszteség eléri a 100%-ot. *R. Richter* [4] és *W. Rogowski* [5] már foglalkoztak ezzel a problémával. Megállapítottuk azonban, hogy *Richter* a *Rogowski*-féle eredmény átfogalmazásánál egy $\pi/4$ -es tényezőt figyelmen kívül hagyott és ennek következtében eredményei 27%-kal nagyobbak a valóságosnál. Azonkívül fentemlített szerzők a tekercs összes meneteit egyenlő hosszúaknak vették. Mi figyelembe vettük, hogy a tekercs külső menetei hosszabbak a belsőknél.

Cikkünkben végig az M.K.S. rendszerben dolgozunk.

1. §. A matematikai modell felállítása

A vizsgált tekercs legyen egy végtelen hosszúnak tekintett szolenoid. A gyakorlatban használatos toroidtekercset végtelen hosszú szolenoidtekercssel helyettesítjük és a toroidtekercseknél fellépő menettorlódástól eltekintünk. (A menettorlódás jelensége abból áll, hogy míg egyenes tekercs esetén az egymásra tekercselt meneteket párhuzamosaknak tekintjük, toroidtekercsnél a tekercs belsejében a menetek helyszűke miatt összetorlódnak.)

Az 1. ábrán a végtelen hosszú szolenoid egy véges l hosszúságú darabja van feltüntetve. Toroidtekercs esetében ez a távolság a toroid hosszát jelenti. Egy toroidot tüntettünk fel a 2. ábrán.

A tekercs szkinveszteségei két részből tevődnek össze. A vezetékben a radiális áramkiszorítás által okozott szkinveszteségen kívül fellép még egy örvényáramveszteség, melyet bármely kiválasztott keresztmetszet helyén a többi keresztmetszetben folyó áram által keltett mágneses tér okoz. *Freud G.* [1] dolgozatában kiszámította végtelen hosszú, egyenes, körkeresztmetszetű vezetékben fennálló árameloszlást és veszteséget a vezetőre kapcsolt időben szinuszos elektromotoros erő mellett, ha a vezető tőle nagy távolságra homogén, időben szinuszos mágneses térben van elhelyezve. (Ezt a teret a következőkben röviden homogén külső térnek nevezzük.) Mikor a veszteségnek

ezt a második komponensét számoljuk, az áramot a betekercselt térben a vizsgált vezetőszakaszon kívül egyenletesen »elkenjük«, azaz úgy számolunk, mintha az áram a betekercselt térrész metszetét határoló téglalapot a vizsgált vezetőkeresztmetszeten kívül egyenletesen kitöltené. A gerjesztési törvény alkalmazásával — ezt a következő §-ban részletesen ki fogjuk számítani — belátható, hogy a mágneses térerősség a tekercselés külső szélétől a mag felé lineárisan nő, azaz az [1]-ben szereplő matematikai modelltől eltérően tekintetbe vesszük a mágneses tér inhomogén voltát.

Az egyes meneteket a mágneses tér szempontjából egyeneseknek tekintjük.

2. §. A tekercselésben fellépő mágneses tér és vektorpotenciál

A betekercselt térben a mágneses térerősség jó közelítéssel a tekercselés külső szélétől számítva zérus értékből indulva lineárisan növekszik. Ez annál inkább megközelíti a valóságos helyzetet, mennél nagyobb a tekercs rétegeinek száma. A mágneses térerősség vektora párhuzamos a tekercs magjának tengelyével.

Vezessük be a következő jelöléseket :

m ... a betekercselt rétegek száma,

N ... egy réteg meneteinek száma,

I ... a tekercs áramerősségének amplitudója,

$l = D\pi$... a toroid hossza (vesd össze: 2. ábra),

y ... a tekercs ν -edik rétege valamely vezető keresztmetszete futó pontjának távolsága a tekercselés külső szélétől számítva (lásd a 2. ábrát!)

d ... két réteg távolsága,

$2a$... vezetőkeresztmetszet átmérője.

A 3. ábra figyelembevételével $y = (\nu - 1)d + a + r \cos \varphi$, ahol r és φ a szöbanforgó keresztmetszet középpontjára és az ábra síkjában a középponton átmenő, a tengelyre merőleges egyenesre vonatkozó polárkoordináták.

E mennyiségek segítségével a mágneses térerősség abszolút értéke közelítőleg :

$$(1) \quad H = \frac{mNI}{l[(m-1)d + 2a]} y = \frac{mNI}{l[(m-1)d + 2a]} [(\nu - 1)d + a + r \cos \varphi].$$

Később szükségünk lesz a mágneses tér vektorpotenciáljára, melynek definíciója, mint ismeretes :

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

A merőleges a vezeték keresztmetszetének bármely pontjában a keresztmetszetre, párhuzamos az áramsűrűséggel és írható, hogy

$$H = - \frac{dA}{dy}.$$

Ennek figyelembevételével, additív konstanstól eltekintve

$$(2) \quad A = - \frac{mNI}{2l[(m-1)d + 2a]} \left\{ [a + (v-1)d]^2 + 2[a + (v-1)d]r \cos \varphi + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{r^2}{2} \right\}.$$

A következő §-ban meg fogjuk határozni az egy vezetőkeresztmetszeten belüli árameloszlást a vektorpotenciál segítségével. Ha ezt a (2)-ből határoznánk meg, úgy az illető vezető saját áramát kétszer vennénk figyelembe. Ezt korrigálandó, hagyjuk ki a vizsgált vezetőkeresztmetszetet a tekercskeresztmetszetből és számítsuk ki az illető vezetőn kívül folyó áramhoz tartozó vektorpotenciált, melyet A^* -gal jelölünk.

(Az 5. ábrán fel van tüntetve a tekercs metszete, a bevonalkázott részben folyik a külső gerjesztőáram. A kör ábrázolja a vizsgált keresztmetszetet, melyet elhagytunk a tekercs metszetéből.) Ha az illető vezető áramának vektorpotenciálját A_1 -gyel jelöljük, akkor mivel a szereplő vektorpotenciálok egyirányúak, abszolút értékeikre is igaz, hogy

$$(3) \quad A^* = A - A_1.$$

A_1 kielégíti a következő differenciálegyenletet:

$$(4) \quad \Delta A_1 = -i_0,$$

ahol

$$(5) \quad i_0 = \frac{mNI}{l[(m-1)d + 2a]},$$

az egész betekercselt teret határoló l és $A = (m-1)d + 2a$ oldalakkal bíró téglalapon átfolyó állandó áramsűrűség. Tekintve, hogy A_1 a vizsgált keresztmetszetben csak az r koordinátától függ, ezért

$$(6) \quad \Delta A_1 = \frac{d^2 A_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_1}{dr} = -i_0.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a feladat szempontjából szóbajöhető partikuláris megoldása:

$$A_1 = -\frac{i_0}{4} r^2,$$

vagy részletesebben kiírva

$$(7) \quad A_1 = - \frac{mNI}{2l[(m-1)d + 2a]} \frac{r^2}{2}.$$

Ha a (2) egyenletet figyelmesen megvizsgáljuk, látjuk, hogy A kifejezésének egyik tagja éppen A_1 -gyel egyenlő. Ebből:

$$(8) \quad A^* = - \frac{mNI}{2lA} \left\{ [a + (v-1)d]^2 + 2[a + (v-1)d]r \cos \varphi + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi \right\}.$$

3. §. Az árameloszlás számítása egy vezetőkeresztmetszetben

Az áramsűrűség eleget tesz a következő integrálegyenletnek (lásd : Maneback [2]) :

$$9) \quad i(r, \varphi) + \frac{p^2}{2\pi} \int_F i \log r_{12} dF = \text{const} + p^2 A^*(r, \varphi)$$

A (9) egyenletben szereplő jelölések magyarázata a következő :

$$p^2 = -j\omega\mu_0\gamma,$$

$$\omega = 2\pi f \dots \dots \text{körfrekvencia,}$$

$$\mu_0 \dots \dots \text{a vákuum permeabilitása,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\varrho} \dots \dots \text{a feltekercselt vezető fajlagos vezetőképessége,}$$

$$r_{12} \dots \dots \text{az integrációs tartomány tetszőleges pontjának a futóponttól mért távolsága,}$$

$$F \dots \dots \text{integrálási tartomány, olyan kör, melynek középpontja az } (r, \varphi) \text{ koordináta-rendszer origója és sugara a vezető sugarával egyenlő,}$$

$$(10) \quad \begin{cases} a_0 \text{ konstans, értékét a tekercsben folyó áram nagysága determinálja,} \\ a_1 = -p^2 i_0 [a + (\nu - 1)d], \\ a_2 = -\frac{p^2 i_0}{4}. \end{cases}$$

Az integrálegyenlet megoldása a következőképp írható :

$$(11) \quad i(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(pr) \cos n\varphi,$$

ahol

$$(12) \quad A_n = \frac{2na_n a^{n-1}}{pJ_{n-1}(pa)}, \quad n \neq 0$$

(lásd: [1a], (32) egyenlet). J_n -nel jelöljük az n -ed rendű, elsőfajú Bessel függvényt. A_0 értékét I meghatározza. Írjuk a megoldást a következő alakba :

$$i = i_s + i_1 + i_2.$$

Itt

$$i_s = \frac{I_p}{2\pi a} \frac{J_0(pr)}{J_1(pa)}, \quad i_1 = A_1 J_1(pr) \cos \varphi,$$

továbbá

$$i_2 = A_2 J_2(pr) \cos 2\varphi.$$

Az i áramsűrűség ezen három komponense szemléletes fizikai tartalommal bír. Ugyanis i_s jelenti a radiális szkineffektus következtében fellépő áramsűrűségeloszlást, i_1 a külső mágneses tér »homogén komponense« által indukált örvényáram, i_2 pedig a külső mágneses tér inhomogenitása miatt szükségessé váló korrekció.

4. §. A vezeték hosszegységére eső veszteségek

A vezeték hosszegységére eső Joule-veszteséget a következőképp számoljuk:

$$(13) \quad W = \frac{1}{2\gamma} \int_F |i|^2 dF = \frac{1}{2\gamma} \int_F |i_s + i_1 + i_2|^2 dF.$$

Az egyes áramsűrűségekből származó veszteségek a cosinus-függvények ortogonalitása miatt algebrailag összeadhatók:

$$(14) \quad \int_F |i|^2 dF = \int_F |i_s|^2 dF + \int_F |i_1|^2 dF + \int_F |i_2|^2 dF.$$

Erre az érdekes tényre Freud G. [1]-ben hívta fel a figyelmet. Ez fizikailag annyit jelent, hogy a radiális áramkiszorításból származó veszteség és az örvényáram-veszteségek egyszerűen szuperponálhatók.

Számítsuk ki ezután a tekercs ν -edik rétegében a vezeték hosszegységére eső Joule-veszteséget. A veszteség i_s -nek, i_1 -nek, i_2 -nek megfelelő három részét jelöljük rendre W_1 -gyel, W_2 -vel, W_3 -mal. Ekkor először is Sommerfeld szerint

$$(15) \quad W_1 = \frac{1}{2\gamma} \int_F |i_s|^2 dF = \frac{I^2}{4\pi a \delta \gamma} \frac{\mathcal{I}_m [\sqrt{2j} J_0(pa) J_1(\bar{p}a)]}{|J_1(pa)|^2},$$

ahol \mathcal{I}_m imaginárius részt, a felülvonás pedig konjugáltat jelent, és

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}} \text{ a behatolási mélység.}$$

A (15) képletet írhatjuk a következőképp:

$$(16) \quad W_1 = \frac{I^2}{4\pi a^2 \gamma} x \frac{\mathcal{I}_m [\sqrt{j} J_0(\sqrt{-j}x) J_1(\sqrt{j}x)]}{|J_1(\sqrt{-j}x)|^2},$$

ahol

$$x = \frac{\sqrt{2}a}{\delta}.$$

Vezessük be [1] nyomán a

$$(17) \quad \frac{x}{2} \frac{\mathcal{I}m [\sqrt{j} J_0(\sqrt{-j}x) J_1(\sqrt{j}x)]}{|J_1(\sqrt{-j}x)|^2} = g(x)$$

jelölést. Ily módon nyerjük, hogy

$$(18) \quad W_1 = \frac{I^2}{2\pi a^2 \gamma} g(x).$$

Másodszor kapjuk:

$$(19) \quad W_2 = \frac{1}{2\gamma} \int_F |i_1|^2 dF = \frac{\pi}{2\gamma} |a_1|^2 a \delta^3 \frac{\mathcal{I}m [\sqrt{2j} J_1(pa) J_0(\bar{p}a)]}{|J_0(pa)|^2}.$$

Amennyiben (19)-et (15)-höz hasonlóan kissé átalakítjuk, nyerjük, hogy

$$(20) \quad W_2 = \frac{\pi}{2\gamma} |a_1|^2 \delta^4 x \frac{\mathcal{I}m [\sqrt{j} J_1(\sqrt{-j}x) J_0(\sqrt{j}x)]}{|J_0(\sqrt{-j}x)|^2},$$

továbbá

$$(21) \quad W_2 = \frac{1}{4\gamma} |a_1|^2 \delta^4 h(x),$$

ahol

$$(22) \quad h(x) = 2\pi x \frac{\mathcal{I}m [\sqrt{j} J_1(\sqrt{-j}x) J_0(\sqrt{j}x)]}{|J_0(\sqrt{-j}x)|^2}.$$

A w_3 -ra vonatkozólag pedig:

$$W_3 = \frac{1}{2\gamma} \int_F |i_2|^2 dF = \frac{\pi}{\gamma} \int_0^a |i_2|^2 r dr.$$

A számításokat elvégezve és a Bessel-függvényekre vonatkozó elemi összefüggéseket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$(23) \quad W_3 = \frac{4\pi}{\gamma} |a_2|^2 a^2 \delta^4 [g(x) - 1].$$

A (10) egyenlet figyelembevételével

$$(24) \quad W_2 = \frac{1}{\gamma} i_0^2 [(\nu-1)d + a]^2 h(x),$$

$$W_3 = \frac{\pi}{\gamma} a^2 i_0^2 \cdot [g(x) - 1].$$

5. §. A tekercs járulékos veszteségi tényezőjének kiszámítása

A szkinvesztésre jellemző egy k numerikus érték, amely megmutatja, hogy az ω frekvencián fellépő járulékos veszteség hogy aránylik az egyenáramú veszteséghez:

$$(25) \quad k = \frac{W_t - W_{et}}{W_{et}} = \frac{w_t}{w_{et}} - 1,$$

ahol W_t a tekercsben fellépő szkinvesztés, W_{et} pedig a tekercs egyenáramú vesztesége. Az egész tekercsben fellépő veszteség is három részből tevődik össze:

$$(26) \quad W_t = W_{1t} + W_{2t} + W_{3t}.$$

Ennek megfelelően a k járulékos veszteségi tényező a következő alakba írható:

$$(27) \quad k = k_1 + k_2 + k_3,$$

ahol

$$k_1 = \frac{W_{1t} - W_{et}}{W_{et}}, \quad k_2 = \frac{W_{2t}}{W_{et}} \quad \text{és} \quad k_3 = \frac{W_{3t}}{W_{et}}.$$

Tekintve, hogy a radiális szkineffektus következtében fellépő W_1 és (24)-ből láthatóan a W_3 veszteségek a tekercselés mentén állandóak, k_1 és k_3 vizsgálatánál elegendő a hosszegységre eső veszteségekkel számolni. A vezeték hosszegységében fellépő egyenáramú Joule-vesztés értéke $\frac{I^2}{2\gamma a^2 \pi}$.

Ezeket figyelembevéve:

$$(28) \quad k_1 = g(x) - 1,$$

továbbá (24) és (5) segítségével

$$(29) \quad k_3 = \frac{2\pi^2 a^4 m^2 N^2}{l^2 \Delta^2} [g(x) - 1].$$

Ahhoz, hogy k_2 -t kiszámíthassuk, meg kell határoznunk W_{et} értékét. Amennyiben a feltekercselt vezető hosszát H -val jelöljük, és kiszámítjuk, a következőt kapjuk:

$$(30) \quad H = N \sum_{v=1}^m \{L + 2\pi[a + (v-1)d]\} = mN[L + \pi dm + \pi(2a - d)],$$

ahol L a tekercsmag tengelyére merőleges síkmetszet kerülete, (30), (24) és (5) figyelembevételével :

$$(31) \quad W_{21} = \frac{1}{\gamma} \frac{m^2 N^3 I^2}{l^2 \Delta^2} \sum_{v=1}^m [(\nu - 1)d + a]^2 \{L + 2\pi[a + (m - \nu)d]\} h(x).$$

Ezzel

$$(32) \quad k_2 = \frac{2a^2 \pi m^2 N^2}{3l^2 \Delta^2} \cdot \frac{\Theta}{L + \pi dm + \pi(2a - d)} h(x),$$

ahol

$$(33) \quad \Theta = \frac{3}{m} \sum_{v=1}^m [(\nu - 1)d + a]^2 \{L + 2\pi[a + (m - \nu)d]\}.$$

6. §. A k_1 , k_2 , k_3 értékek nagyságrendi megbecslése

Feladatunkat elvileg már megoldottuk. Azonban k -ra kapott képletünk gyakorlati felhasználásra nehézkes, mondhatnánk teljesen alkalmatlan. Ezért k_1 , k_2 és k_3 kifejezéseit bizonyos geometriai megfontolások segítségével oly alakra hozzuk, hogy a nagyságrendi megbecslést könnyen végre tudjuk hajtani.

Bevezetjük az úgynevezett *kitöltési tényező* fogalmát. Ez megadja, hogy az összes vezetékanyag a betekercselt tér milyen hányadát foglalja el. Kitéltési tényező alatt értjük tehát a következő κ értéket :

$$(34) \quad \kappa = \frac{N(m-1)a^2\pi}{l\Delta^*} = \frac{Na^2\pi}{ld}$$

Itt $\Delta^* = (m-1)d$ a két szélső réteg középfelületének távolsága. A kitéltési tényező (34) szerinti értéke a rétegszámtól független. A híradástechnikában alkalmazott tekercseknél nagyságrendben $\kappa \approx 0,5$.

A nagyságrendi viszonyokat nem befolyásolja, de a becslést leegyszerűsíti, ha úgy számolunk, hogy az egyes vezetőkeresztmetszetek egy egyenlő-oldalú háromszögrácsot alkotnak (lásd a 4. ábrát!).

Ha λ két szomszédos vezető távolsága, akkor

$$(35) \quad \lambda = \frac{l}{N},$$

és

$$d \approx \lambda \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{N} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ezen összefüggések és (34) felhasználásával

$$(36) \quad \frac{d}{a} = \frac{\sqrt[4]{3\pi^2}}{\sqrt{2\kappa}},$$

vagy a $\kappa = 0,5$ helyettesítéssel:

$$(37) \quad \frac{d}{a} \approx 2,33.$$

Továbbá

$$(38) \quad k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\kappa m^2 h(x)}{\Delta^2} \frac{-\Theta}{L + \pi d m + \pi(2a - d)},$$

$$(39) \quad k_3 = 2\kappa^2 \left[\frac{2,33 m}{2,33(m-1) + 2\sqrt{2\kappa}} \right]^2 [g(x) - 1].$$

Állítás. k_2 -höz képest $k_1 + k_3$ elhanyagolható, ha a járulékos veszteség legfeljebb 100%.

Bizonyítás.

I. A (38)-ban szereplő $\alpha = \frac{\Theta}{\Delta^2 L + \pi d m + \pi(2a - d)}$ tényező k_2 értékét legfeljebb 50%-kal befolyásolja. Ugyanis az elemi számítások mellőzésével közöljük, hogy amennyiben $m \geq 3$, akkor

$$(40) \quad \alpha = \frac{L + \pi/2 \Delta}{L + \pi \Delta}$$

legfeljebb kb. 1,5%-os hibával.

Ez a törtkifejezés csak a tekercs geometriai adatait tartalmazza. Miután

$$0,5 \leq \alpha \leq 1,$$

a következőkben a nagyságrendi becslés szempontjából az α tényezőt figyelmen kívül hagyjuk.

Legyen (38)-ban

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \kappa m^2 h(x) = 1.$$

Ekkor a járulékos veszteség nagyságrendben az egyenáramú veszteség 100%-ával egyenlő. A $\kappa = 0,5$ helyettesítéssel $h(x)$ és m között nagyságrendi összefüggést kapunk:

$$(41) \quad h(x) \approx \frac{3,5}{m^2}.$$

$h(x)$ függvény végtelen sora (vesd össze [1b]):

$$(42) \quad h(x) = 4\pi \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{11}{48} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right\}.$$

(41) és (42) segítségével

$$(43) \quad \begin{array}{ll} \text{ha} & \text{ha} \\ m = 2, & m = 3, \\ h(x) = 0,863, & h(x) = 0,383, \\ x = 1,24, & x = 1. \end{array}$$

m növekedésével $h(x)$ és X értékei csökkennek.

A (39)-ben szereplő $\left[\frac{2,33m}{2,33(m-1) + 2\sqrt{2\kappa}} \right]^2$ tényező nem befolyásolja lényegesen k_3 értékét. Mivel $\kappa \approx 0,5$, ezen tényező értéke m függvényében 1,35 és 1 között változik, tehát a becslés szempontjából 1-gyel helyettesíthető. Így

$$(44) \quad k_3 \approx 2\kappa^2 [g(x) - 1] = \frac{1}{2} [g(x) - 1].$$

$g(x)$ végtelen sorának első két tagja [1b] szerint

$$(45) \quad g(x) - 1 \approx \frac{1}{12} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{180} \left(\frac{x}{2}\right)^8.$$

(43) felhasználásával belátható, hogy a sor második tagja már elhanyagolható. Ezt figyelembevéve

$$(46) \quad k_3 \approx \frac{x^4}{324},$$

és már $m = 2$ esetében is

$$k_3 \approx 0,61\%.$$

Hasonló számolással nyerjük, hogy

$$(47) \quad k_1 \approx 1,22\%,$$

és így

$$(48) \quad k_1 + k_3 \approx 1,8\%.$$

Elhanyagolhatjuk $h(x)$ sorának már a második tagját is. Ugyanis (42) és (43) alapján egyszerű számítással kapjuk, hogy az ebből származó hiba kb. 2,8% már akkor is, ha a rétegszám csak három.

$$(49) \quad h(x) \approx \frac{\pi x^4}{8}.$$

7. §. Az eredmények összefoglalása

(32), (40) és (49) összefüggésekből egyszerű számítással kapjuk, hogy a tekercs szkinvesztesége a következő képletből számítható:

$$(50) \quad k_2 \approx k = \frac{\pi^2}{768} \frac{m^2 N^2 \omega^2 m_0^2 \gamma^2 (2a)^6}{l^2} \frac{L + \pi/2 \Delta}{L + \pi \Delta}.$$

Az (50) képlet gyakorlati számításokra alkalmasabb alakra hozható. Helyettesítsük be (50)-be az $\omega = 2\pi f$ értéket, továbbá μ_0 értékét, azonkívül $\gamma = \frac{1}{\varrho}$ -t és a hosszúság dimenziójú mennyiségeket gyakorlati egységekben, akkor a következő képletet nyerjük:

$$(51) \quad k = 8 \frac{m^2 N^2 f^2 (2a)^6}{l^2 \varrho^2} \frac{L + \pi/2 \Delta}{L + \pi \Delta} 10^{-13},$$

ahová ϱ -t Ohm mm²/m-ben, a -t és l -et mm²-ben és f -et sec⁻¹-ben kell behelyettesíteni.

Az (50) képlet a következő elhanyagolások mellett érvényes (a tett nagyságrendi feltevések mellett):

		$m = 2$	$m = 3$
1.	Radiális szkinveszteség %	1,22	Elenyésző
2.	Inhomogenitási korrekció %	0,61	Elenyésző
3.	k_2 sorának magasabbrendű tagjai %	6	2,8
4.	α leegyszerűsítéséből %	kb. 6	1,5

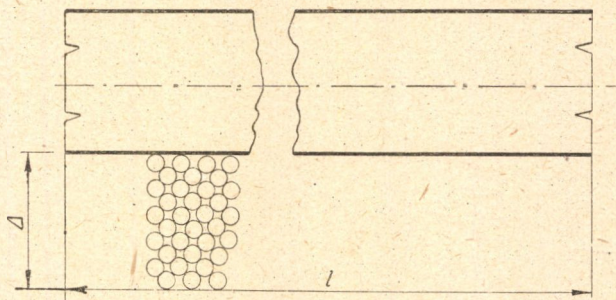
Látható, hogy az (50) képlet alkalmazhatóságát nem a táblázatban szereplő 1—4. elhanyagolások korlátozzák, hanem a mágneses térre vonatkozó kiinduló feltevés érvényessége. Véleményünk szerint három réteg esetén a mágneses tér már lineárisnak tekinthető. Másrészt nagy rétegszám esetén fel fog lépni a cikk elején már megemlített menettorlódás jelensége, mely miatt képletünk hibája megnövekedhet. Természetesen ez nemcsak a rétegszámtól függ, hanem a tekercs egyéb adataitól is. Továbbá megjegyezzük, hogy *R. Richter* [4] és *W. Rogowski* [5] cikkében az örvényáramok mágneses terének elhanyagolásával, egy $\pi/4$ -es tényező számolási hiba folytán való figyelmen kívül hagyásával hasonló eredményre jutottak.

Számításaink meglepő eredményre vezettek. Kiindulási feltevéseinkből kifolyólag, már abban az esetben is, ha a rétegszám 2, a radiális áramkiszorításból származó veszteség elhanyagolható. Továbbá még inkább elhanyagolható az inhomogenitási korrekció, ami abból származott, hogy a külső teret a vezetők belül nem vettük homogénnek. Ebből viszont következik, hogy *Freud G.* [1] cikkében vázolt modellje, melyben homogén mágneses térrel dolgozik, a gyakorlat számára teljesen elegendő pontosságú. Sőt ezen túlmenően már a javított *Rogowski–Richter*-féle képlet is teljesen kielégíti a gyakorlati követelményeket még abban a gyakorlatilag extrém esetben is, mikor a járulékos veszteség 100%. A $\pi/4$ tényező figyelmen kívül hagyása kb. 27% hibát jelent. Ez nagy járulékos veszteség esetén számottevő. A hiba valószínűleg azért került el a technikusok figyelmét, mert az erősáramú technikában alkalmazott tekercsekben a járulékos veszteség az egyenáramú veszteséghez képest igen kicsiny. A gyengeáramú technikában viszont a tekercsek egyéb veszteségei a szkinveszteségeket jelentősen felülmúlhatják.

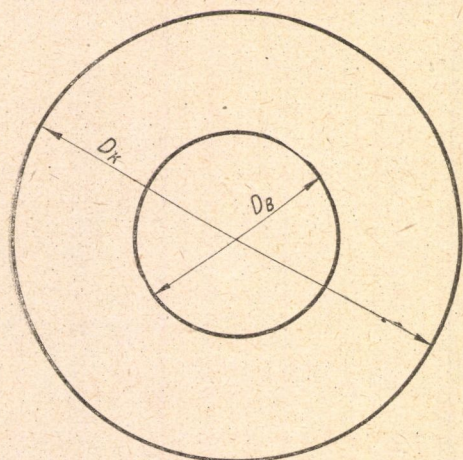
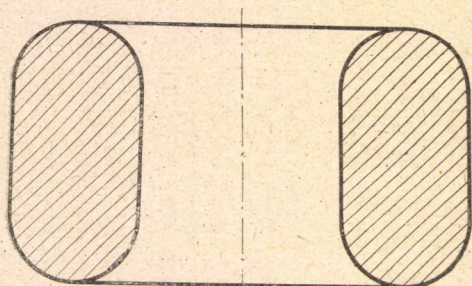
Végül köszönetet mondok *Pál Sándor*-nak és *Freud Géza*-nak a matematikai modell megalkotásában és a cikk kidolgozásában nyújtott értékes támogatásukért

IRODALOM

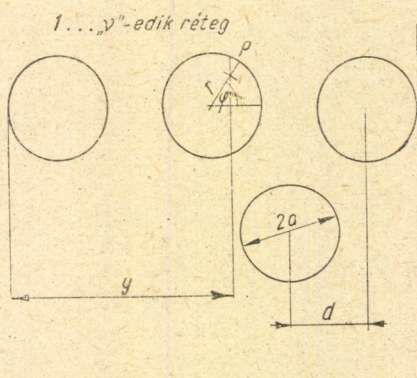
- [1a] FREUD G.: »Körkeresztmetszetű vezetőkben fellépő áramkiszorításról.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 467–478.
- [1b] G. FREUD: »Über die Stromverdrängung in Kreiszyllindrischen Leitern.« *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 10 (1955) 397–406.
- [2] CH. MANEBACK: »An integral equation for skin effect in parallel conductors.« *Journal of Mathematics and Physics* 1 (1922) 123–
- [3] SIMONYI K.: *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [4] W. ROGOWSKI: »Über zusätzliche Kupferverluste.« *Archiv für Elektrotechnik* 2 (1913) 81–118.
- [5] R. RICHTER: »Über zusätzliche Stromwärme.« I–II. *Archiv für Elektrotechnik*. 3 (1915) 175–187 és 4 (1916) 1–35.



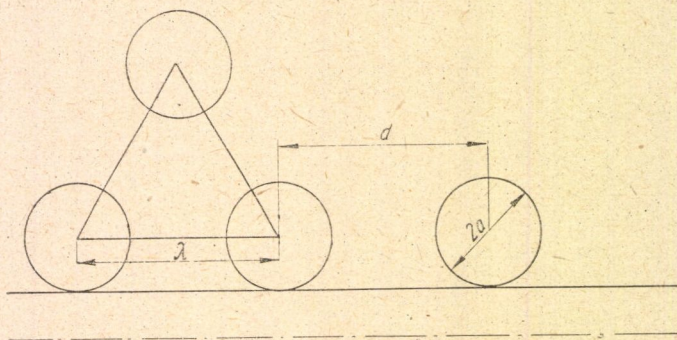
1. ábra



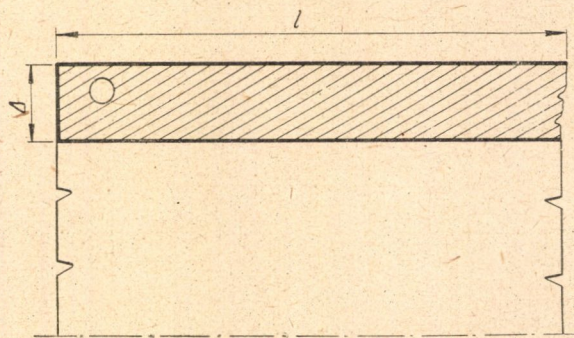
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

О СКИН-ЭФФЕКТЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КАТУШЕК

Т. Фенеш

Резюме

Настоящая работа посвящается вычислению добавочных потерь катушек, появляющихся вследствие скин-эффекта. Текущий в катушке ток является синусоидальной функцией времени. Обобщая метод Г. Фрейда, автор предполагает, что магнитное поле, возбуждаемое током катушки, не является однородным в произвольном сечении слоя. Таким образом потеря получается как сумма трех слагаемых. Кроме потери от радиального вытеснения тока, появляется и потеря на вихревые токи. Третьим источником потерь является неоднородное магнитное поле. Автор устанавливает, что даже в том случае, если добавочная потеря для частоты ω стопроцентная, то есть, если она равна по величине джоулевой потере при постоянном токе, то практически можно пренебрегать потерей от радиального скин-эффекта и поправкой по неоднородности магнитного поля. Приводится на практике хорошо применяемая простая формула для расчета потери. Далее автор указывает на ошибочность других подобных формул, встречающихся в литературе; в этих формулах не учитывается фактор $\pi/4$.

ÜBER DEN SKINVERLUST MEHRSCICHTIGER SPULEN

T. FÉNYES

Zusammenfassung

Verfasser beschäftigt sich mit der Berechnung der Zusatzverluste von Spulen, die infolge des Skineffekts auftreten. Der in der Spule fließende Strom ändert sich mit der Zeit sinusförmig. Die Methode von G. Freud wird verallgemeinert. Es wird angenommen, dass das magnetische Feld in der Spule fließenden Stromes in einer Schicht eines beliebigen Leiterquerschnitts praktisch nicht als homogen betrachtet werden kann. Der Verlust besteht aus drei Komponenten. Ausser dem Verlust durch die radiale Stromverdrängung tritt der Wirbelstromverlust auf. Der dritte Teil des Verlustes wird durch die Inhomogenität des magnetischen Feldes verursacht.

Verfasser behauptet, dass der radiale Skinverlust und auch die Korrektur des durch die Inhomogenität des magnetischen Feldes entstehenden Verlustes praktisch vernachlässigbar ist, sogar im Falle, wenn der Zusatzverlust bei der Frequenz ω 100% beträgt, also gleich dem Joule-Verlust bei Gleichstrom ist. Zur Berechnung des Verlustes wird eine praktisch gut brauchbare einfache Formel hergeleitet, ferner wird auf die Fehlerhaftigkeit der in der Fachliteratur angeführten ähnlichen Formeln hingewiesen; in diesen wird nämlich der Faktor $\pi/4$ ausser Acht gelassen.

A POTENCIÁLELMÉLET HARMADIK PEREMÉRTÉKFELADATÁRÓL

FREUD GÉZA

Bevezetés

Ha egy homogén izotróp hővezető közegben stacionárius hőáramlás alakul ki, a T hőmérséklet a hely függvényében a

$$(1) \quad \Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

differenciálegyenletnek (az úgynevezett Laplace-egyenletnek) tesz eleget. Ha most ez a test felülete mentén egy másik közeggel érintkezik, melynek hőmérséklete a felületen adott $T_0(Q)$ függvénnyel egyenlő, (Q a test felületén fut végig), úgy a fenti parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk a

$$(2) \quad T + h \frac{\partial T}{\partial n} = T_c$$

peremfeltétel mellett, ahol

$$h = \frac{k}{K} > 0$$

és k a test anyagának hővezetési tényezője, K pedig a test és a határoló közeg közti hőközlési tényező.

A (2) képletben $\frac{\partial T}{\partial n}$ a kifelé irányított felületi normális menti differenciálhányadost jelöli. Az így kapott matematikai probléma a potenciálelmélet harmadik peremértékfeladata. Ennek megoldása, mint ismeretes, könnyen nyerhető, ha ismerjük a feladat Green-függvényét. Jelöljük azt a térrészt, ahol az (1) Laplace-egyenletnek teljesülnie kell, V -vel és ennek határfelületét, ahol a (2) peremfeltételt kötöttük ki, F -fel. Akkor (definícióként) azt a $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ függvényt nevezzük feladatunk Green-függvényének, amely az alábbi feltételeknek tesz eleget:

a) Az (x_0, y_0, z_0) pont körül az x, y, z koordináták függvényeként,

$$(3) \quad G = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + G^*(x, y, z)$$

alakban állítható elő, ahol G^* a V belsejében mindenütt harmónikus (azaz $\Delta G^* = 0$). Ebből következik, hogy a V tartomány minden (x_0, y_0, z_0) -től különböző (x, y, z) pontjában az x, y, z koordináták függvényében

$$(4) \quad \Delta G = 0;$$

b) az F peremen legyen, ugyancsak x, y, z függvényeként

$$(5) \quad G + h \frac{\partial G}{\partial n} = 0,$$

ahol $\frac{\partial}{\partial n}$ ugyanúgy, mint az előbb, a kifelé mutató normális mentén képezett differenciálhányadost jelöli.

c) A G^* függvény, mint x, y, z függvénye, a V tartományban korlátos.

A dolgozat utolsó fejezetében látni fogjuk, hogy ez a három feltétel a mi esetünkben a Green-függvényt egyértelműen meghatározza.

A Green-függvény ismeretében a feladat megoldása :

$$(6) \quad T(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int T_0 \frac{\partial G}{\partial n} df.$$

1. §. A Green-függvény megszerkesztése feltérre és félsíkra

A jelen dolgozatban zárt alakban előállítjuk a feltérre és félsíkra vonatkozó harmadik peremértékfeladat Green-függvényét. Először tekintsük a feltérre vonatkozó problémát. Legyen a $z > 0$ a V térrész, F pedig a $z = 0$ sík. Elegendő a $h = 1$ esetre szorítkoznunk, mert az általános eset az

$$\begin{aligned} x &= hx', & y &= hy', & z &= hz', \\ x_0 &= hx'_0, & y_0 &= hy'_0, & z_0 &= hz'_0, \\ G &= hG' \end{aligned}$$

transzformációval erre visszavezethető. Tehát (5)-ből

$$(7) \quad \left[G - \frac{\partial G}{\partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

Először is vázlatosan ismertetni kívánjuk azt a megfontolást, amelynek segítségével a feladat Green-függvényét meghatároztuk. Bár a végképlet ismeretében könnyen verifikálható, hogy a megszerkesztett függvény az a), b) és c) tulajdonságokkal rendelkezik, úgy gondoljuk, hogy az olvasó számára nem minden tanulság nélkül való, ha a végeredményhez vezető okoskodást is megismeri.

Bevezetjük az

$$(8) \quad \begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ r_0^* &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2} \end{aligned}$$

jelölést. A Green-függvényt az alábbi alakban keressük :

$$(9) \quad G = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta - z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2}} d\zeta,$$

ahol C egy (végtelenen át záródó) görbe a komplex számsíkon. Ha $(C - z)$ -vel jelöljük azt a görbét, amely a C görbének a valós tengely irányában $(-z)$ -vel való eltolásából származik, akkor

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta - z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-z} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z + z_0)^2}}. \end{aligned}$$

Ha sikerül a C görbét és az $f(\zeta)$ analitikus függvényt úgy választanunk, hogy a C és $C - z$ görbék közti tartományban az utolsó integrandus reguláris legyen, úgy ezt az integrált »visszatolhatjuk» a C görbére :

$$(10) \quad G^* = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z + z_0)^2}}.$$

Az

$$\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z + z_0)^2}}$$

kifejezés az x, y, z változóknak harmónikus függvénye, hacsak a négyzetgyök alatt álló kifejezés nem válik zérussá, tehát G^* harmónikus minden olyan tartományban, ahol a (10) integrál egyenletesen konvergens. Ezzel az $a)$ feltételt teljesítettük. Az $f(\zeta)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy a $b)$ feltétel, azaz (7) is teljesüljön :

$$G - \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta - z) + f'(\zeta - z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2}} d\zeta.$$

Egyszerű átalakítással

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_0} \right]_{z=0} &= \left[\frac{1}{r_0^*} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_0^*} \right]_{z=0} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2}}, \end{aligned}$$

feltéve, ha a C útvonal a $\zeta = 0$ pontot egyszer körülfutja. A $b)$ feltétel átírt alakja tehát

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} + f(\zeta) + f'(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}} = 0,$$

és ez mindenesetre teljesül, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés azonosan zérus, azaz ha $y = f(\zeta)$ eleget tesz az alábbi differenciálegyenletnek:

$$(11) \quad \frac{dy}{d\zeta} + y = -\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}.$$

Ennek egy partikuláris megoldása

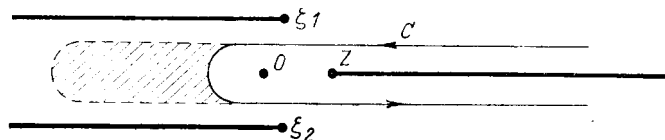
$$(12) \quad y = f(\zeta) = \frac{1}{\zeta} - 2e^{-\zeta} \mathcal{E}_i \zeta,$$

ahol

$$(13) \quad \mathcal{E}_i \zeta = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau$$

az exponenciális integrál.¹⁾

A (9) jobboldalán álló integrandusnak tehát az $\mathcal{E}_i(\zeta - z)$ függvény fellépése következtében logaritmikus szingularitása van a $\zeta = z$ helyen továbbá négyzetgyökös elágazási szingularitása van a $\zeta_{1,2} = -z_0 \pm \pm i \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ pontokban. Az integrandust úgy tesszük egyértelművé, hogy a ζ síkot a $z > 0$ ponttól a pozitív valós tengely irányába mutató, illetve a ζ_1 és ζ_2 ponttól a negatív valós tengely irányába mutató félegyenessel felhasítjuk.



Az így felhasított ζ síkon C -nek az ábra szerinti, két félegyenesből és egy félkörből összetett görbét választhatjuk. Az ábrából az is leolvasható, hogy a C és $C - z$ görbék közé eső, vonalkázással jelölt tartományban az integrandus reguláris, amit meggondolásunk során feltételeztünk.

¹⁾ Az \mathcal{E}_i -függvény tulajdonságára vonatkozólag az olvasó figyelmébe ajánljuk [1] III. fejezetét.

Így (9)-ből lesz :

$$\begin{aligned}
 G^* &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{1}{\zeta - z} - 2e^{-\zeta+z} \mathcal{E}_i(\zeta - z) \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}} = \\
 (14) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \\
 &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{e^{-\zeta+z} \mathcal{E}_i(\zeta - z) d\zeta}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}}.
 \end{aligned}$$

Az első integrál a reziduumtétellel számítható :

$$(15) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{r_0^*}.$$

A második integrálban az integrációs utat úgy deformálhatjuk, hogy a z -ből kiinduló hasíték két partjára integrálunk. Miután pozitív x -re

$$\mathcal{E}_i(x + i0) = \mathcal{E}_i(x - i0) - 2\pi i$$

(lásd : [1]), tehát

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & - \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{e^{-\zeta+z} \mathcal{E}_i(\zeta - z) d\zeta}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\zeta+z_0)^2}} = \\
 & = -2e^z \int_z^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t+z_0)^2}}.
 \end{aligned}$$

Végül (3), (14), (15) és (16)-ból a keresett Green-függvény :

$$(17) \quad G = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0^*} - 2e^z \int_z^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t+z_0)^2}}.$$

Közvetlen differenciálással meggyőződhetünk róla, hogy ez eleget tesz a (7) peremfeltételnek, tehát a b) feltétel teljesül. Másrészt a (17) jobboldalán álló integrálból a $t = z - z_0 + u$ helyettesítéssel :

$$\begin{aligned}
 & e^z \int_z^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t+z_0)^2}} = \\
 (18) \quad & = e^{z_0} \int_{z_0}^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+u)^2}},
 \end{aligned}$$

és $z_0 > 0$ esetén ez a $z > 0$ feltérben harmónikus függvényt állít elő, mert az integrandus harmónikus, és az integrál az x, y, z paraméterek függvényeként egyenletesen konvergens. Ennek következtében az $a)$ feltétel is teljesül.

Végül (18)-ból leolvasható, hogy ez az integrál rögzített $z_0 > 0$ esetén x, y, z és x_0, y_0 tetszőleges értékére az

$$e^{z_0} \int_{z_0}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

korlát alatt marad, tehát a $c)$ feltétel is teljesül. Teljesen hasonló módon kapjuk, hogy a $-\infty < x < \infty, y \geq 0$ félsíkra vonatkozó harmadik peremértékfeladat Green-függvénye, szintén $h = 1$ esetre felírva:

$$(19) \quad G = \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{r^*} + e^y \cdot \int_y^{\infty} \log [(x - x_0)^2 + (t + y_0)^2] e^{-t} dt,$$

ahol

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}.$$

2. §. A feltérre és félsíkra vonatkozó peremértékfeladat megoldása

A (17) képletből

$$(20) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_{z=0} = 2e^{z_0} \int_{z_0}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + u^2]^{3/2}} = K(x_0, y_0, z_0; x, y),$$

és így (6) alapján (miután $-z$ a tartományból kifelé mutató normális iránya)

$$(21) \quad T(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint T_0(x, y) K(x_0, y_0, z_0; x, y) dx dy.$$

Itt $T_0(x, y)$ jelenti a $T - \frac{\partial T}{\partial z}$ előírt peremértékeit.

Bebizonyítjuk, hogy (21) valóban a harmadik peremértékfeladat megoldását szolgáltatja. Ennek során nem tűzzük ki célul, hogy a legáltalánosabb feltételeket megtaláljuk, amelyek mellett (21) a peremértékfeladat megoldásaként értelmezhető.

Legyen a $T_0(x, y)$ függvény az egész x, y síkon korlátos, és minden $|x| \leq X, |y| \leq Y$ tartományon Riemann szerint integrálható. (20)-ból leolvasható, hogy $z_0 > 0$ -ra

$$(22) \quad |K(x_0, y_0, z_0; x, y)| \leq \frac{2e^{z_0}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

tehát a $T_0(x, y)$ függvény korlátossága következtében a (21) jobboldalán álló integrál minden $z_0 \geq Z_0 > 0$ feltérben az x_0, y_0, z_0 paraméterekben egyenletesen konvergens, tehát az egész $z_0 > 0$ feltérben harmónikus függvényt állít elő. (20)-ból

$$(23)^* \quad \frac{\partial K}{\partial z_0} = K - \frac{2z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

és ebből az előbbihez hasonlóan látható, hogy az

$$\iint T_0(x, y) \frac{\partial K}{\partial z_0} dx dy$$

integrál is az x_0, y_0, z_0 paraméterekben egyenletesen konvergens minden $z_0 \geq Z_0 > 0$ feltérben. Abból, hogy fenti integrál z_0 -ban egyenletesen konvergens, következik, hogy $z_0 > 0$ esetén

$$(24) \quad \frac{\partial T}{\partial z_0} = \frac{1}{4\pi} \iint T_0(x, y) \frac{\partial K}{\partial z_0} dx dy,$$

végül (21), (24) és (23)-ból:

$$(25) \quad T - \frac{\partial T}{\partial z_0} = \frac{z_0}{2\pi} \iint \frac{T_0(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.$$

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi segédtételekre:

I. segédétel: Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény legyen az egész x, y síkon korlátos és minden $|x| \leq X, |y| \leq Y$ tartományon Riemann szerint integrálható. Akkor az $f(x, y)$ minden (x_0, y_0) folytonossági helyén

$$(26) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2\pi} \iint \frac{f(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + u^2]^{3/2}} = f(x_0, y_0),$$

és a konvergencia az $f(x, y)$ függvény egy folytonossági tartományának minden zárt belső résztartományára egyenletes.

(26) nem más, mint a feltérre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldási képlete. A konvergenciabizonyítás minden potenciálméleti tankönyvben megtalálható.²⁾

Megjegyzés: Ha $f(x, y)$ korlátos és minden $|x| \leq X, |y| \leq Y$ tartományra Riemann szerint integrálható, akkor ismert valós függvénytani tétel szerint

²⁾ Lásd például: [2], p. 188.

majdnem mindenütt³⁾ folytonos ; így tehát (26) is a sík majdnem minden pontjában teljesül.

1. *Tétel*: A $T_0(x, y)$ függvény minden x_0, y_0 folytonossági helyén (tehát a sík majdnem minden pontjában) a

$$a) \quad \lim_{z_0 \rightarrow +0} \left(T - \frac{\partial T}{\partial z_0} \right) = T_0(x_0, y_0);$$

$$b) \quad \lim_{z_0 \rightarrow +0} T(x_0, y_0, z_0) \text{ és } \lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)$$

határértékek külön-külön léteznek :

c) a $T(x_0, y_0, z_0)$ függvény a $z_0 = 0$ peremsík majdnem minden pontjában z_0 szerint jobbról parciálisan differenciálható, és

$$\lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) = T'_{z_0}(x_0, y_0, 0).$$

Az a), b) és c) pontokban szereplő határértékekhez való konvergencia a $T_0(x, y)$ függvény egy folytonossági tartományának minden zárt belső résztartományára egyenletes.

Bizonyítás: Tekintettel (25)-re, az a) állítás segédteételünk közvetlen következménye.

(21)-be (20)-at helyettesítve :

$$T(x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{z_0}}{2\pi} \iint T_0(x, y) \left\{ \int_{z_0}^{\infty} \frac{e^{-u} u \, du}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + u^2]^{3/2}} \right\} dx dy.$$

Miután $T_0(x, y)$ korlátos, a (22) egyenlőtlenség következtében a jobboldalon álló háromszoros integrál $z_0 > 0$ esetén mint az x, y és u változók szerinti hármas integrál abszolút konvergencia és így az integrálások sorrendje felcserélhető :

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0, z_0) &= \frac{e^{z_0}}{2\pi} \int_{z_0}^{\infty} e^{-u} u \left\{ \iint \frac{T_0(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + u^2]^{3/2}} dx dy \right\} du = \\ (27) \quad &= T_0(x_0, y_0) + e^{z_0} \int_{z_0}^{\infty} F(x_0, y_0, u) e^{-u} du, \end{aligned}$$

ahol

$$(28) \quad F(x_0, y_0, u) = \frac{u}{2\pi} \iint \frac{T_0(x, y) - T_0(x_0, y_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + u^2]^{3/2}} dx dy.$$

³⁾ Azaz : egy olyan pontthalmaz kivételével, melynek Lebesgue-féle mértéke zérus.

Segédttételünk szerint

$$(29) \quad \lim_{u \rightarrow +0} F(x_0, y_0, u) = 0,$$

tehát (27) jobboldalának $z_0 \rightarrow +0$ esetén van határértéke:

$$(30) \quad \lim_{z_0 \rightarrow +0} T(x_0, y_0, z_0) = T_0(x_0, y_0) + \int_0^{\infty} F(x_0, y_0, u) e^{-u} du.$$

Miután a tétel a) állítását már bebizonyítottuk, (30)-ból következik, hogy $z_0 \rightarrow +0$ esetén $\frac{\partial T}{\partial z_0}$ -nak is van határértéke és

$$(31) \quad \lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_z(x_0, y_0, z_0) = \int_0^{\infty} F(x_0, y_0, u) e^{-u} du.$$

Hátra van még annak kimutatása, hogy a $T(x_0, y_0, z_0)$ a $z_0 = 0$ sík pontjaiban z_0 szerint jobbról parciálisan differenciálható. Ez azonnal következik a differenciálszámítás Lagrange-féle középértéktételéből és T'_z folytonosságából.

Q. e. d.

Megjegyzés: Legyen $T_0(x_0, y_0)$ a τ_0 zárt tartomány minden pontjában folytonos, és jelentse τ az

$$(x_0, y_0) \in \tau_0, \quad 0 \leq z_0 \leq \zeta < \infty$$

hengeralakú tartományt. Akkor a fentiek következtében a $T'_z(x_0, y_0, z_0)$ deriváltfüggvény a zárt τ tartományon folytonos, tehát ugyanitt egyenletesen folytonos. Ebből következik, hogy a

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{T(x_0, y_0, h) - T(x_0, y_0, +0)}{h} = T'_z(x_0, y_0, +0)$$

határértékreláció τ_0 -on egyenletes.

3. §. A megoldás egyértelműsége

II. segédttétel:

Feltételek: Az F félgömb-tartományt a γ félgömbfelület és a K körlemez határolják. Az F tartományban értelmeztünk egy $u(P)$ harmónikus függvényt, amely F -ben korlátos és a K körlemez majdnem minden helyén F -ből közeledve van határértéke, és ez a határérték egyenlő zérussal.

Állítás: Jelentse F^* az F tartomány tükörképét a K kör síkjára. Ha u -t a K -ra merőleges koordinátában páratlan függvényként folytatjuk F^* -ra és az egész K körlemezen zérussal tesszük egyenlővé, akkor az így kiterjesztett függvény az egész $F^* + K + F$ gömbben harmónikus.

Bizonyítás: Állítsuk elő egy tetszőleges S sík és Γ gömbfelülettel határolt F félgömbre vonatkozó Dirichlet-féle feladat Green-függvényét, amely a P potenciálponthoz tartozik. Legyen P -nek a gömbre vonatkozó inverze \bar{P} és $PQ = r$, $\bar{P}Q = \bar{r}$. Mint ismeretes, a teljes Γ gömb belsejére vonatkozó Dirichlet-feladat Green-függvénye

$$G(Q, P) = \frac{1}{r} - \frac{a}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}},$$

ahol a a Γ gömb sugara és ϱ a potenciálpont távolsága a gömb középpontjától.

Legyen most P , illetve \bar{P} tükörképe az S síkra P^* , illetve P^* és $QP^* = r^*$, $Q\bar{P}^* = \bar{r}^*$. Akkor a Dirichlet-feladat Green-függvénye az F félgömbre

$$(32) \quad G(Q, P) = \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}} \right) - \left(\frac{1}{r^*} - \frac{a}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}^*} \right).$$

Valóban $Q \in \Gamma$ esetén $G(Q, P) = 0$, hiszen ott már az egyes zárójelbe foglalt kifejezések is eltűnnek, $Q \in S$ esetén pedig $r = r^*$ és $\bar{r} = \bar{r}^*$, tehát G akkor is eltűnik; továbbá, azonnal leolvasható, hogy a félgömbön belül $Q \neq P$ esetén G a Q függvényében harmónikus és a P pontban az $\frac{1}{r}$ karakterisztikus szingularitása van.

Tekintsük most a segédételünkben szereplő F félgömböt. Legyen $F_0 \subset F$ egy F -vel koncentrikus $a_0 < a$ sugarú zárt félgömb és F_δ legyen az a félgömb, amelyet úgy kapunk, hogy F_0 -t az alapsíkjára merőlegesen az F belseje felé δ -val eltoljuk. Válasszunk F_0 belsejében egy rögzített, de egyébként tetszőleges P belső pontot és legyen δ a továbbiakban mindig olyan kicsi, hogy $P \subset F_\delta \subset F$. Akkor a Green-képlet szerint

$$(33) \quad -4\pi u(P) = \int \int_{\gamma_\delta + K_\delta} \frac{\partial \bar{G}_\delta(Q, P)}{\partial n} u(Q) df_Q,$$

ahol γ_δ és K_δ jelentik az F_δ -t határoló félgömbfelületet, illetve körlemezt, $\bar{G}_\delta(P, Q)$ pedig az F_δ tartomány Green-függvényét.

Legyen P_δ az a pont, amelyikbe P a δ -val való eltolás után átmegy. Hasonlóan definiáljuk a \bar{P}_δ , P_δ^* , \bar{P}_δ^* pontokat. Akkor

$$G_\delta(Q, P) = G_0(Q_{-\delta}, P_{-\delta}).$$

Tehát (33)-ból koordinátatranszformációval $P \in F$ esetén

$$(34) \quad -4\pi u(P) = \int \int_{\gamma_0 + K_0} \frac{\partial \bar{G}_0(Q, P_{-\delta})}{\partial n} u(Q_{-\delta}) df_Q.$$

Az integrandus rögzített $P \in F$ esetén δ elég kis értékeire δ -tól független korlát alatt marad, és majdnem minden Q -ra van határértéke. Tehát Lebesgue egy ismert tétele szerint a $\delta \rightarrow 0$ határátmenet az integráljel alatt elvégezhető:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} -4\pi u(P) &= \iint_{\gamma_0} \frac{\partial \bar{G}_0(Q, P)}{\partial n} u(Q) df_Q = \\ &= \iint_{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{a_0}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}} \right) u(Q) df_Q - \iint_{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} - \frac{a_0}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}^*} \right) u(Q) df_Q. \end{aligned} \right.$$

A jobboldali integrálok Lebesgue-féle értelemben veendőek.

Jelentse Q^* a Q tükörképét a K_0 alapsíkra; akkor elemi számítással

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} - \frac{a_0}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}^*} \right) \right]_Q = \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{a_0}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}} \right) \right]_{Q^*},$$

és folytassuk u -t F^* -ra úgy, hogy

$$(36) \quad u(Q^*) = -u(Q),$$

akkor (35) utolsó tagját átírva, $P \in F$ esetén

$$(37) \quad -4\pi u(P) = \iint_{\gamma_0 + \gamma_0^*} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{a_0}{\varrho} \frac{1}{\bar{r}} \right) u(Q) df_Q = \iint_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(Q, P)}{\partial n} u(Q) df_Q,$$

ahol $\Gamma_0 = \gamma_0 + \gamma_0^*$ a teljes a_0 sugarú gömbfelület és G_0 a Γ_0 által határolt a_0 sugarú gömbtartomány Green-függvénye. (37) nem más, mint a Poisson-integrál, amely Γ_0 belsejében mindenütt harmónikus függvényt állít elő.

(37)-ből leolvasható, hogy a jobboldalán álló integrálban a P pont koordinátái helyére a P^* tükrözött pont koordinátáit helyettesítve, az integrál értéke jelet vált. Ebből következik, hogy a (36) szerint kiterjesztett $u(P)$ függvény az a_0 sugarú gömb minden belső pontjában számítható a (37) képlet segítségével, tehát ott harmónikus. Tekintettel arra, hogy bármely $P \in F$ pont befoglalható egy alkalmasan választott sugarú F_0 félgömbbe, ezzel bizonyításunkat befejeztük.

2. *Tétel.* Legyen $u(x, y, z)$ az egész $z > 0$ féltérben harmónikus és korlátos függvény, legyen továbbá $\frac{\partial u}{\partial z}$ a $z > 0$ féltér minden korlátos részhalmozán korlátos. Az $u - \frac{\partial u}{\partial z}$ kifejezésnek a $z = 0$ sík majdnem minden pontjában legyen határértéke és ez a határérték zérussal egyenlő.⁴⁾ Akkor $u(x, y, z) \equiv 0$.

⁴⁾ Ha a $z = 0$ sík minden pontjában létezik és zérussal egyenlő az $u - \frac{\partial u}{\partial z}$ határértéke, abból következik már másik feltételünk, hogy $\frac{\partial u}{\partial z}$ a féltér minden korlátos részhalmozán korlátos.

Bizonyítás: Ha u a $z > 0$ tartományban harmónikus, akkor ugyanott

$$(38) \quad f(x, y, z) = u - \frac{\partial u}{\partial z}$$

is harmónikus, és így a tett feltevések mellett az $f(x, y, z)$ függvényt z -ben páratlan függvényként folytatva, az egész térben harmónikus függvényt kapunk. A (38) differenciálegyenletet u -ra megoldva,

$$(39) \quad u(x, y, z) = e^z \left[- \int_0^z e^{-\zeta} f(x, y, \zeta) d\zeta + u(x, y, 0) \right].$$

Miután $f(x, y, z)$ -t már sikerült $z < 0$ -ra folytatnunk, ennek a képletnek segítségével $u(x, y, z)$ is folytatható ugyanerre a féltérre.

Tekintettel arra, hogy az $f(x, y, z)$, mint harmónikus függvény, az x, y, z változók analitikus függvénye, a fenti képlet segítségével az $u(x, y, z)$ -t analitikus függvényként $z < 0$ -ra is értelmeztük.

Tekintettel arra, hogy ez a függvény $z > 0$ -ra harmónikus volt, az analitikus folytatása is harmónikus függvényt állít elő. Ezután kifejezzük u -nak egy rögzített, a $z < 0$ féltérbe eső helyen felvett értékét az u függvénynek a $z \geq 0$ féltérben felvett értékei segítségével. Legyen a továbbiakban $z > 0$.

$$\begin{aligned} u(x, y, -z) &= e^{-z} \left[- \int_0^{-z} e^{-\zeta} f(x, y, \zeta) d\zeta + u(x, y, 0) \right] = \\ &= e^{-z} \left[\int_0^z e^{\zeta} f(x, y, -\zeta) d\zeta + u(x, y, 0) \right]. \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy

$$\int_0^z e^{\zeta} f(x, y, -\zeta) d\zeta = - \int_0^z e^{\zeta} f(x, y, \zeta) d\zeta,$$

tehát

$$u(x, y, -z) = e^{-z} \left[- \int_0^z e^{\zeta} f(x, y, \zeta) d\zeta + u(x, y, 0) \right].$$

Most használjuk fel (38)-at:

$$\begin{aligned} \int_0^z e^{\zeta} f(x, y, \zeta) d\zeta &= \int_0^z e^{\zeta} [u(x, y, \zeta) - u'_{\zeta}(x, y, \zeta)] d\zeta = \\ &= 2 \int_0^z e^{\zeta} u(x, y, \zeta) d\zeta - e^z u(x, y, z) + u(x, y, 0), \end{aligned}$$

tehát

$$(40) \quad u(x, y, -z) = u(x, y, z) - 2e^{-z} \int_0^z e^{\zeta} u(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Ha tehát az $|u(x, y, z)|$ függvény $z > 0$ -ra a K korlát alatt marad, akkor (40) következtében

$$|u(x, y, -z)| \leq 3K.$$

Tehát az $u(x, y, z)$ harmonikus függvény abszolút értékben az egész térben a $3K$ korlát alatt marad, és így *Liouville* egy klasszikus tételéből következik, hogy az egész térben ugyanazt az állandó értéket veszi fel:

$$u(x, y, z) = c.$$

Mivel $z = 0$ -ra $u - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, tehát $c = 0$, és így

$$u(x, y, z) \equiv 0.$$

Q. e. d.

Az 1. és 2. tételek felhasználásával könnyen bebizonyítható a következő tétel:

3. *Tétel.* Legyen $T_0(x, y)$ az egész síkon értelmezett, korlátos, és minden véges téglalapra Riemann szerint integrálható függvény. Akkor a $\Delta T = 0$ differenciálegyenletnek a

$$(41) \quad \lim_{(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, 0)} \left| T(x, y, z) - \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right| = T_0(\xi, \eta)$$

peremfeltétel »majdnem mindenütt« való teljesülése mellett a $z > 0$ féltérben egy és csakis egy olyan megoldása van, amelyik 1° korlátos, 2° z szerinti parciális deriváltja a $z > 0$ féltér minden korlátos részhalmazán korlátos.

Bizonyítás. Ismert valós-függvénytani tétel szerint $T_0(x, y)$ majdnem mindenütt (azaz: egy zérus Lebesgue-mértékű halmaz kivételével) folytonos. A megoldás egyértelműsége a 2. tétel közvetlen folyománya. Az egzisztenciát a (21) képlet biztosítja. A korlátosságra vonatkozó követelmények a (21) által adott megoldásra teljesülnek; ez nyilvánvaló, hiszen mind a (21), mind a (25) képletben szereplő magfüggvények pozitívak, s minthogy $T_0 \equiv 1$ esetén 1-et adnak, azért

$$|T(x_0, y_0, z_0)| \leq \max_{\substack{-\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty}} |T_0(x, y)|,$$

$$\left| T - \frac{\partial T}{\partial z_0} \right| \leq \max_{\substack{-\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty}} |T_0(x, y)|.$$

Megjegyzendő, hogy innen az derül ki, hogy $\left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|$ az egész térben korlá-

tos, a 3. tétel pedig éppen azt állítja, hogy ha csak azt követeljük $\left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|$ -től, hogy minden korlátos tartományban legyen korlátos, akkor sem kapunk több megoldást.

Ezúton is köszönetet mondok *Czipszer János*-nak a kézirat átnézése során tett számos értékes megjegyzéséért és *Pál Sándor*-nak néhány, a szakirodalomra vonatkozó útbaigazításáért.

IRODALOM

- [1] Н. Н. ЛЕБЕДЕВ: *Специальные функции и их приложения*. Гостехиздат, Москва, 1953.
[2] С. Н. СОБОЛЕВ: *Уравнения математической физики*. Гостехиздат, Москва, 1950.

О ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Г. Фрейд

Резюме

Третья краевая задача теории потенциала состоит в следующем: следует определить функцию $T(x, y, z)$, удовлетворяющую в части Γ пространства дифференциальному уравнению (1), а на ограничивающей поверхности F условию (2). h — заданная постоянная, а T_0 — функция, заданная на границе. К такой задаче мы приходим, например, если искомой является температура, как функция места в однородной изотропной среде, в которой установился стационарный тепловой поток, и которая ограничена средой с распределением $T_0(Q)$ температуры на поверхности. В таком случае $h = k/K$ где k — коэффициент теплопроводности рассматриваемой среды, а K — коэффициент взаимной теплопроводности двух сред.

Назовем функцией Грина нашей задачи функцию $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, которая
а) при заданных x_0, y_0, z_0 имеет вид (3), и G^* гармоническая функция внутри Γ ;
б) удовлетворяет на границе F условию (5), и для которой
с) G^* как функция x, y, z ограничена в V .

Тогда решением задачи является (6).

Автор задает в замкнутом виде функцию Грина полупространства $z > 0$ и полуплоскости $y > 0$. Для полупространства если без ограничения общности положить $h=1$ — (5) принимает вид (7). Введя обозначения (8), следует искать функцию Грина в виде (9), где C произвольная кривая в комплексной числовой плоскости. Отодвигая путь интегрирования на $-z$ в направлении вещественной оси и «восстановив» интеграл на C (это всегда возможно провести, если только интегрируемая регулярна в области между двумя кривыми) получаем (10). Как видно, эта функция гармонична во всякой области в которой интеграл равномерно сходится. Таким образом удовлетворяется условие а).

Представим теперь выражение $G - \frac{\partial G}{\partial z}$. Путем простых преобразований получаем, что для применимости (7), то есть б), достаточно, чтобы C окружало точку $\zeta = 0$ и для $y = f(\zeta)$ выполнялось дифференциальное уравнение (11). Если подставить решение (12) в (9), то получается многозначная интегрируемая. Ее можно сделать однозначной, разрезая плоскость вдоль полупрямых, указывающих в точках $\zeta_{1,2} = -z_0 \pm \pm i\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ в направлении отрицательной и в точке z в направлении положительной вещественной оси. Пусть наконец C кривая, состоящая из двух полупрямых и полукруга, изображенная на рис. 2. Вычисляя теперь первый интеграл из (14) при помощи теоремы вычетов, а второй интеграл стягиванием контура C на две кромки шели, исходящей из z , получим для искомой функции Грина формулу (17). Нетрудно показать, что эта функция действительно удовлетворяет условиям а), б) в с).

Аналогично получается и функция Грина (19) полуплоскости $y > 0$, $-\infty < x < \infty$ (также для $h = 1$).

Во второй части показывается, что полученное из (6) при помощи (15) выражение (21) [ср. (17)] при некоторых условиях действительно является единственным решением третьей краевой задачи для полупространства.

Если $T_0(x, y)$ ограничена на всей плоскости и интегрируема в смысле Римана во всяком конечном прямоугольнике, то определенная соотношением (21) функция $T(x_0, y_0, z_0)$ гармонична при $z_0 > 0$ и имеет место.

Теорема 1. Для $T_0(x, y)$ во всех точках непрерывности x_0, y_0 (то есть почти во всех точках плоскости)

$$a) \lim_{z_0 \rightarrow +0} \left(T - \frac{\partial T}{\partial z_0} \right) = T_0(x_0, y_0) :$$

b) существуют пределы

$$\lim_{z_0 \rightarrow +0} T(x_0, y_0, z_0) \text{ и } \lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) ;$$

c) $T(x_0, y_0, z_0)$ дифференцируема по z_0 справа, и

$$\lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) = T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0).$$

Сходимость во всех этих случаях равномерна во всякой замкнутой области, лежащей внутри некоторой области непрерывности функции $T_0(x_0, y_0)$.

Доказательство опирается на формулу для решения задачи Дирихле для полупространства.

Теорема 2. Пусть $u(x, y, z)$ функция гармоническая и ограниченная во всем полупространстве $z > 0$; пусть далее $\frac{\partial u}{\partial z}$ ограничена на всяком ограниченном подмножестве полупространства $z > 0$, и пусть выражение $u - \frac{\partial u}{\partial z}$ сходится к нулю почти во всех точках плоскости $z = 0$. При таких условиях $u(x, y, z) \equiv 0$.

Для доказательства продолжим функцию (35), как нечетную функцию переменной z при $z \leq 0$, а потом при помощи (36) распространим также функцию $u(x, y, z)$. Таким образом получается функция гармоническая и ограниченная во всем пространстве и применение теоремы Лиувилля становится возможным.

Применяя теоремы 1 и 2 уже нетрудно доказать теорему 3: пусть $T_0(x, y)$ ограничена во всей плоскости и интегрируема в смысле Римана на всяком конечном прямоугольнике. Тогда дифференциальное уравнение $\Delta T = 0$ имеет в полупространстве $z > 0$ одно и только одно решение, удовлетворяющее краевому условию (38) почти во всех точках плоскости $z = 0$, ограниченное в полупространстве $z > 0$ и такое, что $\frac{\partial T}{\partial z}$ ограничена на всяком ограниченном подмножестве полупространства.

ÜBER DAS RANDWERTPROBLEM DRITTER ART DER POTENTIALTHEORIE

G. FREUD

Zusammenfassung

Das Randwertproblem dritter Art der Potentialtheorie besteht im folgenden:

Es soll eine Funktion $T(x, y, z)$ bestimmt werden, welche in einem räumlichen Gebiet harmonisch ist, und an der Grenzfläche F des Gebietes die Randbedingung (2) befriedigt. Hierbei ist $h = \text{const}$ und $T_0(Q)$ eine am Rande vorgeschriebene Funktion. Diese Aufgabe ergibt sich, wenn wir die Temperatur, als Ortsfunktion suchen in einem isotropen wärmeleitenden Medium, in welcher ein stationärer Wärmestrom fließt und von einem anderen Medium begrenzt ist, deren Temperatur auf den an F anschliessenden Teilen gleich $T_0(Q)$ ist. Hierbei ist $h = k/K > 0$; k = Wärmeleitzahl des Mediums, K = Wärmeübergangszahl an der Grenzfläche F .

Die Greensche Funktion $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ ist durch folgende Eigenschaften bestimmt:

a) für festes x_0, y_0, z_0 hat G die Form (3), wobei G^* als Funktion von x, y, z in V harmonisch ist;

b) am Rande F besteht (5);

c) G^* ist als Funktion von x, y, z in V beschränkt.

Unter diesen Bedingungen liefert (6) die Lösung des Randwertproblems.

Es wird die Greensche Funktion des Halbraumes $z > 0$ und der Halbebene $y > 0$ in geschlossener Form dargestellt.

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h = 1$ gesetzt werden. Wir suchen die Greensche Funktion in der Form (9) (vgl. die Bezeichnungen (8)), wobei C eine Kurve der komplexen Ebene ζ bedeutet. Wir verschieben den Integrationsweg um $-z$ (das erlaubt ist, falls der Integrand regulär ist im Gebiet, welche durch die Kurve C während der Verschiebung gestreift wird und es wird sich zeigen, dass das tatsächlich der Fall ist); dann erhält man (10). Aus (10) ist unmittelbar ersichtlich, dass G harmonisch ist.

Der Ausdruck $G - \frac{\partial G}{\partial z}$ befriedigt die Bedingung (7), falls die Kurve C den Punkt $z = 0$ umschlingt und $y = f(\zeta)$ der Differentialgleichung (11) genügt; eine Lösung dieser Differentialgleichung ist (12). Der so erhaltene Integrand ist regulär in der längs dreier Halbgeraden aufgeschlitzten Ebene. Zwei Halbgeraden laufen der reellen Achse parallel nach links von den Punkten $\zeta_{1,2} = -z \pm i\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, die dritte Halbgerade besteht aus dem Teil $\operatorname{Re} \zeta > z$ der reellen Achse. Danach wird der Integrationsweg C in der in Figur 1. beschriebenen Weise gewählt. Der erste Teil von (14) wird mit dem Residuensatz ausgewertet, im zweiten Teil wird C auf die beiden Ufer des Schlitzes auf der reellen Achse zusammengezogen. So ergibt sich Formel (17) für die gesuchte Greensche Funktion.

Ähnlicherweise erhält man die Greensche Funktion (19) der Halbebene.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die Existenz und Unizität der Lösung des Randwertproblems untersucht.

Es sei $T_0(x, y)$ in der ganzen Ebene beschränkt und auf jedem endlichen Rechteck im Riemannschen Sinne integrierbar; dann hat (21) für $z_0 > 0$ jedenfalls einen Sinn, und ist eine harmonische Funktion von x_0, y_0, z_0 .

Satz 1.: Ist $T(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) stetig, (was in fast allen Punkten der Ebene x, y gültig ist), dann gelten folgende drei Aussagen:

$$a) \lim_{z_0 \rightarrow +0} \left(T - \frac{\partial T}{\partial z_0} \right) = T_0(x_0, y_0);$$

b) es existieren die Randwerte

$$\lim_{z_0 \rightarrow +0} T(x_0, y_0, z_0) \text{ und } \lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0);$$

c) für $z_0 = 0$ ist $T(x_0, y_0, z_0)$ von rechts partiell differenzierbar und besteht

$$\lim_{z_0 \rightarrow +0} T'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) = T'_{z_0}(x_0, y_0, 0).$$

In allen drei Fällen ist die Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teil eines Stetigkeitsgebietes von $T_0(x_0, y_0)$ gleichmäßig.

Der Beweis wird unter Anwendung der bekannten Lösung des Dirichletschen Problems für den Halbraum durchgeführt.

Satz 2.: Es sei $u(x, y, z)$ in dem ganzen Halbraum $z > 0$ harmonisch und beschränkt, ferner sei $\frac{\partial u}{\partial z}$ auf jeder endlichen Teilmenge dieses Halbraumes beschränkt.

Endlich konvergiere $u - \frac{\partial u}{\partial z}$ in fast allen Punkten $z > 0$ gegen Null. Dann ist

$$u(x, y, z) \equiv 0$$

Aus den Sätzen 1. und 2. folgt:

Satz 3.: Es sei $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in der ganzen Ebene beschränkt und auf jedem endlichen Rechteck R integrierbar. Dann hat die Differentialgleichung $\Delta T = 0$ eine, und nur eine Lösung im Halbraum $z > 0$, welche in fast allen Punkten der Ebene $z = 0$, die Randbedingung dritter Art (38) befriedigt, im ganzen Halbraum beschränkt ist, ferner ist $\frac{\partial T}{\partial z}$ im jeden endlichen Teilgebiet von $z > 0$ beschränkt.

ELEKTROMOS TÉRBE HELYEZETT DIPÓLUSROTÁTOR KVANTÁLT ENERGIANÍVÓINAK SZÁMÍTÁSA

FREUD GÉZA és BOGNÁR JÁNOS

A Schrödinger-egyenlettel kapcsolatban fellépő sajátérték-feladatok megoldása ritkán sikerül zárt alakban. Legtöbbször perturbációs, variációs és egyéb közelítő módszerekre vagyunk utalva. A használt eljárások közös hátránya, hogy nem adnak tájékoztatást a közelítés pontosságáról. Ezért kívánatos olyan további megoldási módszerek kidolgozása, amelyeknél hibabecslés végezhető. Egy differenciálegyenlet-típusra sikerült ilyen módszert találni a *Sommerfeld*-féle polinom-módszer általánosítása segítségével. Az általánosítás lényege az, hogy bizonyos sajátérték-problémáknál a sajátfüggvények hatványsorának együtthatói nem válnak ugyan valamely indextől kezdve azonosan zérussá, mint polinommegoldás esetén, de »gyorsan« tartanak zérushoz. Ez a gondolat először *A. Mohrenstein* (más szempontból elhibázott) [1] cikkében szerepel, burkolt formában. Pontos megfogalmazását és bizonyítását *Freud G.* adta meg [2] dolgozatában. Meggondolásaiból adódik a következő tétel:

Legyen

$$(1) \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu} x^{\nu} = f(x)$$

az

$$(2) \quad (x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\sum_{k=0}^l p_k x^k \right) y = 0$$

differenciálegyenlet egyik megoldása. Akkor (1) konvergens a $(-1, 1)$ nyílt intervallumban, és a

$$(3) \quad \varrho_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2\nu r_{2\nu}, \quad \varrho_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\nu + 1) r_{2\nu+1}$$

határértékek léteznek. Ahhoz, hogy (1) korlátos legyen a $[-1, 1]$ számközben, szükséges és elégséges, hogy

$$(4) \quad \varrho_0 = 0 \quad \text{és} \quad \varrho_1 = 0$$

legyen. [2] ezenkívül becslést ad a $|2\nu r_{2\nu} - \varrho_0|$ és $|(2\nu + 1) r_{2\nu+1} - \varrho_1|$ értékekre.

Az említett eredményeket felhasználtuk az elektromos térbe helyezett dipólusrotátor kvantált energianívóinak számítására. Ezzel a kérdéssel először *R. Kronig* [3], majd *P. Debye* ([4], IX. fejezet) és *F. Brouwer* [5] foglalkozott. *Kronig* és *Debye* eredménye a perturbációszámítás második közelítésének felel meg, *Brouwer* pedig felállította a negyedik (alapállapotra a hatodik) közelítést. Számításaink azt mutatják, hogy ezek a közelítések kis térerősségek esetén meglehetősen jók, a térerősség nagy — de kísérletileg megvalósítható — értékei mellett azonban már a pontos értéktől való igen jelentős eltérésre vezetnek.

H. K. Hughes [6] egy *W. Lamb*-tól származó lánc törtes egyenletet közöl a sajátértékek meghatározására, a felállítás módját azonban nem ismer-teti. Az egyenletnek ugyanott táblázatban feltüntetett gyökei teljesen meg-egyeznek az általunk nyert értékekkel a mi hibahatárunkon belül.

Dipólusrotátornak nevezzük a két, egymástól állandó távolságban mozgó tömegpontból és ezek összekötő egyenesében elhelyezkedő elektromos dipólusból álló rendszert. Ez a modell bizonyos esetekben alkalmazható két-atomos dipólusmolekulák viselkedésének leírására. Így pl. ennek segítségével értelmezhető a kétatomos dipólusmolekulák rotációs színképének Stark-effektusa.

A dipólusrotátor Schrödinger-egyenlete térbeli polárkoordinátákban (lásd pl. *Debye* [4], p. 163.):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + (\alpha + \beta \cos \vartheta) \psi = 0.$$

Itt

$$(5) \quad \alpha = \frac{2 I \mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{2 m I E}{\hbar^2}.$$

\mathcal{E} a dipólusrotátor energiáját, I a dipólustengelyre merőleges egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot, m az elektromos dipólusnyomatékot E pedig a külső elektromos tér intenzitását jelenti.

A megoldást

$$\psi = e^{M\varphi} \sin^M \vartheta \cdot f(\cos \vartheta) \quad (M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

alakban keresve, $f(x)$ -re ($x = \cos \vartheta$) az

$$(6) \quad (1 - x^2) f''(x) - 2(M + 1) x f'(x) + [\alpha - M(M + 1) + \beta x] f(x) = 0$$

differentiálegyenlet adódik. (6) csak akkor tartozik a (2) típushoz, ha $M = 0$, ezért a továbbiakban erre az esetre szorítkozunk. Tehát keressük az

$$(7) \quad (1 - x^2) f''(x) - 2 x f'(x) + (\alpha + \beta x) f(x) = 0$$

differentiálegyenlet adott β -hoz tartozó $\alpha = \alpha(\beta)$ sajátértékeit. A saját-függvényekre az a kikötés, hogy a $(-1, 1)$ számközben korlátosak legyenek.

(7) megoldásait az (1) hatványsor-alakban írva, az r_ν együtthatókra érvényes a

$$(8) \quad (\nu + 1)(\nu + 2)r_{\nu+2} + [a - \nu(\nu + 1)]r_\nu + \beta r_{\nu-1} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \\ (r_{-1} = 0)$$

rekurziós formula. Legyen $f_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ a (7) differenciálegyenletnek az $f_0(0) = 1$, $f'_0(0) = 0$ kezdeti értékekhez, $f_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu x^\nu$ pedig az $f_1(0) = 0$, $f'_1(0) = 1$ kezdeti értékekhez tartozó megoldása. Akkor

$$(9) \quad r_\nu = r_0 c_\nu + r_1 d_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Freud G. ismertetett tétele szerint a

$$(10) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2\nu c_{2\nu} = \gamma_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2\nu d_{2\nu} = \delta_0, \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\nu + 1) c_{2\nu+1} = \gamma_1, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\nu + 1) d_{2\nu+1} = \delta_1$$

határértékek léteznek, így (3)-ból és (9)-ből következik, hogy

$$(11) \quad \varrho_0 = r_0 \gamma_0 + r_1 \delta_0 \\ \varrho_1 = r_0 \gamma_1 + r_1 \delta_1.$$

De az említett tétel szerint az (1) megoldás akkor és csak akkor korlátos a $(-1, 1)$ közben, ha $\varrho_0 = \varrho_1 = 0$. Beírva ezt (11)-be, kapjuk, hogy korlátos nemtriviális megoldás létezéséhez szükséges és elégséges a

$$(12) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \delta_0 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet fennállása. A Δ determináns az α és β paraméterek függvénye, tehát (12) implicit kapcsolatot jelent α és β között, amelyből meghatározható a kvantált energia mint a térerősség függvénye.

A $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ determinánsban szereplő elemek közelítő meghatározására Mohrenstein közölt egy eljárást [1]. Ennek az a lényege, hogy a determinánsban szereplő határértékeket a megfelelő sorozatok valamely távoli tagjával (illetve annak egy közelítő értékével) helyettesítjük. Az utóbbiak α -nak és β -nak polinomjai; az együtthatók rekurzív kiszámíthatók. Nevezetesen, $C_\nu^{i,j}$ -vel jelölve $\alpha^i \beta^j$ együtthatóját a $\nu! c_\nu(\alpha, \beta)$ polinomban, (8)-ból következik a

$$(13) \quad C_\nu^{i,j} = (\nu - 1)(\nu - 2) C_{\nu-2}^{i,j} - C_{\nu-2}^{i-1,j} - (\nu - 2) C_{\nu-3}^{i,j-1} \quad (\nu = 2, 3, 4, \dots), \\ (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

rekurziós formula. Ugyanez a formula érvényes a $\nu! d_\nu(a, \beta)$ polinom D_v^{ij} együtthatóira is. (Mindazon együtthatók, melyeknek indexei közt -1 is szerepel, zérusnak tekintendők.) Definíció szerint

$$\begin{aligned} 0! c_0 &= 1, & 0! d_0 &= 0, \\ 1! c_1 &= 0, & 1! d_1 &= 1. \end{aligned}$$

Ezek alapján a C_v^{ij} és D_v^{ij} értékek meghatározhatók. Kiderül, hogy rögzített i és j mellett vagy a páros vagy a páratlan ν -höz tartozó együtthatók mind eltűnnek, pontosabban

$$\begin{aligned} C_{2\nu}^{i, 2j+1} &= 0, & D_{2\nu}^{i, 2j} &= 0, & (\nu &= 0, 1, 2, \dots), \\ C_{2\nu+1}^{i, 2j} &= 0, & D_{2\nu+1}^{i, 2j+1} &= 0 & (i, j &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

A polinomokat osztva $(\nu - 1)!$ -sal, kapjuk a $\nu c_\nu(a, \beta)$ és $\nu d_\nu(a, \beta)$ polinomokat. Ha (12)-ben a determináns elemeit ezekkel pótoljuk, algebrai egyenletet kapunk α -ra és β -ra, amelyből adott β -hoz tartozó α sajátértékek kiszámíthatók.

Ez a módszer számítástechnikailag aránylag egyszerűen kezelhető, de hibájának megbecslése elég nehéz feladatnak látszik. A hibabecslés hiánya *Mohrenstein* említett dolgozatában téves eredményekre is vezetett, amennyiben *H. Preuss* [7] kimutatta, hogy az ott használt közelítés nem megfelelő, eltekintve attól, hogy a számolásban is hiba van. Ezt a nehézséget úgy kerüljük el, hogy először β három konkrét értékénél az α sajátértékeket a [2] dolgozatban megadott becslés felhasználásával igen gondosan behatároltuk.

A számítást az alapállapotra és az első gerjesztett állapotra, vagyis (az $M = 0$ -hoz tartozó) két legkisebb sajátértékre végeztük el. A három alappontot úgy választottuk, hogy azok HCl^{35} molekulánál ($I = 2,61 \cdot 10^{-40}$ gcm², $m = 1,03 \cdot 10^{-18}$ e. s. e., lásd [8], p. 77. és [4], p. 193.) éppen az $E = 0,5 \cdot 10^6$ Volt/cm, $1 \cdot 10^6$ Volt/cm, $2 \cdot 10^6$ Volt/cm térerősségeknek feleljenek meg. Az így kapott $\beta = 0,813$; $\beta = 1,626$ illetve $\beta = 3,252$ értékek és rögzített α mellett kiszámítottuk a $100 c_{100}$, $101 c_{101}$, $100 d_{100}$, $101 d_{101}$ értékeket a $\{c_\nu\}$ -re és $\{d_\nu\}$ -re is érvényes (8) rekurziós formula segítségével, majd alkalmaztuk *Freud G.* [2] dolgozatának egyik eredményét a (10) határértékek és egyúttal a (12) determináns megbecslésére. Az így nyert becslés azonban túl durvának mutatkozott, ezért egy iterációs eljárással javítottuk. Ez lényegében úgy történt, hogy a

$$\gamma_0 = 100 c_{100} \prod_{\nu=50}^{\infty} \frac{(2\nu + 2) c_{2\nu+2}}{2\nu c_{2\nu}}$$

és az analóg szorzatelőállításokban szereplő hányadosokat előző becslésükkel helyettesítettük. A becslések részletezése a függelékben található meg. Végül elég jó becslést kaptunk α -ra. Az egész számítást különböző α -értékek mellett elvégezve, a (12) feltétel alapján lehetőleg pontosan behatároltuk a sajátértékeket.

Ezután a *Mohrenstein*-módszernek olyan közelítését választottuk, amely az alappontokban a hibahatárokon belül eső értékeket szolgáltat. Számításaink azt mutatták, hogy ilyet kapunk, ha (12)-ben a determinánst a $30c_{30}31d_{31} - 30d_{30}31c_{31}$ harmincadfokú polinom α -ban és β -ban legfeljebb hetedfokú

részeivel pótoljuk. (Az alapállapotban elegendő a negyedfokú rész is.) Az együtthatókat (13) segítségével meghatározva a következő egyenlet adódott :

$$\begin{aligned}
 & -0,1578a^7 + 3,4814a^6 - (53,5569 - 0,1475\beta^2)a^5 + (539,1761 - 2,7149\beta^2)a^4 - \\
 & - (3222,9433 - 33,6292\beta^2 + 0,0321\beta^4)a^3 + \\
 (14) \quad & + (9666,6667 - 257,6154\beta^2 + 0,4077\beta^4)a^2 - \\
 & - (10000,0000 - 1055,4187\beta^2 + 2,9726\beta^4 + 0,0014\beta^6)a - \\
 & - (1666,6667\beta^2 - 9,2365\beta^4 + 0,0066\beta^6) = 0.
 \end{aligned}$$

Az 1. és 2. táblázatban feltüntettük a (14) egyenlettel számított sajátértékeket, a hibahatárokat és összehasonlítás céljából a perturbációs számítás útján kapott értékeket β különböző értékei mellett, alapállapotban és első gerjesztett állapotban. Látható, hogy a (14) egyenlet mindhárom alappontban a hibahatárok közé eső értékeket szolgáltat, viszont a perturbációs számítás jelentős eltérésekre vezet. Igaz, hogy ez az eltérés a perturbációs számítás második közelítését használva HCl^{35} molekula esetén $5 \cdot 10^5$ Volt/cm térerősségnél ($\beta = 0,813$), a negyedik (alapállapotban hatodik) közelítést használva még 10^6 Volt/cm térerősségnél ($\beta = 1,626$) sem túl nagy, $2 \cdot 10^6$ Volt/cm térerősségnél ($\beta = 3,252$) már eléri a perturbálatlan sajátértéktől való eltérés 41, illetve 81 százalékát alapállapotban és 103, illetve 94 százalékát a gerjesztett állapotban. Figyelemreméltó, hogy a második közelítésről magasabb közelítésre való áttérés a perturbációs paraméter ilyen nagy értéke mellett lényegében nem javítja az eredményt. Ez megfelel annak a ténynek, hogy a (7) differenciálegyenlet βx perturbációs tagja ilyenkor meghaladja a két szomszédos perturbálatlan sajátérték különbségét. Tekintetbe kell venni azt is, hogy bár HCl^{35} molekula esetében $\beta = 3,252$ -nek $2 \cdot 10^6$ Volt/cm térerősség felel meg, ami a kísérleti technika mai állása mellett is igen nagy érték, de pl. CsF -nál *Hughes* [6] adatai és (5) szerint a megfelelő térerősség kb. 4000 Volt/cm, ez pedig már jól megvalósítható.

Függelék. (A hibabecslések ismertetése)

Freud G. [2] dolgozatában levezeti a következő becslést :
Legyen ν_0 oly nagy, hogy az

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} |p_k|$$

jelöléssel

$$\frac{L}{\nu} < (\nu + 1)^{1/2} - (\nu - 1)^{1/2} \quad \text{ha} \quad \nu \geq \nu_0$$

legyen. Válasszuk meg továbbá a K számot úgy, hogy

$$|\nu r_\nu| \leq K \nu^{1/2} \quad (\nu = 1, 2, \dots, \nu_0)$$

és

$$|r_0| \leq K$$

legyen. Akkor

$$(15) \quad |2nr_{2n} - \varrho_0| < \frac{2\sqrt{2}KL}{(2n)^{1/2}},$$

$$|(2n-1)r_{2n-1} - \varrho_1| < \frac{2\sqrt{2}KL}{(2n-1)^{1/2}}. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

[p_k , r_ν , ϱ_0 és ϱ_1 definíciójára nézve lásd az (1), (2), (3) képleteket.]

Ezt alkalmaztuk a $|100c_{100} - \gamma_0|$, $|101c_{101} - \gamma_1|$, $|100d_{100} - \delta_0|$, $|101d_{101} - \delta_1|$ maradékok megbecslésére. A γ_0 -ra kapott becslést az alapállapot számításánál a következőképpen javítottuk:

Esetünkben a $\{\nu c_\nu\}$ sorozat váltakozó előjelű és $\alpha < 0$, tehát (8) alapján

$$\begin{aligned} |\gamma_0| &= |100c_{100}| \prod_{\nu=50}^{\infty} \frac{|(2\nu+2)c_{2\nu+2}|}{|2\nu c_{2\nu}|} = \\ &= |100c_{100}| \prod_{\nu=50}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{|\alpha|}{2\nu(2\nu+1)} + \frac{\beta^*}{(2\nu+1)(2\nu-1)} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right\} = \\ &= |100c_{100}| \exp \sum_{\nu=50}^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{|\alpha|}{2\nu(2\nu+1)} + \frac{\beta}{(2\nu+1)(2\nu-1)} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right\} > \\ &> |100c_{100}| \exp \sum_{\nu=50}^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{|\alpha|}{2\nu(2\nu+1)} + \frac{\beta}{(2\nu+1)(2\nu-1)} \inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right\}. \end{aligned}$$

$x > 0$ esetén $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, tehát

$$\begin{aligned} \gamma_0 > |100c_{100}| \exp \left\{ |\alpha| \sum_{\nu=50}^{\infty} \frac{1}{2\nu(2\nu+1)} + \beta \inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \sum_{\nu=50}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu-1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[|\alpha| + \beta \inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right]^2 \sum_{\nu=50}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^4} \right\}. \end{aligned}$$

Beírva a szereplő sorösszegek numerikus értékét:

$$(16) \quad \begin{aligned} |\gamma_0| > |100c_{100}| \exp \left\{ 0,005024 |\alpha| + 0,005050 \beta \inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} - \right. \\ \left. - 10^{-7} \left[|\alpha| + \beta \inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, $\log(1+x) < x$ felhasználásával kapjuk:

$$(17) \quad |\gamma_0| < |100c_{100}| \exp \left\{ 0,005025 |\alpha| + 0,005051 \beta \sup_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|} \right\}.$$

Az $\inf_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|}$ és $\sup_{\nu \geq 50} \frac{|(2\nu-1)c_{2\nu-1}|}{|2\nu c_{2\nu}|}$ mennyiségeket (15)-ből nyert becslésükkel pótoltuk.

Ugyanígy javítottuk γ_1 , δ_0 , δ_1 becslését, majd a javított értékekkel iteráltunk.

A gerjesztett állapot számításánál ez a javítás nem volt minden további nélkül keresztülvihető, mert a (15) segítségével nyert becslések nem biztosították a $\{2\nu c_{2\nu}\}$ stb. sorozatok jeltartását és ennek következtében a (17)-ben és az analóg képletekben előforduló hányadosok korlátosságát sem. Ezért a (15) becslést finomítottuk annak felhasználásával, hogy a mi esetünkben *a)* a (2)-ben szereplő $\Sigma p_k x^k$ polinom fokszáma alacsony, tudniillik 1; *b)* a $\{r_r\}$ sorozat elég távoli tagjainak hibáját kell csak megbecsülni; *c)* a $\{|2\nu r_{2\nu}|\}$ és $\{|(2\nu + 1) r_{2\nu+1}|\}$ sorozatok különböző nagyságrendűek. Így kaptuk:

$$|100r_{100} - e_0| < \frac{K_0 |\alpha| + K_1 \beta}{2(1 - \mu)} 0,0103052^{1-\mu}$$

és

$$|101r_{101} - e_1| < \frac{K_1 |\alpha| + K_0 \beta}{2(1 - \mu)} 0,0102021^{1-\mu},$$

ahol μ , K_0 és K_1 úgy választandó, hogy

$$\frac{|\alpha| + \beta}{101} < 102^\mu - 100^\mu,$$

$$K_0 > \frac{|100r_{100}|}{100^\mu},$$

$$K_1 > \max \left(\frac{|99r_{99}|}{99^\mu}, \frac{|101r_{101}|}{101^\mu} \right)$$

és

$$\max \left(\frac{K_1}{K_0}, \frac{K_0}{K_1} \right) < 99^{1-\mu}$$

legyen.

Az első gerjesztett állapot számításánál ezek a becslések két nagyságrenddel jobbnak bizonyultak (15)-nél és így [a (16), (17) stb. egyenlőtlenségeket $\alpha < 0$ -nak megfelelően módosítva] javítani is lehetett őket.

IRODALOM

- [1] A. VON MOHRENSTEIN: »Neue Berechnung des H_2 Moleküls.« *Zeitschrift für Physik* 128 (1950) 395—408.
- [2] G. FREUD: »Über die Mohrensteinsche Berechnung des H_2 Moleküls.« *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* 1 (1952) 325—328.
- [3] R. DE KONIG: »The dielectric constant of symmetrical polyatomic dipole-gases on the new quantum mechanics.« *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* 12 (1926) 608—612.
- [4] P. DEBYE: *Polare Molekeln*. Hirzel, Leipzig, 1929.
- [5] F. BROUWER: *Dissertation*, Amsterdam, 1930.
- [6] H. K. HUGHES: »The electric resonance method of radiofrequency spectroscopy.« *Physical Review*, 72 (1947) 614—623.
- [7] H. PREUSS: »Berechnung des H_2 -Molekül-Grundzustandes.« *Zeitschrift für Physik* 130 (1951) 239—241.
- [8] H. A. STUART: *Molekülstruktur*. Springer, Berlin, 1934.

1. táblázat

Dipólusrotátor alapállapotához tartozó sajátértékek

A feltüntetett téreörösségek HCl^{35} molekulára vonatkoznak. α_0 a (14)-ből számított legkisebb sajátérték, α_0^- ill. α_0^+ a hibabecsléssel nyert alsó, illetve felső behatárolás, α_0^{II} a perturbációszámítás második (lásd: [4], IX. fejezet), α_0^{VI} a perturbációszámítás hatodik közelítése (lásd: [6]).

β	α_0^-	α_0	α_0^{II}	α_0^{VI}	α_0^+	E 10 ⁴ Volt cm
0	0	0	0	0	0	0
0,0813		-0,0011				0,05
0,1626		-0,0044				0,1
0,2439		-0,0099				0,15
0,3252		-0,0175				0,2
0,4065		-0,0273	-0,0275	-0,0273		0,25
0,4878		-0,0391				0,3
0,5691		-0,0529 ₅				0,35
0,6504		-0,0688				0,4
0,7317		-0,0865				0,45
0,8130	-0,107	-0,106	-0,110	-0,110	-0,105	0,5
0,8943		-0,127				0,55
0,9756		-0,150				0,6
1,0569		-0,175				0,65
1,1382		-0,201				0,7
1,2195		-0,229	-0,248	-0,230		0,75
1,3008		-0,258				0,8
1,3821		-0,288 ₅				0,85
1,4634		-0,320				0,9
1,5447		-0,353				0,95
1,6260	-0,388	-0,387	-0,441	-0,395	-0,386	1
1,7073		-0,422				1,05
1,7886		-0,459				1,1
1,8699		-0,496				1,15
1,9512		-0,534				1,2
2,0325		-0,573	-0,689	-0,612		1,25
2,1138		-0,613				1,3
2,1951		-0,654				1,35
2,2764		-0,695				1,4
2,3577		-0,737				1,45
2,4390		-0,780	-0,991	-0,921 ₅		1,5
2,5203		-0,824				1,55
2,6016		-0,868				1,6
2,6829		-0,913				1,65
2,7642		-0,958				1,7
2,8455		-1,004	-1,349	-1,414		1,75
2,9268		-1,050				1,8
3,0081		-1,097				1,85
3,0894		-1,145				1,9
3,1707		-1,193				1,95
3,2520	-1,246	-1,241	-1,762	-2,255	-1,236	2

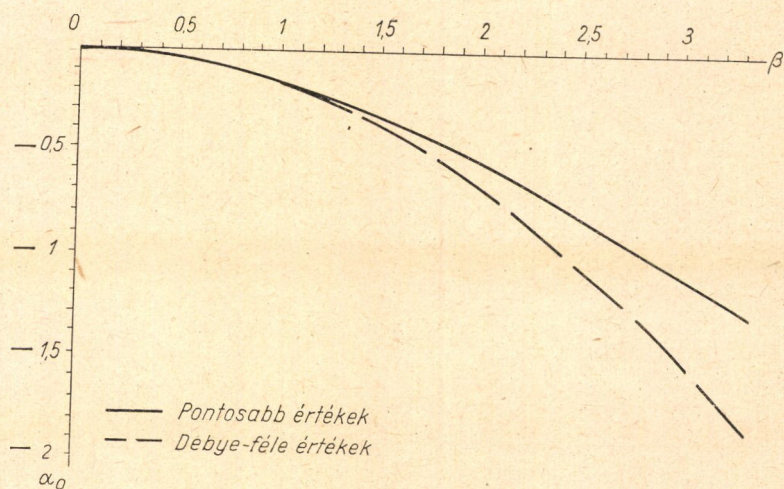
2. táblázat

Dipólusrotátor első gerjesztett állapotához tartozó sajátértékek

A feltüntetett télerősségek HCl^{35} molekulára vonatkoznak. α_1 a (14)-ből számított második legkisebb sajátérték, α_1^- ill. α_1^+ a hibabecsléssel nyert alsó, ill. felső behatárolás, α_1^{II} ill. α_1^{IV} a perturbációs számítás második (lásd: [4], IX. fejezet), illetve negyedik közelítése (lásd: [6]).

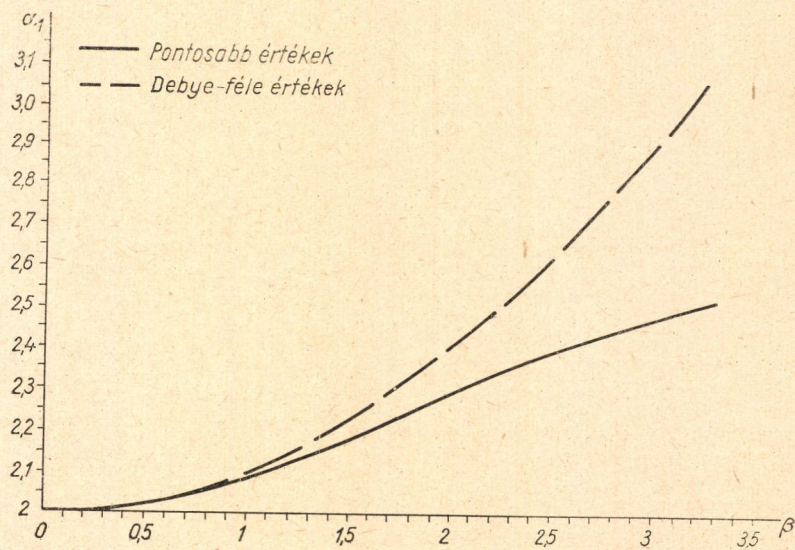
β	α_1^-	α_1	α_1^{II}	α_1^{IV}	α_1^+	E 10 ⁶ Volt/cm
0	2	2	2	2	2	0
0,0813		2,0010				0,05
0,1626		2,0030				0,1
0,2439		2,0063				0,15
0,3252		2,0108				0,2
0,4065		2,0166	2,0165	2,0163		0,25
0,4878		2,0236				0,3
0,5691		2,0317				0,35
0,6504		2,0409				0,4
0,7317		2,0511				0,45
0,8130	2,059	2,0623	2,0661	2,0621	2,065	0,5
0,8943		2,0743				0,55
0,9756		2,0871				0,6
1,0569		2,101				0,65
1,1382		2,115		-		0,7
1,2195		2,130	2,149	2,128		0,75
1,3008		2,145				0,8
1,3821		2,161				0,85
1,4634		2,177				0,9
1,5447		2,193				0,95
1,6260	2,207	2,210	2,264	2,200	2,212	1
1,7073		2,226 ₅				1,05
1,7886		2,243				1,1
1,8699		2,260				1,15
1,9512		2,277				1,2
2,0325		2,294	2,413	2,255		1,25
2,1138		2,311				1,3
2,1951		2,328				1,35
2,2764		2,344				1,4
2,3577		2,360 ₅				1,45
2,4390		2,376 ₅	2,595	2,268		1,5
2,5203		2,392				1,55
2,6016		2,408				1,6
2,6829		2,423				1,65
2,7642		2,437 ₅				1,7
2,8455		2,452	2,810	2,204		1,75
2,9268		2,466				1,8
3,0081		2,479				1,85
3,0894		2,492				1,9
3,1707		2,505				1,95
3,2520	2,515	2,517	3,058	2,024	2,519	2

DIPÓLUSROTÁTOR ALAPÁLLAPOTÁHOZ TARTOZÓ SAJÁTÉRTÉKEK



1. ábra

DIPÓLUSROTÁTOR ELSŐ GERJESZTETT ÁLLAPOTÁHOZ TARTOZÓ SAJÁTÉRTÉKEK



2. ábra

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАНТОВАННЫХ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ДИПОЛЬНОГО РОТАТОРА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Я. Богнар и Г. Фрейд

Резюме

Авторы излагают новый метод для численного решения некоторых задач о собственных значениях. Преимуществом этого метода является то, что он делает возможным оценку погрешности. Предлагаемый метод является по существу обобщением метода многочленов *Зоммерфельда*, сущность которого состоит в том, что в некоторых задачах о собственных значениях коэффициенты степенных рядов собственных функций, начиная с некоторого индекса, хотя и не обращаются в нуль, но сходятся «быстро» к нулю. Эта мысль впервые появилась у *А. Моренштейна* [1], но не нашла у него явного выражения. Точная формулировка и доказательство были даны *Г. Фрейдом* в работе [2]. Из рассуждений этой работы вытекает следующая теорема:

Степенные ряды всех решений вида

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu} x^{\nu}$$

дифференциального уравнения

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\sum_{k=0}^l p_k x^k \right) y = 0$$

сходятся в открытом интервале $(-1, +1)$, и существуют пределы

$$\varrho_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2\nu r_{2\nu}, \quad \varrho_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\nu + 1) r_{2\nu+1}$$

Решение ограничено на сегменте $[-1, +1]$ тогда и только тогда, если

$$\varrho_0 = \varrho_1 = 0.$$

Приведенная теорема была использована авторами для вычисления квантованных уровней энергии дипольного ротатора в электрическом поле, что является важным, например, при истолковании эффекта Старка ротационного спектра двухатомных дипольных молекул. Результаты вычислений совпадают с результатами, полученными *Х. К. Хюссом* [6] другим теоретическим методом и показывают, что результаты, полученные *Р. Кронигом* [3], *П. Дебаи* [4] и *Ф. Броувером* [5] методом возмущений, при больших — но экспериментально реализуемых — значениях напряженности поля, неудовлетворительны.

Отделяя переменные в уравнении Шредингера дипольного ротатора, написанного в полярных координатах, и ограничиваясь случаем, когда магнитное квантовое число равняется нулю, мы приходим к уравнению (7). Искомыми являются те собственные значения $\alpha = \alpha(\beta)$, для которых существуют ограниченных нетривиальных решений. Здесь

$$\alpha = \frac{2I\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{2mIE}{\hbar^2},$$

где

\mathcal{E} — энергия дипольного ротатора,
 I — момент инерции относительно прямой, перпендикулярной на ось диполя,
 m — электрический дипольный момент,
 E — напряженность электрического поля.

Пусть $f_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu}$ решение (7), соответствующее начальным значениям

$f_0(0) = 1, f'_0(0) = 0, f_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} x^{\nu}$ — решение, соответствующее начальным значе-

ниями $f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 1$, а $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} r_v x^v$ произвольное решение. Тогда при обозначениях (3) и (10) имеет место (11), так что, ввиду приведенной теоремы Г. Фрейда, условием существования ограниченного решения является выполнение определительного уравнения (12). Определитель Δ зависит от α и от β , так что из (12) можно определить квантованную энергию как функцию напряженности поля.

Пределы (10), фигурирующие в Δ можно заменить по Моренштейну членами с достаточно большими индексами соответствующих последовательностей. Ввиду (8) эти члены являются полиномами переменных α и β , и коэффициенты поддаются рекуррентному вычислению. Таким образом (12) становится алгебраическим уравнением для α . Этот прием не дает возможности для оценки погрешности. Поэтому авторы при помощи (8) численно вычисляли первые 101 члена последовательностей $\{v_e\}$ и $\{v_d\}$, при трех конкретных значениях β для различных значений параметра α и исходя из приведенного в (2) результата, дали оценку для пределов (10). (Оценки даются в приложении). Таким образом удалось точно ограничить пределы.

Как показывают вычисления, при помощи уравнения (14) уже можно определить два наименьших собственных значения с точностью до трех десятичных знаков, даже при таких больших напряженностях поля, для которых метод возмущений дает результат с 40% до 100% относительной погрешностью. Подробности полученных результатов приводятся в таблице. Следует заметить, что наибольшее отмеченное значение β соответствует при молекуле CsF 4000 вольт/см.

BERECHNUNG DER GEQUANTELTEN ENERGIEWERTE EINES IM ELEKTRISCHEN FELD ROTIERENDEN DIPOLS

J. BOGNÁR und G. FREUD

Zusammenfassung

Verfasser geben eine neue Methode für numerischen Lösung gewisser Eigenwertprobleme. Der Vorteil der Methode besteht darin, dass sie eine Fehlerabschätzung ermöglicht. Dem Wesen nach handelt sich um eine Verallgemeinerung der *Sommerfeldschen* Polynommethode. Es wird gezeigt, dass in dem behandelten Fall die Koeffizienten in der Potenzreihe der Eigenfunktion schnell gegen Null konvergieren, wenn sie auch nicht von einem gewissen Index angefangen identisch Null werden. Dieser Gedanke tritt zuerst bei A. Mohrenstein [1] auf. Die genaue Formulierung wurde von G. Freud [2] angegeben:

Satz: Jede Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) y'' + 2xy' + \left(\sum_{k=0}^l p_k x^k \right) y = 0$$

kann im Intervall $(-1, +1)$ in die Potenzreihe

$$y = \sum_{v=0}^{\infty} r_v x^v$$

entwickelt werden, wobei die Grenzwerte

$$\varrho_0 = \lim_{v \rightarrow \infty} 2v r_{2v}, \quad \varrho_1 = \lim_{v \rightarrow \infty} (2v + 1) r_{2v+1}$$

existieren. Die Lösung ist dann und nur dann in $[-1, +1]$ beschränkt, falls

$$\varrho_0 = \varrho_1 = 0$$

besteht.

Dieser Satz wurde zur Quantelung der Energieniveaus eines im elektrischen Felde rotierenden Dipols angewandt. Diese Frage ist besonders in der Deutung des Stark-Effektes der Rotationsterme polarer Moleküle interessant. Unsere Resultate sind mit den auf anderen Wegen erhaltenen, von *H. K. Hughes* [6] mitgeteilten Ergebnisse übereinstimmend. Es zeigt sich, dass die mit der Perturbationsrechnung erhaltenen Werte von *R. Kronig* [3], *P. Debye* [4] und *F. Brouwer* [5] für grössere (aber experimentell erreichbare) Feldstärken keine gute Näherung darstellen.

Es bezeichne

$$\alpha = \frac{2I\mathcal{E}}{\hbar^2}, \beta = \frac{2mIE}{\hbar^2},$$

wobei

\mathcal{E} die gequantelte Energie des rotierenden Dipols
 I den Trägheitsmoment um eine Achse senkrecht zur Dipolrichtung
 m das elektrische Dipolmoment
 E die Feldstärke des elektrischen Feldes
 bedeutet.

In P larkkoordinaten separiert, erhält man für $M = 0$ (M = magnetische Quantenzahl) Gleichung (7). Man berechnet die Koeffizienten der Partikularlösungen

$$f_0(x) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu} \quad \text{und} \quad f_1(x) = x + \sum_{\nu=2}^{\infty} d_{\nu} x^{\nu}.$$

Die Bedingung, dass eine in $[-1, +1]$ beschränkte Lösung der Differentialgleichung gäbe, führt zur Gleichung (12) [vgl. (3), (10) und (11)], die den gesuchten Zusammenhang zwischen Energie und Feldstärke darstellt. Zuerst wurden für einige Werte von α die Grenzwerte (10) mit Hilfe einer sorgfältigen Fehlerabschätzung möglichst genau berechnet, und in dieser Weise erhielten wir genaue zusammengehörige (α, β) -Werte. Danach wurde mit *Mohrenstein*-s Verfahren die angenäherte algebraische Gleichung (14) aufgestellt, die sich für die genau berechneten Werte bis zur dritten Stelle einschliesslich genau erwies. Es sei bemerkt, dass der grösste β -Wert der Tabelle bei dem Molekül *CsF* einer Feldstärke 4000 Volt/cm entspricht.

EGY HŐVEZETÉSI FELADATRÓL

SZILVAY GÉZÁNÉ és ZERGÉNYI ERZSÉBET

A Magyar Hidrológiai Társaság-tól kaptuk az alábbi feladatot, mely melegendő jégvétegen fellépő hőmérsékleteloszlásra vonatkozik.¹⁾
Megoldandó a

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

differentiálegyenlet a következő feltételek mellett :

$$(1) \quad \begin{cases} a) & u(0, x) = \frac{u_0}{L} x \\ b) & u(t, 0) = 0 \\ c) & u(t, L) = \begin{cases} u_0 - at, & \text{ha } t < u_0/a \\ 0, & \text{ha } t \geq u_0/a \end{cases} \quad (u_0/a > 0) \end{cases}$$

Állítsuk elő a megoldást két függvény összegeként :

$$u = u_1 + u_2,$$

ahol mind u_1 , mind u_2 megoldása a differentiálegyenletnek, ezenkívül u_1 -re vonatkozó kezdeti, illetve határfeltételek :

$$(2) \quad \begin{cases} a) & u_1(0, x) = \frac{u_0}{L} x, \\ b) & u_1(t, 0) = 0, \\ c) & u_1(t, L) = u_0; \end{cases}$$

¹⁾ Az eredmények értékelésére és azok hasznosítására a megbízó a »Vízéptés« c. folyóiratban még vissza kíván térni.

u_2 -re pedig

$$(3) \quad \begin{cases} a) \quad u_2(0, x) = 0 \\ b) \quad u_2(t, 0) = 0 \\ c) \quad u_2(t, L) = \begin{cases} -at, & \text{ha } t < \frac{u_0}{a} \\ -u_0, & \text{ha } t \geq \frac{u_0}{a} \end{cases} \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy $u = u_1 + u_2$ az (1) feltételnek eleget tesz. Az

$$u_1(x, t) = \frac{u_0}{L} x$$

függvény kielégíti (2)-t. u_2 -t a következő alakban keressük:

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau) d\tau.$$

Ez a kifejezés tetszés szerinti korlátos és integrálható $F(t)$ és $G(t)$ függvények mellett eleget tesz differenciálegyenletünknek, sőt a (3) alatti a) feltételnek is. Válasszuk meg $F(t)$ és $G(t)$ -t úgy, hogy $u_2(x, t)$ a (3) alatti b), c) határfeltételeket is kielégítse.

A feladatot Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg (lásd: [2]).
Ha

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(p)$$

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = g(p)$$

$$\mathcal{L}\{u_2(x, t)\} = \bar{u}_2(x, p),$$

akkor a konvolúciótétel alapján

$$(4) \quad \bar{u}_2(x, p) = f(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{x}{k} \sqrt{p}} + g(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{L-x}{k} \sqrt{p}}.$$

A határfeltételeket is transzformáljuk:

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{u}_2(0, p) = 0 & ((3) b)\text{-ből} \\ \bar{u}_2(L, p) = \frac{a}{p^2} \left(e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1 \right) & ((3) c)\text{-ből} \end{cases}$$

A (4) és (5) képletek felhasználásával a következő egyenletrendszerre jutunk :

$$f(p) + g(p) e^{-\frac{L}{k} \sqrt{p}} = 0$$

$$f(p) e^{-\frac{L}{k} \sqrt{p}} + g(p) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{a}{p^2} \left(e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1 \right).$$

Innen $f(p)$ és $g(p)$ meghatározható :

$$f(p) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{a}{p^2} \frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{p} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^{-\frac{L}{k} \sqrt{p}}}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}}$$

$$g(p) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{a}{p^2} \frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{p} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}}.$$

Az $\frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{p}$ függvény inverz Laplace-transzformáltja :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1}{p} \right\} = \varphi(t),$$

ahol

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & \text{ha } t < \frac{u_0}{a} \\ 0, & \text{ha } t \geq \frac{u_0}{a}. \end{cases}$$

Valamint

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}} \right\} = \Psi(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{e^{-\frac{L}{k} \sqrt{p}}}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}} \right\} = \Phi(t),$$

ahol

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n \frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{t}}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{t}} dt$$

Ugyanis

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{nL}{k}\right]^2 \frac{1}{t}} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\left[\frac{nL}{k}\right]^2 \frac{1}{t}} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p} n} = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2L}{k} \sqrt{p}}} \end{aligned} \right.$$

ha $\operatorname{Re} p > 0$. A szummálás és integrálás felcserélhetőségének bizonyításához felhasználjuk a fenti összeg Θ -függvényekkel kifejezett alakját.

A Θ -függvények általános definíciója (lásd: [1]):

$$\Theta_{\mu\nu}(v/z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi v\left(n + \frac{\mu}{2}\right) + i\pi z\left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 + i\pi n v}$$

Ez a sor abszolút és egyenletesen konvergens tetszőleges komplex μ , ν , v mellett, ha $\operatorname{Im} z > 0$.

Fontosabb speciális esetek:

$$\vartheta_0(v) = \Theta_{01}(v) \quad , \quad \vartheta_2(v) = \Theta_{10}(v) \quad , \quad \vartheta_3(v) = \Theta_{00}(v) \quad .$$

A ϑ -függvényekkel a következőképpen fejezhetők ki a Φ -ben és Ψ -ben fellépő sorok:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{L^2}{k^2} \cdot \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \vartheta_0(0|z) = \frac{i L^2}{\pi k^2} \frac{1}{t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{L^2}{k^2} \cdot \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \left[\vartheta_0(0|z) = \frac{i L^2}{\pi k^2} \frac{1}{t} + 1 \right] \end{aligned} \right.$$

A

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{z} \vartheta_3(0|z) = \frac{1+i}{2}$$

összefüggésből (lásd például: [3], p. 20.) leolvasható, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n \frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{t}}$$

az egész zárt $[0, \infty]$ félegyenesen korlátos.

Ennek következtében a (6) integrál $p > 0$ esetén konvergens és az integrálás tagonként végezhető el.

A konvolúció-tétel szerint:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f(p)\} &= F(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \Phi(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{\tau}} d\tau, \end{aligned}$$

és

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(p)\} = G(t) = -\frac{a}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n+\frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{\tau}} d\tau.$$

ahol

$$\delta = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } t < \frac{u_0}{a} \\ t - \frac{u_0}{a} & , \text{ ha } t \geq \frac{u_0}{a} \end{cases}.$$

Az itt szereplő sorokat numerikus számításra alkalmas alakra ϑ -függvények segítségével hozzuk:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \vartheta_2\left(0 \middle| z = \frac{i}{\pi} \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}\right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \left[\vartheta_0\left(0 \middle| z = \frac{i}{\pi} \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}\right) + 1 \right] \end{aligned}$$

Ezek a sorok nagy z , tehát kis t esetén jól konvergálnak, nagy t mellett a konvergenciát megjavíthatjuk a ϑ -sorokra vonatkozó transzformációs képletek felhasználásával (lásd például: [1]):

$$\vartheta_2(0|z) = \sqrt{\frac{i}{z}} \vartheta_0\left(0 \middle| -\frac{1}{z}\right).$$

$$\vartheta_3(0|z) = \sqrt{\frac{i}{z}} \vartheta_3\left(0 \middle| -\frac{1}{z}\right).$$

Innen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{z}} \vartheta_0\left(0 \middle| -\frac{1}{z} = i\pi \frac{k^2}{L^2} t\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi t} \frac{k}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} n^2 t} = \\ &= \sqrt{\pi t} \frac{k}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} n^2 t} \right]. \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{i}{t}} \vartheta_3\left(0 \middle| -\frac{1}{z} = i\pi \frac{k^2}{L^2} t\right) + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\pi t} \frac{k}{2L} + \sqrt{\pi t} \frac{k}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 \frac{k^2}{L^2} t}. \end{aligned}$$

A transzformáció által az eredeti

$$\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \text{ illetve } \sum q^{n^2}$$

alakú sorokból hasonlókat kaptunk, csak míg a transzformáció előtt

$$q = e^{-\frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}}$$

volt, addig most

$$q = e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} t}.$$

Így

$$e^{-\frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} < e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2}},$$

azaz $t < \frac{L^2}{k^2 \pi}$ esetén az eredeti sorokkal számolunk, ellenkező esetben a transzformálttal. q legnagyobb értékét tehát az

$$e^{-\frac{L^2}{k^2} \frac{1}{t}} = e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} t}, \text{ azaz } t = \frac{L^2}{k^2 \pi}$$

helyen veszi fel, ekkor $q = e^{-\pi} < 0,05$. A konvergencia most olyan jó, hogy a sorok számításánál elég a második tagig menni, a relatív hiba így is elég kicsi, hiszen az elhanyagolás

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} < \sum_{n=2}^{\infty} q^{n^2} < q^4 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{q^4}{1 - q^2},$$

és ez még a maximális $q = 0,05$ mellett is csak 10^{-5} nagyságrendű.

A fentiek felhasználásával a következő közelítő formulát nyerjük:

$$F(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\int_{\delta}^{\frac{L^2}{k^2 \pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(e^{-\frac{L^2}{4k^2} \frac{1}{\tau}} + e^{-\frac{9}{4} \frac{L^2}{k^2} \frac{1}{\tau}} \right) d\tau + \int_{\frac{L^2}{k^2 \pi}}^t \sqrt{\pi} \frac{k}{L} \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} \tau} \right) d\tau \right]$$

$$G(t) = -\frac{\alpha}{\pi} \left[\int_{\delta}^{\frac{L^2}{k^2 \pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 + e^{-\frac{L^2}{k^2} \frac{1}{\tau}} \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\frac{L^2}{k^2 \pi}}^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi \tau}}{2} \frac{k}{L} + \sqrt{\pi \tau} \frac{k}{L} e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} \tau} \right) d\tau \right].$$

(Ha $t \leq \frac{L^2}{k^2 \pi}$, akkor $F(t)$, illetve $G(t)$ az első integrandus δ -tól t -ig terjedő integráljával egyenlő; ha $\delta \geq \frac{L^2}{k^2 \pi}$, akkor a második integrandus integrálja 0-tól t -ig, csak $\delta < \frac{L^2}{k^2 \pi}$, $t > \frac{L^2}{k^2 \pi}$ esetén érvényesek a felírt képletek.)

Az analitikusan kiintegrálható tagok integrálását elvégezve, a többiek egyszerűbb alakra hozva, a

$$h(t) = \frac{e^{-t}}{t} + 2 \int_0^t e^{-t} dt ,$$

és az $u = \frac{L^2}{k^2 \pi}$ jelölés bevezetésével nyerjük:

$$F(t) = \frac{a}{\pi} \left[\frac{L}{k} \left\{ h\left(\frac{L}{2k\sqrt{u}}\right) - h\left(\frac{L}{2k\sqrt{\delta}}\right) \right\} + \frac{3L}{k} \left\{ h\left(\frac{3}{2} \frac{L}{k\sqrt{u}}\right) - h\left(\frac{3}{2} \frac{L}{k\sqrt{\delta}}\right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi k}}{L} \left[\frac{1}{2} (t - u) + \frac{e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} - e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} u}}{\pi^2 \frac{k^2}{L^2}} \right] \right] ,$$

$$G(t) = -\frac{a}{\pi} \left[2(\sqrt{u} - \sqrt{\delta}) + \frac{2L}{k} \left\{ h\left(\frac{L}{k\sqrt{u}}\right) - h\left(\frac{L}{k\sqrt{\delta}}\right) \right\} + \right. \\ \left. + (\sqrt{t} - \sqrt{u}) + \frac{\sqrt{\pi k}}{L} \left[\frac{1}{2} (t - u) - \frac{e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} - e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} u}}{\pi^2 \frac{k^2}{L^2}} \right] \right] ,$$

$F(t)$ és $G(t)$ ismeretében feladatunk megoldását felírhatjuk:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{L} x + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau) d\tau .$$

Az integrálokat a paraméterek speciális értékeire numerikus integrálással számítottuk.

Itt mondunk köszönetet Freud Gézá-nak segítségéért, melyet munkánkhoz nyújtott.

IRODALOM

- [1] A. HURWITZ—R. COURANT: *Funktionentheorie*. Springer, Berlin, 1929.
- [2] M. I. KONTOROVICS: *Operátorszámítás és stacionárius jelenségek elektrotechnikai alkalmazásai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [3] W. OBERHETTINGER—F. MAGNUS: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*. Springer, Berlin, 1949.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. Силван и Э. Зергени

Резюме

В настоящей работе дается решение следующей задачи теплопроводности :
Требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

удовлетворяющее условиям :

$$u(0, x) = \frac{u_0}{L} x$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, L) = \begin{cases} u_0 - at & \text{при } t < \frac{u_0}{a}, \\ 0 & \text{при } t \geq \frac{u_0}{a}. \end{cases} \quad \left(\frac{u_0}{a} > 0 \right)$$

Представим решение в виде суммы двух функций, каждая из которых является решением дифференциального уравнения и для которых справедливы соотношения :

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1(0, x) = \frac{u_0}{L} x \quad u_2(0, x) = 0$$

$$u_1(t, 0) = 0 \quad u_2(t, 0) = 0$$

$$u_1(t, L) = u_0 \quad u_2(t, L) = \begin{cases} -at & \text{при } t < \frac{u_0}{a} \\ -u_0 & \text{при } t \geq \frac{u_0}{a} \end{cases}$$

Из предположений, сделанных для u_1 вытекает, что

$$u_1(x, t) = \frac{u_0}{L} x$$

Представим $u_2(x, t)$ при помощи преобразования Лапласа в виде

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau) d\tau.$$

Преобразованные Лапласа u_2 и граничных условий для u_2 получаются при обо-
значениях

$$f(p) = \mathcal{L}\{F(t)\}, \quad g(p) = \mathcal{L}\{G(t)\} \quad \text{и} \quad \bar{u}_2(x, p) = \mathcal{L}\{u_2(x, t)\}$$

В ВИДЕ

$$u_2(x, p) = f(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{x}{k} \sqrt{p}} + g(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{L-x}{k} \sqrt{p}}$$

$$\bar{u}_2(0, p) = 0; \quad u_2(L, p) = \frac{a}{p^2} \left(e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1 \right)$$

Обратные преобразования Лапласа функций $f(p)$ и $g(p)$, определенных при помощи граничных условий, представляются разложением в ряд для функций ϑ .

Выражения, сообщенные для $F(t)$ и $G(t)$ имеют погрешности порядка не превышающего 10^{-5} .

ÜBER EIN WÄRMELEITUNGSPROBLEM

Frau G. SZILVAY und E. ZERGÉNYI

Zusammenfassung

Es wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

unter folgenden Bedingungen gelöst:

$$u(0, x) = \frac{u_0}{L} x$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, L) = \begin{cases} u_0 - at & \text{für } t < \frac{u_0}{a}, \\ 0 & \text{für } t \geq \frac{u_0}{a}. \end{cases} \quad \left(\frac{u_0}{a} > 0 \right)$$

Die Lösung wird als Summe zweier Funktionen dargestellt. Beide Summanden genügen der Differentialgleichung und erfüllen nach folgende Bedingungen:

$$u_0 = u_1 + u_2$$

$$u_1(0, x) = \frac{u_0}{L} x \quad u_2(0, x) = 0$$

$$u_1(t, 0) = 0 \quad u_2(t, 0) = 0$$

$$u_1(t, L) = u_0 \quad u_2(t, L) = \begin{cases} -at, & \text{für } t < \frac{u_0}{a} \\ -u_0, & \text{für } t \geq \frac{u_0}{a} \end{cases}$$

Aus den Ansätzen für u_1 wird sofort klar, dass

$$u_1(x, t) = \frac{u_0}{L} x$$

$u_2(x, t)$ wird mittels Laplace-Transformation in folgender Gestalt dargestellt:

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau) d\tau$$

$$+ \int_0^{\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau) d\tau$$

Die Laplace-Transformation für die Randbedingungen ist

$$\bar{u}_2(x, p) = f(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{x}{k} \sqrt{p}} + g(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{L-x}{k} \sqrt{p}}$$

$$\bar{u}_2(0, p) = 0; \quad \bar{u}_2(L, p) = \frac{a}{p^2} \left(e^{-p \frac{u_0}{a}} - 1 \right)$$

wobei

$$f(p) = \mathcal{L}\{F(t)\}; \quad g(p) = \mathcal{L}\{G(t)\}; \quad \bar{u}_2(x, p) = \mathcal{L}\{u_2(x, t)\}$$

Die inverse Laplace-Transformierte der durch die Randbedingungen bestimmten Funktionen $f(p)$ und $g(p)$ ist mittels der Reihenentwicklungen für die ϑ -Funktionen dargestellt.

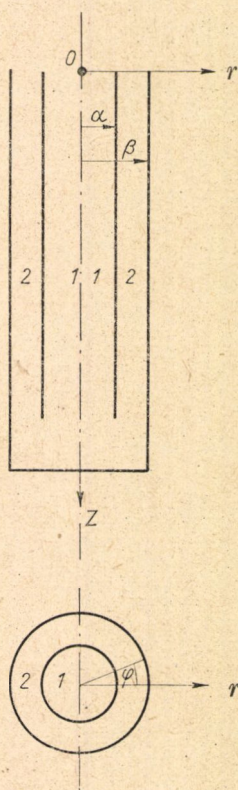
Die Grössenordnung der Fehler in dem Ausdruck von $F(t)$ und $G(t)$ wie die in der Arbeit dargestellt werden, beträgt höchstens 10^{-5} .

HŐMÉRSÉKLETELOSZLÁS SZÁMÍTÁSA KETTŐSCSÖVES HŐCSERÉLŐBEN

SZILVAY GÉZÁNÉ

Bevezetés

A kettőscsöves hőcserélő egy külső, alsó végén zárt és egy beléje helyezett kisebb átmérőjű, rövidebb, alsó végén nyitott hengeres csőből áll (lásd : [1]). A gáz felülről áramlik a belső csőbe, azután végigmegy a belső és külső cső közötti gyűrűs keresztmetszeten. A hőcserélő környezetének hőmérsék-



1. ábra

lete magasabb, mint a hőcserélőé, illetve a benne áramló gázé. Ezért a csőfalon keresztül hőcsere történik: a hőcserélő környezetéből hőmennyiséget vesz fel, mely az áramló gázt felmelegíti. A külső csőben áramló — most már felmelegedett — gáz melegíti a belső csövet, azaz bizonyos hőmennyiséget ad át a belső csőben áramló közegnek. Ha a hőmérsékleti viszonyokat tekintjük egy keresztmetszetben, a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a cső tengelyében, vagyis a keresztmetszet középpontjában lesz a hőmérséklet a legalacsonyabb, s sugár mentén haladva a cső külső fala irányában a hőmérséklet folytonosan emelkedik. Természetesen a hőcserélő zárt végén a belső és külső cső találkozásánál sem lehetséges hőmérsékleti ugrás: áramló közeg hőmérséklete a hőcserélőben folytonosan változik.

Feladatunk a hőmérsékleteloszlás meghatározása a hőcserélőben. Számításainkban a csőfalat végtelen vékonyrának tekintjük. A belső cső sugara a , a külső csőé β . A továbbiakban a belső csövet »1«, a külsőt »2« indexszel jelöljük.

A dolgozat első részében a feladat tetszőleges határfeltételhez illesztett általános megoldását adjuk, ha a gáz sebessége állandó. A második részben azt az egyszerűsített problémát tárgyaljuk, ha a hőmérséklet radiális irányú változása elhanyagolható.

1. §. Általános eset

A probléma megoldásánál a hővezetés differenciálegyenletét használjuk fel (lásd például: [2], II., Kap. XIV. § 1.):

$$(1) \quad a^2 \Delta u - v \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

ahol u a hőmérséklet, v az áramló közeg sebessége, a^2 a hővezetési tényező, t pedig az idő. Csak a stacionárius esetet vizsgáljuk, azaz a hőmérséklet a hőcserélő minden pontjában időben változatlan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Mivel a kettőscsőves hőcserélő hengerszimmetrikus, hengerkoordinátákra térünk át. A szimmetritásból következik, hogy eredményünk a polárszögtől független lesz:

$$u(x, y, z) = u(r, z).$$

Így az (1) egyenlet

$$(2) \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - v \operatorname{grad} u = 0$$

alakú lesz.

A koordináta-rendszer kezdőpontját a kettős cső nyitott végén képzetben keresztülfektetett sík és a szimmetriatengely metszéspontjában vesszük fel. A z -tengelyt függőlegesen lefelé, r -et pedig a z -tengelytől kifelé irányítjuk.

A gáz áramlását turbulensnek tekintjük. Így az áramlás sebessége (egy átmeneti rétegtől eltekintve) állandónak vehető és a közeg csőfal-menti viselkedését elhanyagoljuk. Esetünkben a sebesség a koordinátatengellyel párhuzamos, a külső és belső csőben egymástól eltérő állandó érték, jelöljük v_{z_1} -gyel illetve v_{z_2} -vel. Ezt felhasználva a (2) egyenletet külön írjuk fel a külső és belső csőre:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{v_{z_1}}{a^2} \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{v_{z_2}}{a^2} \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

A (3) parciális differenciálegyenlet-rendszert a következő határfeltételek mellett kell megoldanunk:

1°. A hőmennyiség a belső és külső cső közötti falon folytonosan menjen keresztül, azaz u_1 és u_2 függvények normális irányú (itt sugár irányú) deriváltjai az $r = a$ helyen megegyezzenek:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

2°. Bármely z értékre a külső és belső csőben uralkodó hőmérséklet különbsége arányos a normális irányú deriválttal:

$$u_2 - u_1 = k \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a},$$

ahol k a fal hőátbocsátási tényezője.

Azon a szakaszon, ahol a gáz a belső csőből a külső csőbe áramlik át, a hőmérsékleti viszonyok szabatos matematikai tárgyalása reménytelennek látszik. Numerikus számítások szerint azonban elegendőnek mutatkozik az a feltevés, hogy a cső végén $z = l$ -nél az 1. és 2. csőben áramló gáz között fennálló hőmérsékletkülönbség igen kicsi legyen. Ez könnyen megvalósítható feltétel.

A (3) egyenletek megoldását szorzat-alakban keressük:

$$(4) \quad \begin{aligned} u_1 &= R_1(r) Z_1(z) \\ u_2 &= R_2(r) Z_2(z). \end{aligned}$$

Behelyettesítve (3)-ba, és szétválasztva a változókat :

$$(5) \quad \begin{cases} R_1'' + \frac{1}{r} R_1' - \nu_1^2 R_1 = 0 \\ R_2'' + \frac{1}{r} R_2' - \nu_2^2 R_2 = 0 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} Z_1'' - \frac{v_{z_1}}{a^2} Z_1' + \nu_1^2 Z_1 = 0 \\ Z_2'' - \frac{v_{z_2}}{a^2} Z_2' + \nu_2^2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

ν_1 és ν_2 egyelőre még határozatlan állandó érték.

Az (5) egyenletek megoldásai a zérus-rendű Bessel-függvények :

$$R_1 = A_1 J_0(i\nu_1 r) + B_1 K_0(\nu_1 r), \text{ ha } 0 \leq r \leq a,$$

$$R_2 = A_2 J_0(i\nu_2 r) + B_2 K_0(\nu_2 r), \text{ ha } a \leq r \leq \beta.$$

$B_1 = 0$, mert $K_0(0) = \infty$, és ez fizikailag lehetetlen megoldást realizálna.

A (6) egyenleteket kielégítő függvényeket exponenciális alakban keressünk :

$$Z_1 = e^{\lambda_1 z}; \quad Z_2 = e^{\lambda_2 z}.$$

Behelyettesítve az egyenletekbe és figyelembevéve, hogy $v_{z_1} < 0$, tehát $v_{z_2} = -|v_{z_2}|$; a következő karakterisztikus egyenletekre jutunk :

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1^2 - \frac{v_{z_1}}{a_2} \lambda_1 + \nu_1^2 = 0 \\ \lambda_2^2 + \frac{|v_{z_2}|}{a^2} \lambda_2 + \nu_2^2 = 0. \end{cases}$$

A határfeltételeket kielégítő megoldást akkor találhatunk, ha $\lambda_1 = \lambda_2$. Mivel ν_1 -et és ν_2 -t szabadon választhatjuk, keresünk olyan értékpárt, melynél létezik a (7) egyenletek közös megoldása. Az algebrából ismeretes, hogy két egyenletnek akkor és csak akkor van közös gyöke, ha a rezultáns értéke zérus. Ebből a feltételből :

$$(8) \quad \left(\nu_2^2 \frac{v_{z_1}}{a^2} + \nu_1^2 \frac{|v_{z_2}|}{a^2} \right) \left(\frac{v_{z_1}}{a^2} + \frac{v_{z_2}}{a^2} \right) + (\nu_2^2 - \nu_1^2)^2 = 0$$

(8)-at kielégítő ν_1 és ν_2 választás esetén meghatározható az a közös λ_0 gyöke a (7) egyenleteknek, melyre

$$z_1 = z_2 = e^{i\omega z}.$$

A (2) egyenletrendszer megoldása tehát

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 = e^{i\omega z} A_1 J_0(i\nu_1 r) \\ u_2 = e^{i\omega z} [A_2 J_0(i\nu_2 r) + B_2 K_0(\nu_2 r)]. \end{cases}$$

Ehhez az eredményhez természetesen még tetszősszerinti konstans érték adható. Ennek segítségével a megoldásrendszer bármely megadott belépési hőfokhoz hozzáilleszthető.

A (9)-ben szereplő, még határozatlan állandókat a határfeltételek segítségével számítjuk ki. (9)-et 1°-be és 2°-be helyettesítve két darab három ismeretlent tartalmazó egyenletet nyerünk. Végigosztva például B_2 -vel és bevezetve az

$$\frac{A_1}{B_1} = A_3, \quad \frac{A_2}{B_2} = A_4$$

jelöléseket, kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melyből a keresett együtthatók $B_2 = 1$ választás mellett meghatározhatók.

A (9) egyenletből

$$(10) \quad \begin{cases} u_1(\lambda, r) \\ u_2(\lambda, r) \end{cases} = e^{i\omega z} U(\lambda, r),$$

ahol

$$U(\lambda, r) = \begin{cases} A_3 J_0(i\nu_1 r), & \text{ha } 0 \leq r \leq \alpha \\ A_4 J_0(i\nu_2 r) + K_0(\nu_2 r), & \text{ha } 0 \leq r \leq \beta. \end{cases}$$

Gyakorlatban a hőcserélő külső falán is adott valamilyen $u_3(z)$ hőmérséklet-eloszlást, mely csak hosszirányban változik, de a rögzített $r = \beta$ és z értékre a külső cső körül köröskörül ugyanakkora. Ezen kívül a külső csőfalra is fennáll a 2°-höz hasonló kikötés, azaz

$$(11) \quad u_3 - u_2 = k^* \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=\beta}$$

ahol k^* a külső csőfal hőátbocsátási tényezője. Ezt a kikötést (10) általában nem teljesíti. Azonban differenciálegyenletünk lineáris, tehát a (11) feltételt kielégítő megoldást (10) alakú függvények lineáris szuperpozíciójaként kereshetjük:

$$(12) \quad u = \int h(\lambda) e^{i\omega z} U(\lambda, r) d\lambda.$$

A külső hőmérsékleteloszlás (11) miatt kielégíti az

$$u_3(z) = U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)$$

egyenlőséget. (12)-t behelyettesítve :

$$(13) \quad u_3(z) = \int h(\lambda) [U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)] e^{\lambda z} d\lambda.$$

Másrészt az adott $u_3(z)$ -t előállítjuk Laplace-transzformált alakjában :

$$(14) \quad u_3(z) = \int f(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda.$$

A (13) és (14) egyenletek baloldalainak azonosságából $f(\lambda)$ kiszámítása után

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)}.$$

A határfeltételeket kielégítő, az adott külső hőmérsékleteloszláshoz illeszkedő megoldás tehát :

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)} e^{\lambda z} U(\lambda, r) d\lambda.$$

2. §. A radiális irányban állandó hőmérséklet esete

Itt feltételezzük, hogy a hőmérséklet a hőcserélőben radiális irányban állandó, azaz

$$u = u(z).$$

Az áramló gáz fajhője C és a teljes keresztmetszeten másodpercenként átáramló gázmennyiség G .

A belső cső dz vastagságú hengerében a hőmérsékletváltozás

$$\left(u_1 + \frac{du_1}{dz} dz \right) - u_1 = \frac{du_1}{dz} dz.$$

A hőmennyiségváltozás

$$CG \frac{du_1}{dz} dz.$$

Ez a hőmennyiség tart egyensúlyt a csőfalon át belépő hővel. Az elemi hengerpalást felszíne $2\pi a dz$, ezen át belépő hőmennyiség $k2\pi a (u_2 - u_1) dz$. Tehát

$$(15) \quad CG \frac{du_1}{dz} dz = 2\pi a k (u_2 - u_1) dz.$$

A külső csőben a hőmennyiségváltozás két részből áll. Egyik része — a belső csőhöz hasonlóan — a konvekcióból eredő hőmennyiségváltozás,

$$-CG \frac{du_2}{dz} dz,$$

másik része pedig a belső csőnek átadott hő,

$$2\pi ak(u_2 - u_1) dz;$$

ezek összege a környezettől felvett

$$2\pi\beta k^*(u_3 - u_2) dz$$

hőmennyiséggel egyenlő. Egyenletünk tehát :

$$(16) \quad -CG \frac{du_2}{dz} dz + 2\pi ak(u_2 - u_1) dz = 2\pi\beta k^*(u_3 - u_2) dz.$$

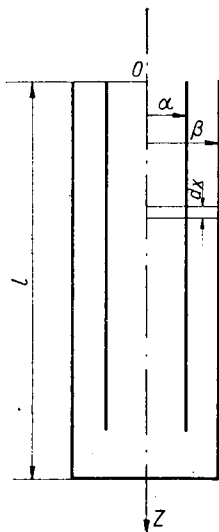
A (15) és (16) egyenletekből álló rendszerhez két kezdeti feltétel csatlakozik :

3°. A külső és belső cső hőmérséklete a cső lezárt végén megegyezik :

$$u_1(l) = u_2(l).$$

4°. A kilépő gáz hőfoka azonos a környezet hőmérsékletével :

$$u_2(0) = u_3(0).$$



2. ábra

Végeredményben tehát megoldandó a

$$(17) \quad \begin{cases} CG \frac{du_1}{dz} = 2\pi ak(u_2 - u_1) \\ CG \frac{du_2}{dz} = 2\pi ak(u_2 - u_1) - 2\pi\beta k^*(u_3 - u_2) \end{cases}$$

egyenletrendszer a 3°. és 4°. feltételek mellett. (17)-ben végigosztva CG -vel és bevezetve a

$$A = \frac{2\pi ka}{CG}; \quad B = \frac{2\pi k^*\beta}{CG}$$

jelöléseket, nyerjük a

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= -Au_1 + Au_2 \\ \frac{du_2}{dz} &= -Au_1 + (A+B)u_2 - Bu_3 \end{aligned}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Ennek általános megoldása :

$$(18) \quad \begin{cases} u_1(z) = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4AB}} \int_0^z u_3(\zeta) e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta \cdot [-(A + \lambda_1) e^{\lambda_1 z} + A e^{\lambda_2 z}] + \\ \quad + g_1 A e^{\lambda_1 z} + g_2 A e^{\lambda_2 z}, \\ u_2(z) = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4AB}} \int_0^z u_3(\zeta) e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta \cdot \left[-\frac{(A + \lambda_1)^2}{A} e^{\lambda_1 z} + (A + \lambda_2) e^{\lambda_2 z} \right] + \\ \quad + g_1 (A + \lambda_1) e^{\lambda_1 z} + g_2 (A + \lambda_2) e^{\lambda_2 z}, \end{cases}$$

ahol λ_1 és λ_2 a homogén rendszer

$$\begin{vmatrix} \lambda + A & -A \\ A & \lambda - (A + B) \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei. A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást (18)-nak a kezdeti feltételekbe való behelyettesítésével g_1 -et és g_2 -t kiszámítva nyerjük.

Végül itt kell köszönetet mondanom *Freud Gézá*-nak a munkámhoz nyújtott segítségéért.

IRODALOM

- [1] A. G. KASZATKIN: *Alapműveletek, gépek és készülékek a vegyiparban*. Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó, V., Budapest, 1953.
- [2] PH. FRANK—R. VON MISES: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛООБМЕННИКЕ С ДВОЙНОЙ ТРУБКОЙ

Г. Силваи

Резюме

В настоящей работе определяется распределение температуры в теплообменнике с двойной трубкой при постоянстве скорости газового потока.

В первой части работы автор приводит общее решение, распространяющееся на случай любого распределения наружной и любой входной температуры. Дается решение методом Фурье уравнения

$$\alpha^2 \Delta u - v \operatorname{grad} u = 0$$

установившейся переносной теплопроводности, отдельно для наружной и для внутренней трубок теплообменника. Распределение во внутренней трубке u_1 , а в наружной u_2 . Граничные условия следующие:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=\sigma} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=\alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=\alpha}$$

и

$$u_2 - u_1 = k \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=\alpha}.$$

Частное решение, удовлетворяющее граничным условиям имеет вид

$$u_1 = e^{\lambda_0 z} A_1 J_0(i v_1 r)$$

$$u_2 = e^{\lambda_0 z} [A_2 J_0(i v_2 r) + B_2 K_0(v_2 r)],$$

где K_0 модифицированная функция Бесселя, а λ_0 общий корень характеристических уравнений

$$\lambda_1^2 - \frac{v_{z1}}{\alpha^2} \lambda_1 + v_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + \frac{|v_{z2}|}{\alpha^2} \lambda_2 + v_2^2 = 0.$$

Возможные значения для v_1 и v_2 получаются из условия равенности нулю равнодействующей характеристических уравнений. Значения постоянных можно вычислять из граничных условий. Решение, приспособленное к произвольному данному распределению $u_3(z)$ температуры среды, окружающей теплообменник, дается формулой

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)} e^{\lambda z} U(\lambda, r) d\lambda,$$

где $f(\lambda)$ можно вычислить из уравнения

$$u_3(z) = \int f(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda,$$

и

$$U(\lambda, r) = \begin{cases} A_3 J_0(i v_1 r) & \text{если } 0 \leq r \leq \alpha \\ A_4 J_0(i v_2 r) + K_0(v_2 r) & \text{если } \alpha \leq r \leq \beta. \end{cases}$$

Во второй части работы рассматривается случай, когда температура газового потока в радиальном направлении не изменяется

$$u = u(z)$$

Для решения этой задачи необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение дается формулой (18).

BERECHNUNG DER TEMPERATURVERTEILUNG IM DOPPEL- ROHRWÄRMEAUSTAUSCHER

Frau G. SZILVAY

Zusammenfassung

Es wird die Temperaturverteilung in einem Doppelrohrwärmeaustauscher bestimmt unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit des strömenden Gases konstant ist. Im ersten Teil wird die Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$a^2 \Delta u - v \operatorname{grad} u = 0$$

durch die Fouriersche Methode unter folgenden Randbedingungen gelöst: Es sei u_2 die Verteilung der Temperatur im äusseren Rohr, u_1 diejenige im inneren Rohr, dann gilt

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}$$

und

$$u_2 - u_1 = k \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}$$

Eine partikuläre Lösung, die diesen Randbedingungen genügt, ist folgende:

$$u_1 = e^{\lambda_1 z} A_1 J_0(i v_1 r)$$

$$u_2 = e^{\lambda_2 z} [A_2 J_0(i v_2 r) + B_2 K_0(v_2 r)]$$

wo K_0 die modifizierte Besselsche Funktion und λ_0 die gemeinsame Wurzel der charakteristischen Gleichungen

$$\lambda_1^2 - \frac{v_{z1}}{a^2} \lambda_1 + v_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + \frac{|v_{z2}|}{a^2} \lambda_2 + v_2^2 = 0$$

darstellt, wobei sich die möglichen Werte, von v_1 und v_2 aus den Nullstellen der Resultanten der charakteristischen Gleichungen ergeben. Die Konstanten können aus den Randbedingungen berechnet werden. Ist $u_3(z)$ die gegebene Temperaturverteilung in der Umgebung des Wärmeaustausches, so ist die dieser Temperaturverteilung angepasste Lösung der Wärmeleitungsgleichung,

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U_r(\lambda, \beta)} e^{\lambda z} u(\lambda, r) d\lambda$$

wobei $f(\lambda)$ aus der Gleichung

$$u_3(z) = \int f(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda$$

bestimmt werden kann, während

$$U(\lambda, r) = \begin{cases} A_3 J_0(i v_1 r), & \text{wenn } 0 \leq r \leq a \\ A_4 J_0(i v_2 r) + K_0(v_2 r), & \text{wenn } a \leq r \leq \beta \end{cases}$$

st.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Fall behandelt, dass sich die Temperatur des strömenden Gases in radialer Richtung nicht ändert, also

$$u = u(z)$$

ist. Zur Lösung dieser Aufgabe braucht ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gelöst zu werden. Die Lösung wird durch die Formel (18) gegeben.

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET OSZTÁLYAINAK SZEMINÁRIUMAIBAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

Mechanikai és szilárdságtani osztály

Egerváry Jenő: Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában. (1954. április 9.)

Lásd a jelen kötet 31. oldalán található dolgozatot.

Egerváry Jenő: Vierendeel-tartók tárgyalása matrix-számítás alkalmazásával. (1954. szeptember 30.)

Az előadó ismertette a győri Wilhelm Pieck Gyár megbízásából a vagonfalakban ébredő feszültségek meghatározására vonatkozó számításokat. A legcélszerűbb módszernek az Ostenfeld-féle eljárást ajánlotta. A lineáris egyenletrendszer közelítő megoldása helyett azonban a matrix-számítás segítségével a pontos megoldás is megszerkeszthető.

Lovass-Nagy Viktor: A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására. (1954. december.)

Az előadó bemutatta Egerváry Jenő által a lánchidak számítására kidolgozott, matrix-elméleten alapuló újabb eljárást alapelveit.

Lásd *Egerváry Jenő*-nek jelen kötet 9. oldalán található dolgozatát.

Valószínűségszámítási és Matematikai-statisztikai osztályok

Arató Máttyás: P. Halmos: »Measure theory« c. könyve III. fejezetének ismertetése. (1954. január 7.)

Székely Gábor: Riesz M.: »Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue« [Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952) 298—308] c. dolgozatának ismertetése. (1954. január 14.)

Arnóth Edit: Riesz F.: »A monoton függvények differenciálhatóságáról« [Matematikai és Fizikai Lapok 38 (1931) 125—132] c. dolgozatának ismertetése. (1954. január 21.)

Lipták Tamás: P. Halmos: »Measure theory« c. könyve IV. fejezetének ismertetése. (1954. január 28.)

Takács Lajos: F. G. Foster: »On the stochastic matrices associated with certain queueing process« [Annals of Mathematical Statistics 24 (1953) 355—360] c. dolgozatának ismertetése. (1954. február 1.)

Arnóth Edit: S. T. Okamoto: »A non-parametric test« [Osaka Mathematical Journal] c. dolgozatának ismertetése. (1954. február 1.)

Arató Máttyás: P. Л. Добрушин: »Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний« [Математический Сборник 33 (1953) 567—598] c. dolgozatának ismertetése. (1954. február 1.)

Takács Lajos: P. Halmos: »Measure theory« c. könyve V. fejezetének ismertetése. (1954. február 4.)

Székely Gábor: H. Wold: »Sur les processus stationnaires ponctuels« [Colloques International du C.N.R.S. (1948)] c. dolgozatának ismertetése. (1954. február 11.)

Juvancz Iréneusz—Takács Lajos: Egy meteorológiai probléma megoldása. (1954. február 11.)

Rényi Alfréd: A. Я. Хинчин: «Понятие энтропии в теории вероятностей» [Успехи Математических Наук 8 (1953) 3—21] c. dolgozatának ismertetése. (1954. február 15.)

Takács Lajos: P. Halmos: «Measure theory» c. könyve V. fejezetének ismertetése (folytatás) (1954. február 18.).

Prékopa András: J. L. Doob: «Stochastic processes» c. könyvében található két tétel ismertetése, melyek a sztochasztikus matrixokra vonatkoznak. (1954. február 22.)

Rényi Alfréd: P. Halmos: «Measure theory» c. könyve VI—VIII. fejezetének ismertetése. (1954. február 25.)

Palásti Ilona: Ю. В. Прохоров: «Асимптотическое поведение биномиального распределения» [Успехи Математических Наук 8 (1953) 135—142] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 1.)

Rényi Alfréd: Н. Н. Воробев: «Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах» [Математический Сборник 34 (1954) 89—126] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 1.)

Rényi Alfréd: H. Steinhaus: «Table of the shuffled fourdigit numbers [Rozprawy Matematyczne, Warszawa, 1954] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 4.)

Medgyessy Pál: H. Pollard: «Distribution functions containing a Gaussian factor» [Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1953) 578—584] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 4.)

Rényi Alfréd: P. Halmos: «Measure theory» c. könyve IX. fejezetének ismertetése. (1954. március 8.)

Székelly Gábor: R. Fortet: «Probabilité de perte d'un appel téléphonique» [Colloques International du C. N. R. S. (1948)] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 11.)

Arató Mátyás: P. Л. Добрушин: «Предельные теоремы для цепи маркова из двух состояний» [Известия Академии Наук СССР, Сер. Матем. 17 (1953) 291—330] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 11.)

Juvancz Iréneusz—Lipták Tamás: Az illeszkedésvizsgálattal kapcsolatos szintmegállapítás problémájáról. (1954. március 11.)

Rényi Alfréd: Egy orvosi probléma valószínűségszámítási tárgyalása. (1954. március 18.)

Lipták Tamás: A. Н. Колмогоров: «Несмещенные оценки» [Известия Академии Наук СССР, Сер. Матем. 14 (1950) 303—326] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 18., március 25., április 1. április 5.)

Rényi Alfréd: A. N. Kolmogorov: «Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása» [Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950, 377—386] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 22.)

Sarkadi Károly: H. Steinhaus: «Podstawy Kontroli Statystycznej» [Zastosowania Matematiki I. kötet (1954) 1. füzet 4—28] c. dolgozatának ismertetése. (1954. március 25.)

Prékopa András: F. G. Foster—I. J. Good: «On a generalization of Pólya's random-walk theorem.» [The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 2. series 4 (1953) 120—126] c. dolgozatának ismertetése. (1954. április 1.)

Takács Lajos: Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos folyamatok és azok fizikai alkalmazásai. (A szerző készülő kandidátusi disszertációjának ismertetése.) (1954. április 12.)

Sarkadi Károly: Mozgonyok várakozási problémájáról. (1954. április 15.)

Lásd a szerző «Mozgonyok várakozási idejéről» c., jelen kötet 191. oldalán található dolgozatát.

Arató Mátyás: A műkorund-örlés problémájáról. (1954. április 15.)

Székelly Gábor: Egy telefon-problémáról. (1954. április 15.)

Medgyessy Pál: Valószínűség-elosztásfüggvények keverékének felbontása összetevőire. (A szerző kandidátusi disszertációjának ismertetése.) (1954. május 6. és május 10., május 13.)

Zierrmann Margit: A. Kolmogoroff: «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung» [Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 2. kötet, 3. füzet, Springer, Berlin, (1933).] c. könyvének ismertetése. (1954. május 20., május 27.)

Rényi Alfréd: Beszámoló az 1954. évi Nemzetközi Amsterdami Matematikai Kongresszusról. (1954. október 4.)

Medgyessy Pál: J. L. Doob: »Stochastic processes« c. könyve I. fejezetének ismertetése. (1954. október 11.)

Rényi Alfréd: H. Steinhaus egy problémájáról. (1954. október 11.)

Lásd Balogh T.—Rényi A. »A nagy számok erős törvényéről« c. dolgozatot (sajtó alatt).

Székelly Gábor: E. Vault: »L'extension de la formule d'Erlang« [Annales des Telecommunications (1953)] c. dolgozatának ismertetése. (1954. október 14.)

Prékopa András: P. Л. Добрушин: »Условия регулярности марковских процессов с конечным числом возможных состояний« [Математический Сборник 34 (1954) 541—556] c. dolgozatának ismertetése. (1954. október 14.)

Rényi Alfréd: Beszámoló a Berliini Matematikai Kongresszusról. (1954. október 25.)

Takács Lajos: D. A. Darling-Siebert: »The first passage problem for a continuous Markov process« [Annals of Mathematical Statistics 24 (1953) 624—640] c. cikkének ismertetése. (1954. október 28.)

Vincze István: G. Elfving: »Optimum allocation in linear regression theory« [Annals of Mathematical Statistics 23 (1952) 255—263] c. dolgozatának ismertetése. (1954. október 28.)

Rényi Alfréd: A nagy számok erős törvényéről. (1954. október 28.)

Lásd Balogh—T.—Rényi A. hasonló című dolgozatát (sajtó alatt.).

Prékopa András: J. L. Doob: »Stochastic processes« c. könyve II. fejezetének ismertetése. (1954. november 1.)

Sarkadi Károly: Graf—Wartmann: »Die Extremwertkarte bei der laufenden Fabrikationskontrolle« [Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik 6 (1954) 121—139] c. dolgozatának ismertetése. (1954. november 4.)

Medgyessy Pál: C. V. Charlier: »Applications de la théorie des probabilités à l'astronomie« c. könyvből a Hermite-függvényekre vonatkozó becslések ismertetése. (1954. november 4.)

Arató Máttyás: W. Eberl: »Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen« [Monatshefte für Mathematik 58 (1954) 137—142] c. dolgozatának ismertetése és eredményeinek általánosítása. (1954. november 4.)

Az előadó a cikk eredményein túlmenően megmutatja, hogy a számegyenes nem-negatív egész helyein bolyongó részecske 1 valószínűséggel előbb vagy utóbb eléri a $z = 0$ pontban levő elnyelő falat, ha $p_1 \leq p_2$ (ahol p_1 annak a valószínűsége, hogy a részecske 1 egységgel jobbra mozog, ha előzőleg is jobbra mozdult, p_2 annak a valószínűsége, hogy balra mozog 1 egységgel, ha előzőleg is balra mozdult). A cikk jelöléseit alkalmazva

$$\lambda_1(1) = 1, \lambda_2(1) = \frac{p_1}{p_2}, \text{ ha } p_1 \geq p_2;$$

$$\lambda_1(1) = \frac{p_2}{p_1}, \lambda_2(1) = 1, \text{ ha } p_1 \leq p_2.$$

Másrészt egyszerű számolással belátható, hogy

$$\lambda_2(s) < 1 \text{ és } \lambda_1(s) > 1 \quad (s < 1).$$

Mivel

$$A_z = C_1 \lambda_1^z + C_2 \lambda_2^z$$

$$B_z = \frac{1}{q_1 s} [C_1 \lambda_1 (1 - p_1 s \lambda_1) \lambda_1^z + C_2 \lambda_2 (1 - p_1 s \lambda_2) \lambda_2^z]$$

korlátosak, ha $k \rightarrow \infty$ (a k pontban elnyelő hely van), kell, hogy $C_1 \equiv 0$ legyen. C_1 és C_2 eredetileg az

$$A_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = 0$$

$$B_0 = C_1 \frac{\lambda_1 (1 - p_1 s \lambda_1)}{q_1 s} + C_2 \frac{\lambda_2 (1 - p_1 s \lambda_2)}{q_1 s} = 1$$

egyenletekből határozhatók meg. Esetünkben tehát

$$C_2 = \frac{q_1 s}{\lambda_2 (1 - p_1 s \lambda_2)}$$

és így

$$A_z(s) = \lambda_2 \frac{q_1 s}{(1 - p_1 s \lambda_2)} \lambda_2^z(s)$$

$$B_z(s) = \lambda_2^z(s).$$

Innen egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$A_z(1) = \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^z, \quad B_z(1) = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^z, \quad \text{ha } p_1 \geq p_2$$

és

$$A_z(1) = B_z(1) = 1, \quad \text{ha } p_1 \leq p_2,$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Rényi Alfréd: K. L. Chung: »On a stochastic approximation method« [Annals of Mathematical Statistics 25 (1954) 463—484] c. dolgozatának ismertetése. (1954. november 8.)

Balogh Tibor: Egy tétel a nagy számok erős törvényéről. (1954. november 8.)
Lásd Balogh T.—Rényi A.: »A nagy számok erős törvényéről« c. dolgozatát (sajtó alatt).

Medgyessy Pál: Tettamanti Károly egy kémiai problémájáról. (1954. november 15.)
Lásd Medgyessy P.—Rényi A.—Tettamanti K.—Vince I.: »A kémiai frakcionális megosztás matematikai tárgyalása nem-teljes diffúzió esetében« c., jelen kötet oldalán megjelent dolgozatot.

Rényi Alfréd: Megjegyzés a központi határeloszlástételekkel kapcsolatban. (1954. november 15.)

Lásd Rényi A.: »Valószínűségszámítás« c. tankönyv (Tankönyvkiadó, 1954) 534. oldalát.

Zergényi Erzsébet: Egy mezőgazdasági problémával kapcsolatos kombinatorikai feladatról. (1954. november 18.)

Lásd Rényi A.—Zergényi E. hasonló című dolgozatát a Matematikai Lapokban (sajtó alatt).

Prékopa András: S. Bochner: »Limit theorems for homogeneous stochastic processes« [Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 40 (1954) 699—704] c. dolgozatának ismertetése. (1954. november 18.)

Sarkadi Károly: Megjegyzés a negatív korrelációról. (1954. november 18.)

I. Az előadó az alábbi példát adja arra, hogy végtelen sok valószínűségi változó egymással páronként negatív korrelációban lehet. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ korrelálatlan, egységnyi szórású valószínűségi változók. Legyen

$$\eta_n = n \xi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k.$$

Ha $m > n$, úgy η_n és η_m kovarianciája $-n$, így tehát a korreláció bármely két η_k változó között negatív.

II. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n valószínűségi változó,

$$M(\xi_k) = 0, \quad M(\xi_k^2) = 1;$$

akkor

$$a = \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} M(\xi_i \xi_j) \geq -\frac{1}{n-1}.$$

Ugyanis

$$M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M(\xi_i \xi_j) \leq n + n(n-1)a$$

és így valóban

$$a \leq -\frac{1}{n-1}$$

Rényi Alfréd: Tettamanti Károly egy kémiai problémájáról. (1954. november 29.)
Lásd Medgyessy P.—Rényi A.—Tettamanti K.—Vincze I. dolgozatát a jelen kötet 81. oldalán.

Jerzy Los (Lengyelország): 1. Lengyel eredmények a Boole-algebra valószínűség-számítási alkalmazásaira vonatkozólag. 2. Mértékelméleti eredmények Rényi Alfréd: »A valószínűség-számítás új axiomatikus felépítése« [A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei 4 (1954) 369—428] c. dolgozatával kapcsolatban. (1954. november 29.)

Békéssy András: Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűség-eloszlásáról (1954. december 6.)

Lásd a jelen kötet 171. oldalán megjelent azonos című dolgozatot.

Székely Gábor: A szerves Si vegyületek gyökserés kémiai reakcióinak tárgyalása valószínűség-számítási módszerekkel. (1954. december 9. és december 16.)

Lásd a jelen kötet 99. oldalán megjelent hasonló című dolgozatot.

Sarkadi Károly: O. Сарманов: »О функциональных моментах симметричной корреляции« [Доклады Академии Наук СССР 84 (1952) 887—890] c. cikk ismertetése. (1954. december 16.)

Sarkadi Károly: O. Сарманов: »О функциональных моментах несимметрической корреляции« [Доклады Академии Наук СССР 84 (1952) 1139—1142] c. cikk ismertetése. (1954. december 16.)

Sarkadi Károly: »A Poisson-eloszlás paraméterének Bayes-féle valószínűségi határaitra vonatkozó dualitási elv.« (1954. december 20.)

Az előadó a jelen Közlemények II. kötetében »A selejtarány Bayes-féle valószínűségi határaitra vonatkozó dualitási elvről« c. cikkét egészítette ki. A cikk 5. pontjában szerepel a

$$P(\lambda < l | x = k) = P(x \geq k + 1, \lambda = l)$$

képlet, ahol λ minden meghatározott értékére x eloszlása λ várható értékű Poisson-eloszlás, λ a priori eloszlása egyenletes. A cikkben a bizonyítás határátmenettel történik. A cikk többi pontjaiban található bizonyításokhoz hasonló közvetlen, modellek segítségével való bizonyítás, sőt egyáltalában a fenti képlet közvetlen értelmezése csak a valószínűség-számítás Rényi Alfréd-től származó új axiomatikus elmélete keretében lehetséges, feltételes valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók segítségével. (Lásd: Rényi A.: A valószínűség-számítás új axiomatikus felépítése [A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei 4 (1954) 369—427]). Az előadó erre vonatkozó elgondolásait ismertetette.

Lipták Tamás: A. Wald: »Note on the consistency of the maximum likelihood estimates« [Annals of Mathematical Statistics 20 (1949) 595—601] c. cikkének ismertetése. (1954. december 20.)

Rényi Alfréd: B. V. Gnedenko—A. N. Kolmogorov: »Limit distributions for sums of independent random variables« [Addison—Wesley, Cambridge, Mass., 1954] c. könyvnek (az 1949-ből származó orosz eredeti angol kiadásának) ismertetése. (1954. december 20.)

Takács Lajos: D. A. Darling: »On a class of problems related to the random division of an interval« [Annals of Mathematical Statistics 24 (1953) 239—253] c. dolgozatának ismertetése. (1954. december 23.)

Takács Lajos: A. Ramakrishnan: »Stochastic processes associated with random division of a line« [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49 (1953) 473—485] c. dolgozatának ismertetése. (1954. december 23.)

Sarkadi Károly: A nem centrális t-ről. Ismertetés. (1954. december 23.)

Czipszer János: Szkin-effektus ferromágneses féltérben. (1954. május.)

Az előadó a mágneses tér tömör vasba való behatolásával foglalkozott. A probléma többek között turbógenerátorok vasvesztéséének számításánál jelentkezik. Az előadó F. és G. Haberland: »Das Wechselfeld im massiven gesättigten Eisen« c. cikkét (Archiv für Elektrotechnik 1935) és Г. Нейман: »Поверхностный эффект ферромагнитных тел« c. munkáit ismertette; a különböző módszerek által szolgáltatott eredményeket speciális esetben összehasonlította. Az összehasonlítás eredményeként az adódott, hogy a Nyejman módszerével számított veszteség gyakorlatilag teljesen kielégítő pontosságú, míg az impedancia fázisszögében erős eltérés mutatkozik.

Pál Sándor: Egyrétegű tekercs szkin-effektusáról. (1954. augusztus.)

Az előadó egyrétegű tekercsek szkin-effektusának vizsgálatában elért eredményeit ismertette. A tekercs egyes meneteit egyenesnek tekintette. A probléma két részből áll. Először megszerkesztette a vektorpotenciál kifejezését, mely a helynek periódikus függvénye. Ennek segítségével a problémát matematikai szempontból egyetlen körtartományra értelmezett másodfajú, Fredholm-típusú, inhomogén integrálegyenletre vezette vissza. A probléma második része az integrálegyenlet megoldása. Az előadó rámutatott az egyes integrálegyenletek numerikus megoldásánál szokásos módszerek nehézségeire és egy iterációs megoldási módszert javasolt.

Fényes Tamás: A talaj, mint váltakozó áramú vezető. (1954. október.)

Az előadó ismertette Carson, Mayr és Rüdenberg azon munkáit, amelyekben a szerzők egyrészt a talajból, másrészt kábeltől vagy szabad vezetékkel álló elektromos rendszer matematikai vizsgálatával foglalkoznak, továbbá Kovács K. Pál: »A földvezetések energiaszolgáltatási rendszer« c. összefoglaló munkáját. Carson a problémát exaktul oldja meg. A földet homogén, végtelen kiterjedésű állandó vezetőképességű, síkkal határolt közegnek tekinti. Mayr a földet, mint vezetőt, oly végtelen nagy felületű, végtelen vékony síklappal helyettesíti, amelynek véges ellenállása van. Carson és Mayr a Maxwell-egyenletek megoldásait Fourier-integrálok segítségével állítják elő. Rüdenberg a talajban, mint féltérben fennálló elektromágneses teret a féltér felszínén elhelyezett vezetőre, mint tengelyre közelítőleg forgás-szimmetrikusnak tekinti, és így a problémát egy független változós feladatra redukálja. Az előadó rámutat arra, hogy az alacsonyfrekvenciás határesetben az egyes szerzők eredményei gyakorlatilag megegyeznek.

Pál Sándor: »Félsíkra és féltérre értelmezett állandó együtthatós peremérték-feladatokról« címmel 1954. december—1955. január folyamán három előadásból álló sorozatot tartott, melyben Freud Géza „A potenciálmélet harmadik peremérték-feladatáról“ címmel jelen kötet 223. oldalán található dolgozatának alábbi általánosítását adta: Legyen $P(\xi, \eta, \zeta)$ valós háromváltozós polinom, $u(x, y, z)$ a $z > 0$ féltérre értelmezett háromváltozós függvény és $f(x, y)$ tetszőesszerinti előírt kétváltozós, szakaszonként folytonos, korlátos függvény. Az előadó megmutatta, hogy ha nincs olyan $\lambda \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ értékpár, melyre

$$P(i\lambda \cos \varphi, i\lambda \sin \varphi - \lambda) = 0,$$

akkor a $z > 0$ féltérre értelmezett

$$\Delta u = 0$$

differentiálegyenletnek

$$\lim_{z \rightarrow 0} P \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = f(x, y)$$

határfeltétel mellett mindig van a $z > 0$ féltérben korlátos megoldása:

$$(1) \quad u(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty K(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

ahol

$$K(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda e^{\lambda(ix \cos \varphi + iy \sin \varphi - z)} P(i\lambda \cos \varphi, i\lambda \sin \varphi - \lambda)}{P(i\lambda \cos \varphi, i\lambda \sin \varphi - \lambda)} d\lambda,$$

Analóg módon tűzhető ki az $y > 0$ félsíkban értelmezett $u(x, y)$ függvényre vonatkozó feladat a $P(\xi, \eta)$ kétváltozós polinom és $f(\xi)$ egyváltozós, szakaszonként folytonos függvény segítségével. Ennek megoldása (1)-hez hasonló, de K alakja lényegesen egyszerűbb:

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda(ix - y)}}{P(i\lambda, -\lambda)} d\lambda.$$

Az előadó a félsík esetére a feladatnak teljes megoldását adta, amennyiben megmutatta, hogy

1° ha a $P(i\lambda, -\lambda)$ függvénynek nincs nem-negatív valós zérushelye, úgy

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi, y) f(\xi) d\xi$$

a feladatnak $y > 0$ esetén egyetlen megoldása,

2° ha a $P(i\lambda, -\lambda)$ függvénynek nem-negatív valós zérushelye van, akkor a feladatnak nincs minden korlátos, szakaszonként folytonos $f(\xi)$ peremfüggvényre korlátos megoldása. Ha például a $P(i\lambda, -\lambda)$ függvénynek $\lambda = 0$ zérushelye, szükséges a megoldás létezéséhez, hogy $f(\xi)$ abszolút integrálható legyen. Ha viszont a második csoportba tartozó feladatnak van megoldása, akkor végtelen sok van.

Az 1° és 2° csoportbeosztás által a félsíkra értelmezett peremértékfeladatok »Dirichlet-jellegű« és »Neumann-jellegű« feladatokra oszthatók.

A feltérre vonatkozó feladatnak ilyen teljes tárgyalása eddig nem sikerült.

Ha a $P(\xi, \eta, \zeta)$ polinom csak a ζ változótól függ, a magfüggvény egyszerűen a

$$P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) K = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

z -ben közönséges differenciálegyenlet megoldásával is előállítható. Ezt a differenciálegyenletet például az állandók variálásának módszerével megoldva és az egyetlen, az $x = 0, y = 0, z = 0$ pont bizonyos környezetétől eltekintve korlátos és $z \rightarrow \infty$ -re 0-hoz tartó megoldást választva, a Freud Géza idézett dolgozatában szereplő magfüggvényhez analóg alakú függvényt nyerünk.

Az előadás után számos hozzászólás hangzott el. Egerváry Jenő hozzászólásában

- felhívta az előadó figyelmét arra, hogy az alkalmazott megoldási módszer analóg Zeilonnak a

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$$

differenciálegyenlet fundamentális integráljának meghatározására alkalmazott módszerével. Freud Géza hozzászólásában ismertette a harmadik peremértékfeladat megoldásának unicitására vonatkozó bizonyítását, melyet idézett cikkében publikált.

Valós függvénytani osztály

Alexits György Ortogonális függvényrendszerek szerinti sorfejtések konvergencia-problémái (előadássorozat). (1954. március—május.)

Az előadó ebben az előadássorozatban az ortogonális sorokról szóló, most készülő könyvének egyes részleteit ismertette.

Fenyő István ismertette Mikusinski: »L'Anneau algébrique et son application dans l'analyse fonctionnelle« [Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A (Math.) 2 (1947) 1—48] c. cikkét az operátorszámítás megalapozásáról. (1954. október 12.)

Freud Géza: Ortogonális polinomokról. (1954. október 26.)
 Lásd az előadó »Über orthogonale Polynome« c. dolgozatát [Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 5 (1955) (291—298)].
Freud Géza: Ortogonális polinomok szerint haladó sorfejtések tagonkénti differenciálhatóságáról. (1954. november 2.)
 Lásd az előadó »Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe« c. dolgozatát [Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 5 (1955) (sajtó alatt)].
Czipser János: A. N. Kolmogorov: »Beiträge zur Masstheorie« [Mathematische Annalen 107 (1933) 351—366] c. cikkének ismertetése. (1954. november 16.)
Szűsz Péter: A momentumproblémáról. (1954. november 30. és december 7.)
 Referáló előadás O. Perron: »Die Lehre von den Kettenbrücken« c. könyve alapján.
Fenyő István: A Schwarz-féle disztribúcióelmélet. (1954. december 21. és december 28.)
 L. Schwartz: »Théorie des distributions I.« és J. Halperin: »Introduction to the theory of distributions« c. könyvek ismertetése.

Differenciálegyenletek osztálya

Czipser János: Green-függvények nívóvonalairól. (1954. szeptember 6.)
 J. L. Walsh: »Note on the shape of level curves of Green's function« [Duke Mathematical Journal 20 (1953) 611—615] c. cikkének ismertetése.
Frey Tamás: A Riemann-módszerről és annak Martin-féle általánosításáról. (1954. október 6.)
 M. H. Martin: »Riemann's method and the problem of Cauchy« [Bulletin of the American Mathematical Society 57 (1951) 238—249] c. cikkének ismertetése.
Freud Géza: A potenciálmélet harmadik peremértékfeladatáról. (1954. október 18.)
 Az előadó a Differenciál-, Integrál- és Függvényegyenletek Kollokvium, 1954. (Balatonvilágos) alkalmával elhangzott előadásához csatlakozva ismerteti a feltérre vonatkozó harmadik peremértékfeladat megoldását a Green-függvény segítségével (lásd az előadó cikkét a jelen kötet 223. oldalán). Czipser János megjegyzi, hogy a megoldásfüggvénynek a peremen normális irányban való differenciálhatósága a Lagrange-féle középerérték-tétel segítségével elemien belátható. Pál Sándor hozzászólásában felvázol egy, az előadótól eltérő utat a Green-függvény megszerkesztésére.
*Makai Endre*¹⁾: Sturm-féle oszcillációs és összehasonlítási tételek. (1954. október 25. és november 1.)

Az előadó Sturm eredeti cikke [„Sur les équations différentielles linéaires de deuxième ordre.“ Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1836) 106—186] és Bocher: »Méthodes de Sturm« c. monográfiája (Gauthier—Villars, Paris, 1917) alapján ismertette a címben megjelölt tételeket, továbbá a fentiekhez kapcsolódó egyes kisebb jelentőségű tételeket és megjegyzéseket. Az ismertetésben felhasználta az említett forrásokon kívül két saját dolgozatának eredményeit. [Lásd Makai E.: „Über die Nullstellen von Funktionen die Lösungen Sturm-Liouville'scher Differentialgleichungen sind.“ Commentarii Mathematici Helvetici 16 (1944) 153—199, továbbá „On a monotonic property of certain Sturm-Liouville functions.“ Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 3 (1952) 165—171]. Végül egy példán megmutatta a Sturm-féle módszerek használhatóságát. A példa, amelynek Sturm módszereivel való tárgyalható voltára Egerváry Jenő professzor hívta fel az előadó figyelmét, egy sztatikai problémával kapcsolatos és a következőkben áll:

Korlátok közé szorítandó a $(-1, 1)$ közben az

$$(1) \quad y'' + (1 - x^2)^2 y = 0$$

differenciálegyenlet azon η megoldása, mely a) páros függvény, b) a 0 helyen az 1 értéket veszi fel. A probléma eredetére való tekintettel néhány százalékos pontatlanság természetesen megengedhető.

¹⁾ Budapesti Műszaki Egyetem, I. számú Matematikai Tanszék.

A Sturm-féle összehasonlítási tételt az (1) differenciálegyenletnek η , valamint az $y_i'' + q_i(x)y_i = 0$ egyenletnek az a) és b) feltételeket kielégítő η_i megoldására alkalmazva azt kapjuk, hogy ha a $(-1, 1)$ intervallumban

$$(1 - x^2)^2 \leq q_i(x) \quad (\text{illetve } \geq q_i(x)), \text{ akkor } \eta \geq \eta_i \quad (\text{illetve } \eta \leq \eta_i)$$

minden olyan a 0-t tartalmazó intervallumban, amelyben sem az η , sem az η_i függvény nem tűnik el.

Összehasonlításra alkalmas egyszerű függvények:

1. $q_1(x) = 1$, $\eta_1 = \cos x$, amiből $\eta \geq \cos x$ az egész $(-1, 1)$ közben.
2. $q_2(x) = 0$, $\eta_2 = 0$, amiből $\eta \leq 1$ az egész $(-1, 1)$ közben.
3. $q_3(x) = (1 - x^2)$, $\eta_3 = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, amiből $\eta \geq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ az egész $(-1, 1)$ közben.

Ezek alapján remélhető, hogy elég nagy b esetén az a) és b) feltételeket kielégítő $\eta_4 = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{b}{4}x^4\right)$ függvény η majoránsa lesz. η_4 — mint rövid számítással ellenőrizhető — eleget tesz az $y_4'' + q_4(x)y_4 = 0$ differenciálegyenletnek, ahol $q_4(x) = 1 - 3bx^2 - x^2(1 - bx^2)^2$. Ha most $q_4(x) \leq (1 - x^2)^2$ ($|x| \leq 1$), akkor valóban $\eta_4 \geq \eta$ ($|x| < 1$). Az első egyenlőtlenség helyes lesz például $b = \frac{1}{3}$ esetén, amiből

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right) \geq \eta \geq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

A felső és alsó korlátoló függvény hányadosa $\exp \frac{x^4}{12}$. Ez azt jelenti, hogy a két korlátoló függvény az egész intervallumban legfeljebb 9%-kal tér el egymástól. Ha kisebb intervallumot tekintünk, például a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallumot, akkor a felső és alsó korlátoló függvények hányadosa legfeljebb $\exp\left(\frac{1}{12 \cdot 2^4}\right)$, ami 0,6%-nál kevesebb eltérésnek felel meg.

*Révai Katalin*²⁾: A Legendre-transzformáció és alkalmazása a potenciálmélet kerületértékfeladatainak megoldására. (1954. november 8. és 1955. január 24.)

R. V. Churchill—C. L. Dolph: »Inverse transforms of products of Legendre transforms« [Proceedings of the American Mathematical Society 5 (1954) 93—100] és R. V. Churchill: »The operational calculus of Legendre transforms« c. cikkének ismertetése. A két cikken túlmenve Freud Gézával együtt megállapították, hogy az ismertetett módszer gömbről hengerre is átvihető. Pál Sándor felvetette, nem lehetne-e határátmenettel féltérre és félsíkra is általánosítani.

Frey Tamás: A differenciálmódszer alkalmazásairól bizonyos peremértékfeladatokra. (1954. november 15.)

Rózsa Pál zárt alakban előállította a $\Delta u = 0$ illetve a $\Delta \Delta u = 0$ differenciálegyenlet derékszögű négyszögre vonatkozó bizonyos peremértékfeladataihoz tartozó (négyzetes beosztásra támaszkodó) közelítő differenciaegyenletrendszer koefficiensmatrixának reciprokát, amely véges analogonja a megfelelő peremértékfeladat Green-függvényének.

Ezen eredményekre támaszkodva az előadó igazolta, hogy a reciprokmatrix általános eleme (mint egészargumentumú függvény) $\tilde{C}(\varepsilon) n^{-1+\varepsilon}$ rendben ($0 < \varepsilon < 1$, tetszőleges) konvergál a megfelelő Green-függvényhez. Az előadó rámutatott arra is, hogy a konvergenciasebbséget illető eredményeket át tudja vinni tetszőleges, rektifikálható görbével határolt (egyszeresen összefüggő) tartomány megfelelő peremértékfeladatainak differenciaegyenlettel történő közelítésére is — és pedig egy Schwarz-Neumann-típusú eljárás közbeiktatása segítségével.

*Szilvay Géza*²⁾: A hővezetés differenciálegyenletéről. (1954. november 22., november 25. és 1954. december 13.)

Az előadó D. Völker—G. Doetsch: »Die zweidimensionale Laplace-Transformation« c. könyve és F. Bernstein—G. Doetsch: »Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung« c. cikksorozata [Mathematische Zeitschrift 22 (1925) 285—306, 25 (1926) 608—

²⁾ Közlekedési Műszaki Egyetem, Szolnok, Matematikai Tanszék.

626, 26 (1927) 89—98] alapján ismerteti a hővezetés differenciálegyenletének megoldását Laplace-transzformáció segítségével, különböző peremfeltételek mellett.

Feldmann László³⁾: Bochner egy problémájáról. (1954. november 24.)

Az előadó, Aczél János: »Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen“ orthogonalen Polynome« [Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 4 (1953) 315—320] c. dolgozatának ösztönzésére azon problémával foglalkozott, hogy melyek azok a (valamely nem-negatív súlyfüggvény mellett) ortogonális polinomrendszerek, amelyek Sturm—Liouville-típusú differenciálegyenletnek tesznek eleget. Könnyű a válasz, ha feltételezzük, hogy a

$$(1) \quad Qy'' + Ly' + Ky = \lambda y$$

illetve q multiplikátorral átszorozott alakjában

$$(2) \quad (py')' - qy = \lambda qy$$

differenciálegyenletben $p(x)$ -nek van két különböző gyökhelye. Ugyanis ekkor a (2) egyenlet $\lambda_i \neq \lambda_k$ sajátértékekhez tartozó p_i illetve p_k megoldásaira fennáll

$$(3) \quad [p_i (p_i' p_k - p_i p_k')] \Big|_a^b = (\lambda_i - \lambda_k) \int_a^b q p_i p_k dx$$

egyenlőségből következik a $q(x)$ -szel, mint súlyfüggvénnyel való ortogonalitás. Az előadó kimutatta, hogy (3) fennállása mellett $q(x)$ csakis a három klasszikus polinomrendszer — nevezetesen a Jacobi-, Laguerre- vagy Hermite-polinomok — egyikéhez tartozó súlyfüggvény lehet.

Könnyen felírható (1) alakú differenciálegyenlet, melyhez található $\{p_n\}$ polinomrendszer-megoldás a már említett módon, de vagy a $P = qQ$ függvény nem rendelkezik két nullahellyel, vagy a q multiplikátor nem integrálható olyan (a, b) intervallumban, melyre $p(a) = p(b) = 0$, így q nem lehet súlyfüggvény. Kérdés, lehet-e ebben az esetben találni olyan (q -tól különböző) $s > 0$ függvényt, melyre $\int_a^b s p_i p_k dx = 0$

fennáll a $\{p_n\}$ rendszer tagjaira, vagy (1) egyenlet — minden különösebb kikötés nélkül — jellemzi a klasszikus polinomokat?

Az előadó erre bizonyos megszorítással választ tud adni:

1° Pozitív λ mellett (1) illetve (2) egyenlet jellemzi a klasszikus polinomokat. Ez azt jelenti, hogy ha létezik λ_n sajátértékek olyan rendszere, hogy ezekhez sorra létezik az (1) ill. (2) egyenletnek $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ általában pontosan n -edfokú polinom-megoldása és ezek közül p_0, p_1 és p_2 ortogonális egy nem-negatív $s(x)$ súlyfüggvénnyel, akkor a $\{p_n\}$ polinomrendszer csak a három klasszikus rendszer egyike lehet.

2° Legyen az (1) illetve (2) differenciálegyenletben q integrálható (végesben) és létezzen nullad-, első- és másodfokú polinommegoldása. Ha a másodfokú polinom-megoldás olyan, hogy nullahelyei különbözők és valóságosak, akkor az (1) ill. (2) egyenlet a Jacobi-, Laguerre- és Hermite-differenciálegyenletek egyike aszerint, hogy Q másod-, első- vagy nulladfokú polinom.

Freud Géza: Sturm—Liouville-differenciálegyenlet sajátfüggvényei szerint haladó sorfejtésekről. (1954. december 6.) (Titchmarsh: »Eigenfunction expansions« c. könyvének ismertetése.)

Freud Géza: A Mathieu-féle differenciálegyenletről. (1954. december 20. és 1955. január 31.) (Meixner—Schäfke: »Mathieusche und Sphäroidfunktionen« c. könyvének ismertetése.)

Bihari Imre⁴⁾: A Sturm—Liouville-sorfejtés és a Fourier-sorfejtés ekvikonvergenciájáról. (1954. december 27.)

Haar A.: »Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme« [Mathematische Annalen 69 (1910) 339—371] c. cikkének ismertetése.

³⁾ Budapesti Műszaki Egyetem, I. számú Matematikai Tanszék.

⁴⁾ Budapesti Műszaki Egyetem, I. számú Matematikai Tanszék.

**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK, AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK ERED-
MÉNYEIT TARTALMAZÓ, 1954. JANUÁR 1. ÓTA MÁSUTT MEGJELENT
VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

1. CZIPSZER J. és RÉNYI A.: »Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
2. EGERVÁRY J.: »On a property of projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions.« *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 1—6.
3. EGERVÁRY J.: »On a lemma of Stieltjes on matrices.« *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 99—103.
4. EGERVÁRY J.: »On the contractive linear transformation of n -dimensional vector space.« *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 178—182.
5. EGERVÁRY J.: »On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.« *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 211—222.
6. EGERVÁRY J.: »On the application of the matrix theory to the calculation of chain bridges.« *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
7. EGERVÁRY J.: »Über die Faktorisierung von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (sajtó alatt).
8. FENYŐ I.: »Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nicht-linearen Gleichungen.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1954) 85—94.
9. FENYŐ I.: »Sz. G. Mihlin: Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira c. könyvének ismertetése.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 173—176.
10. FENYŐ I.: »Megjegyzés a matematikai fizika egy új integrálegyenletének elméletéhez.« *Matematikai Lapok* 5 (1954) 115—119.
11. FONTÁNYI Á.: *Matematikai statisztikai minőségellenőrzés.* (Tanfolyamanyag statisztikai minőségellenőrök részére.) Sokszorosítás, Rákosi Mátyás Művek, Budapest, 1954.
12. G. FREUD: »Restglied eines Tauberschen Satzes, III.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1955) 275—289.
13. FREUD G.: »Erdős Pál és Turán Pál egy tételéről.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 209—217.
14. G. FREUD: »Über einen Satz von P. Erdős und P. Turán.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 4 (1954) 255—266.
15. G. FREUD: »Über orthogonale Polynome.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1955) 291—298.
16. FREUD G.: »Orthogonális polinomokról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 21—27.
17. G. FREUD: »Über die Konvergenz von Hermite—Fejérschen Interpolationsverfahren.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1954) 109—128.

18. FREUD G.: »A Hermite—Fejér-féle interpoláló konvergenciájáról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1954) 29—47.
19. G. FREUD: »Über einseitige Approximation durch Polynome.« *Acta Scientiarum Mathematicarum* 16 (1955) 12—28.
20. G. FREUD: »Über einen Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen $Lip\ \alpha$ and $Lip\ (\beta, p)$ «. *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 260. [»Helyesbítés« u. o. 16 (1955) 28.].
21. G. FREUD: »Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern.« *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 10 (1955) 397—406.
22. FREUD G.: »Ortogonalis polinomok abszolút konvergenciájáról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 49—56.
23. HAJÓS GY. és RÉNYI A.: »Elementary proofs of some basic facts concerning order statistics.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1954) 1—6.
24. HAJÓS GY. és RÉNYI A.: »Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 467—472.
25. JUVANCZ I. DR.: *A matematikai statisztika alkalmazása.* (Fejezet Bálint P.: Klinikai laboratóriumi diagnosztika c. könyvben.) Egészségügyi Kiadó, Budapest, 1955, 2. kiadás (sajtó alatt).
26. MAGOS L. DR.*) és MEDGYESSY P.: »Elektroforetikus diagrammok matematikai kiértékelése.« *Kísérletes Orvostudomány* 1954. 4. sz. (július) 367—369.
27. MEDGYESSY P. és VINCZE I.: *Valószínűségszámítás.* (»Útmutató a Természet-tudományi és Társadalmi Ismeretterjesztő Társulat előadói számára«, 59. sz.) TITP, Budapest, 1954.
28. PRÉKOPA A.: »Összetett Poisson-eloszlásokról, IV.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 505—512.
29. PRÉKOPA A.: »A várható érték.« *Középiskolai Matematikai Lapok* 9 (1954) 78—81.
30. RÉNYI A.: »Egy kombinatorikai probléma és annak alkalmazása a lucerna nemesítésénél.« *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
31. RÉNYI A.: *Szakkörökben elvégezhető valószínűségszámítási kísérletek.* Fejezet az »Előadások a középiskolai matematika köréből« c. könyvben, Tankönyvkiadó, 1955. (sajtó alatt).
32. RÉNYI A.: »Об идеологическом значении геометрии Бойяна Лобачевского.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
33. RÉNYI A.: »A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 369—427.
34. RÉNYI A.: »A valószínűségszámítás történetének rövid áttekintése.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 445—466.
35. RÉNYI A.: »On a new axiomatic foundation of the theory of probability.« *Proceedings of the International Mathematical Congress, Amsterdam, 1954.* (Sajtó alatt).
36. RÉNYI A.: »On the theory of order statistics.« *Proceedings of the International Mathematical Congress, Amsterdam, 1954.* (Sajtó alatt).
37. RÉNYI A.: »Axiomatisches Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung.« A berlini valószínűségszámítási konferencián elhangzott előadásokat tartalmazó kötetben (sajtó alatt).
38. RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
39. SÁRKADI K.: Hozzászólás Dukáti Ferenc „Tömegcikk-tételek tényleges selejtszázaléka“ c. cikkéhez. *Szabványosítás* 6 (1954) 219—220.
40. SÁRKADI K.: »A rule of dualism in mathematical statistics.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
41. SÁRKADI K.: Hozzászólás Vincze Istvánnak az 1954. évi Nagygyűlésen elhangzott előadásához (lásd az 54. számú dolgozatot a Jegyzékben) *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 442.
42. P. SZÜS: »Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1954) 35—39.

*) Országos Munkaegészségügyi Intézet, Budapest.

43. Szűsz P.: »Egy Hardy—Littlewood-féle tétel élesítése.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 205—208.
44. P. Szűsz: »Lösung eines Problemes von S. Hartman.« *Studia Mathematica* (sajtó alatt).
45. P. Szűsz: »Bemerkungen zur Approximation einer reellen Zahl durch Brüche.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt)
46. P. Szűsz: »Beweis eines zahlgeometrischen Satzes von G. Szekeres.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
47. TAKÁCS L.: »Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 473—504
48. TAKÁCS L.: »Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamatokról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 525—541.
49. TAKÁCS L.: »„Várakozási idő”-problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 543—570.
50. TAKÁCS L.: »Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 571—587.
51. TAKÁCS L.: »Megjegyzés Turán Pál: „A kínai matematika történetének egy problémájáról” c. dolgozatához.« *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
52. TAKÁCS L.: »On secondary processes generated by means of a Poisson process and their application in physics.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 5 (1954) 203—236.
53. TAKÁCS L.: és L. ZIERMANN M.: *Valószínűesszámitás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955. (Tanulóköri füzetek 00. sz.)
54. VINCZE I.: »A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai kérdéseiről.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 429—441.
55. VINCZE I.: »Eloszlások meghatározása középértékeik segítségével.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 513—523
56. VINCZE I.: »Bemerkungen zur Differentialgeometrie der Raumkurven.« *Publicationes Mathematicae* 4 (1955) 61—70.

INDEX

A. RÉNYI: Préface	7
E. EGÉRVÁRY: On the application of the matrix theory to the calculation of chain bridges	9
I. TASNÁDY: Bemerkungen zur Abhandlung von J. Egerváry über die Anwendung des Matrizenkalküls bei der Konstruktion von Kettenbrücken	25
J. EGÉRVÁRY: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics	31
V. LOVASS-NAGY: Investigation, by means of the matrix calculus, of the stability of a beam suspended at two points	49
V. LOVASS-NAGY—T. GYÖRY: Mathematical investigation of coupled circuits by means of the matrix calculus	65
P. MEDGYESSY—A. RÉNYI—K. TETTAMANTI—I. VINCZE: Mathematical investigation of chemical countercurrent distribution, in case of non-complete diffusion	81
G. SZÉKELY—T. SZÉKELY: La discussion d'échape de radicaux des halogénides organiques de silicium à l'aide du calcul des probabilités	99
L. TAKÁCS: Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type	115
P. MEDGYESSY: Product integration, Fourier-synthesis and similar operations carried out by means of a square planimeter and a new apparatus.....	129
P. MEDGYESSY: Decomposition of discrete compound probability distributions...	139
P. MEDGYESSY: Some recent results concerning the decomposition of compound probability distributions	155
A. BÉKÉSSY: Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulsanzahl bei fehlerhaft arbeitenden Untersetzern	171
K. SARKADI: On Sheppard correction concerning the mean deviation	183
K. SARKADI: On the waiting-time of locomotives	191
Gy. BOTOS—M. HOSSZÚ: Representation of implicit functions by nomograms with scales	195
T. FÉNYES: Über den Skinverlust der Spulen	209
G. FREUD: Über das Randwertproblem dritter Art der Potentialtheorie	223
J. BOGNÁR—G. FREUD: Berechnung der gequantelten Energiewerte eines rotierenden Dipols im elektrischen Felde	239
FRAU G. SZILVAY—E. ZERGÉNYI: Über ein Wärmeleitungsproblem.....	253
FRAU G. SZILVAY: Berechnung der Temperaturverteilung im Doppelrohrwärmeaustauscher	265
ABSTRACTS DES CONFÉRENCES TENUES AUX SÉMINAIRES DES SECTIONS DE L'INSTITUT	275
LISTE DES TRAVAUX DES MEMBRES DE L'INSTITUT, PUBLIÉS AILLEURS OU SOUS PRESSE	285

СОДЕРЖАНИЕ

А. РЕНЬИ: Предисловие	7
Е. ЭГЕРВАРИ: Применение теории матриц к расчету цепных мостов	9
И. ТАШНАДЪИ: Примечания к работе Е. Эгервари: «Применение теории матриц к расчету цепных мостов»	25
Е. ЭГЕРВАРИ: О гиперматрицах, состоящих из попарно переставляемых блоков, и об их применении в динамике решеток	31
В. ЛОВАШ-НАДЬ: Исследование матричным методом устойчивости подвешенной на двух концах балки	49
В. ЛОВАШ-НАДЬ—Т. ДЬЕРИ: Математическое исследование связанных контуров при помощи матричного исчисления	65
П. МЕДДЕШИ—А. РЕНЬИ—К. ТЭТТАМАНТЬИ—И. БИНЦЕ: Математическое исследование химического фракционирующего разделения в случае неполной диффузии неорганических соединений методом теории вероятностей	81
Г. СЕКЕЙ—Т. СЕКЕЙ: Исследование химических реакций с обменом радикалов кремнеорганических соединений методом теории вероятностей	99
Л. ТАКАЦ: Исследование некоторых типов рекуррентных стохастических процессов	115
П. МЕДДЕШИ: Интергирование произведения, проведение синтеза Фурье и решение подобных задач сочетанием квадратного планиметра и нового прибора	129
П. МЕДДЕШИ: Разложение на компоненты смеси дискретных распределений вероятностей	130
П. МЕДДЕШИ: О новых результатах разложения на компоненты смеси функций распределения вероятностей	155
А. БЕКЕШИ: О распределении вероятностей сигналов поврежденных скэлеров	171
К. ШАРКАДЪИ: Поправка Шенпарда для ожидаемого отклонения	183
К. ШАРКАДЪИ: О времени простоя паровозов	191
Дь. Ботош—М. Хоссу: Изображение неявных функциональных зависимостей номограмми из выравненных точек	195
Т. ФЕНЕШ: О скин-эффекте многослойных катушек	209
Г. ФРЕЙД: О третьей краевой задаче теории потенциала	223
Я. БОГНАР—Г. ФРЕЙД: Вычисление квантованных уровней энергии дипольного ротатора в электрическом поле	239
Г. СИЛВАИ—Э. ЗЕРГЕНИ: Об одной задаче теплопроводности	253
Г. СИЛВАИ: Расчет распределения температуры в теплообменнике с двойной трубкой	265
РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ ПРОИЗНЕСЕННЫХ НА СЕМИНАРАХ ОТДЕЛЕНИЙ ИНСТИТУТА	275
СПИСОК РАБОТ СОТРУДНИКОВ ИНСТИТУТА, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ ЖУРНАЛАХ ИЛИ НАХОДЯЩИХСЯ В ПЕЧАТИ	285

✓ 304645

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
ALKALMAZOTT
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
RÉNYI ALFRÉD

III. KÖTET
1954
3—4. FÜZET

★

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III.
1954
ВЫПУСК 3—4

★

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

TOME III.
1954
FASCICULE 3—4



1955

TARTALOMJEGYZÉK

EGERVÁRY J. : A Hunyadi—Scholtz-féle matrixok alkalmazása a rácos szerkezetek elméletében	289
TAKÁCS L. : Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása bizonyos meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál	301
MEDGYESSY P. : Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontására	321
MEDGYESSY P. : Kiegészítés az „Újabb eredmények valószínűségeloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban” című dolgozathoz....	331
HORVÁTH F. : Nomogrammok kivitelezése.....	343
RÉNYI A.—RÉNYI K. : A komplex potenciál egyrétűségéről, I.....	353
FREUD G. : Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel.....	369
CZIPSZER J. : Hővezetés végtelen rúdban, I.	395
BOGNÁR J. : Földszinti fűtött helyiség padlójának hőátbocsátásáról.....	409
LADIK J.—CSUKÁS A.-NÉ : Két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatás meghatározása a H_2 -molekulában.....	425
CZIPSZER J.—TUSCHÁK R. : Örvényáramveszteségek egyenáramú előtelítés esetén	443

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
ALKALMAZOTT
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
RÉNYI ALFRÉD

III. KÖTET
1954
3—4. FÜZET

★

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ III.
1954
ВЫПУСК 3—4

★

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

TOME III.
1954
FASCICULE 3—4



1955

**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI**

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐSÉG: ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET,
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN ÚT 31, I. EMELET

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó dolgozatokat közölnek, magyar nyelven, két világnyelven írt kivonatokkal. Évente 1 kötet (4 füzet) jelenik meg. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ**

РЕДАКТОР: АЛЬФРЕД РЭНИ

В трудах Института Прикладной Математики печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательского работы Института, на венгерском языке с резюме на двух мировых языках. Ежегодно выходит 1 том в 4 выпусках. Редакция: Институт Прикладной Математики, Будапешт, VI., ул. Сталина 31. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21), текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

**PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE**

RÉDACTEUR: ALFRÉD RÉNYI

Les Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées contiennent des articles concernant les résultats du travail de l'Institut en langue hongroise avec résumés en deux langues de rayonnement mondial. Il paraît 1 volume contenant 4 fascicules par an. Rédaction: L'Institut des Mathématiques Appliquées, Budapest, VI., Sztálin út 31. On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21.). Compte-courant No. 45—790—057—50—032. Pour établir es relations d'échange adressez vous à la rédaction.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Széllősy Károly

A kézirat beérkezett: 1955. IX. 25. — Pótlószám: 800. — Terjedelem: 14 1/2 (A/5) ív

37815/55 — Akadémiai Nyomda, V. Gerlőczy u. 2. — felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

A HUNYADI—SCHOLTZ-FÉLE MATRIXOK ALKALMAZÁSA A RÁCSOS SZERKEZETEK ELMÉLETÉBEN¹⁾

EGERVÁRY JENŐ

Rácsos tartók sztatikájában — valamint másutt is a fizikában és technikában — gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amelyek lineáris egyenletrendszerek megoldását teszik szükségessé. Az ilyen feladatoknak a tárgyalása általában a lineáris egyenletek elméletére való utalással nyer befejezést. Gyakori eset azonban (ilyen például a csuklós rácsos tartók rúderőinek a meghatározása is), hogy a kielégítendő egyenletek száma nagyobb, mint a meghatározandó ismeretlenek száma, és az egyenleteknek a kielégíthetőségét a tartót csuklóiban támadó külső erőknek egyensúlyi feltételei biztosítják. Ezen egyensúlyi feltételeknek az egyenletek megoldása folyamán való figyelembevétele rendszerint olyan eliminációkat tesz szükségessé, melyek a kiindulási egyenletek szimmetriáját megrontják, és így a számítást áttekinthetetlenné teszik.

Kíváncsún látszik tehát, hogy — ahol ez lehetséges — a rácsos tartóra ható erőrendszert oly független paraméterekkel határozzuk meg, melyek az egyensúlyi feltételek automatikus kielégítettségét biztosítják, és amelyeknek az alkalmazása egy szimmetrikus felépítésű és nem-szinguláris matrix-szal bíró egyenletrendszerre vezet. A jelen dolgozatban ilyen tárgyalásmódot fogunk bemutatni egy háromszög oldalaiból, valamint egy tetraéder éléből alkotott rácsos tartó esetében. Ez a tárgyalásmód amellet, hogy az ismeretlen rúderőkre nézve teljesen szimmetrikus, explicit képletet ad, még abból a szempontból is figyelemreméltó, hogy a benne szereplő matrixok lényegileg ugyanolyan típusúak, mint amelyekkel először *Scholtz* [3], [4] és *Hunyadi* [5], [6], [7] nagy jelentőségű munkáikban foglalkoztak.

Ismeretes a sztatikából, hogy a csuklókból terhelt (síkbeli) rácsos szerkezet egyensúlyát az alábbi egyenletek határozzák meg:²⁾

$$(1) \quad \sum_k \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} S_{ik} = X_i ,$$

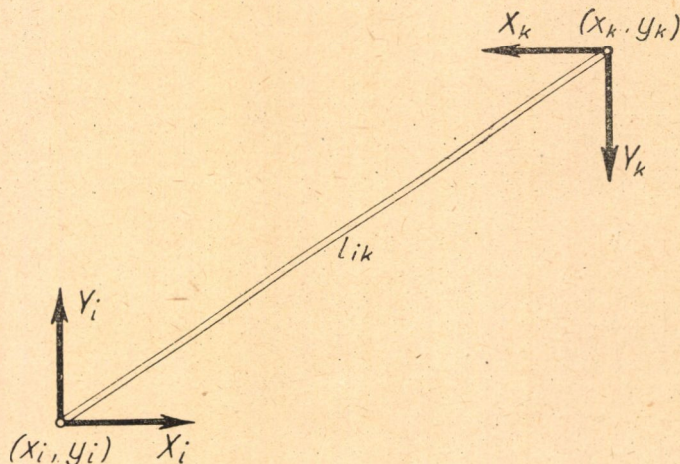
$$\sum_k \frac{y_k - y_i}{l_{ik}} S_{ik} = Y_i .$$

¹⁾ Jelen dolgozat sajtó alá rendezésénél és formuláinak részletes összeállításánál *Rózsa Pál* nyújtott segítséget, melyért a szerző e helyen is köszönetet mond.

²⁾ Lásd például [1], 541. oldal.

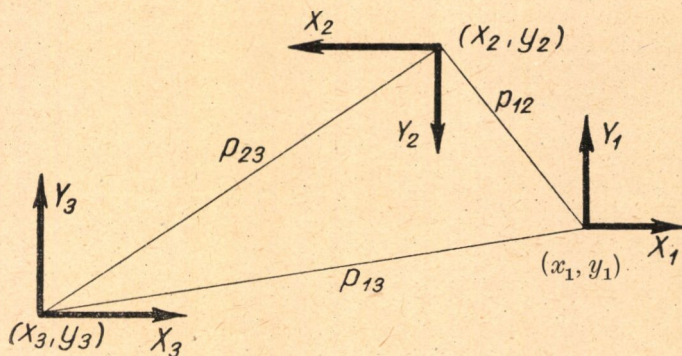
A betűk jelentése kiolvasható az 1. ábrából, S_{ik} a keresett rúderőket jelenti. (Ezek húzás esetén pozitívak, nyomás esetén negatívak.)

Határozzuk meg a három rúdból álló síkbeli rácsos szerkezet rúdjaiban ébredő erőket, ha a szerkezetet a csuklóokban egyensúlyban levő erőrendszer terheli.



1. ábra

Vezessük be a $p_{ik} = S_{ik}/l_{ik}$ jelölést, és írjuk fel az (1) egyenleteket (lásd : 2. ábra) :



2. ábra

(2)

$$(x_3 - x_2) p_{23} + (x_1 - x_2) p_{12} = X_2$$

$$(x_3 - x_1) p_{13} + (x_2 - x_1) p_{12} = X_1$$

$$(x_1 - x_3) p_{13} + (x_2 - x_3) p_{23} = X_3$$

$$(y_3 - y_2) p_{23} + (y_1 - y_2) p_{12} = Y_2$$

$$(y_3 - y_1) p_{13} + (y_2 - y_1) p_{12} = Y_1$$

$$(y_1 - y_3) p_{13} + (y_2 - y_3) p_{23} = Y_3$$

A három ismeretlenre hat egyenletet nyertünk, a feladat azonban csak látszólag vált túlhatározottá, ugyanis teljesülnie kell még az alábbi három egyensúlyi egyenletnek (kompatibilitási feltételek) :

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_i X_i &= 0 \\ \sum_i Y_i &= 0 \\ \sum_i x_i Y_i &= \sum_i y_i X_i. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek az erők és nyomatékok egyensúlyát fejezik ki. Írjuk fel a (2) egyenleteket matrix-egyenlet alakjában :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & y_3 - y_2 & y_1 - y_2 \\ y_3 - y_1 & 0 & y_2 - y_1 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix}.$$

Most áttérünk egy alkalmasabb formájú, de a kiindulási egyenletekkel ekvivalens egyenletrendszerre, azáltal, hogy a (4) matrix-egyenletet a háromszög csúcspontjainak

$$(5) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \end{bmatrix}$$

nem-szinguláris³⁾ koordináta-matrixával megszorozzuk. Ekkor a

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)^2 & (x_1 - x_2)^2 \\ (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) & (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \sum X_i \\ \sum x_i X_i \\ \sum y_i X_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

³⁾ Ezzel kizárjuk azt az esetet, amikor a háromszög elfajul, és a csuklók egy egyenesbe esnek.

illetve

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) & (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)^2 & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \\ \sum y_i Y_i \end{bmatrix}$$

matrix-egyenletekhez jutunk. Ez a két matrix-egyenlet hat skalár-egyenletet reprezentál, melyek közül az első és a negyedik — a (3) kompatibilitási feltételek első két egyenlete folytán — automatikusan ki van elégítve, a harmadik és ötödik egyenlet pedig — a (3) feltételek harmadik egyenlete miatt — egyetlen egyenletre redukálódik. Mindezek figyelembevételével az adott egyenletrendszert három független egyenletre redukáltuk, melyekből az is kitűnik, hogy az adott erőkomponensek alábbi lineáris kombinációit célszerű független skalár paraméterekként bevezetni:

$$q_{xx} = \sum x_i X_i$$

$$q_{yy} = \sum y_i Y_i$$

$$q_{xy} = \sum y_i X_i.$$

A kapott három független egyenlet — matrix-egyenletként felírva — a következő:

$$- \begin{bmatrix} (x_1 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)^2 & (x_1 - x_2)^2 \\ (y_1 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)^2 & (y_1 - y_2)^2 \\ (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) & (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{xx} \\ q_{yy} \\ q_{xy} \end{bmatrix},$$

vagy matrix-szimbolikával:

$$(6) \quad - \mathbf{M} \mathbf{p} = \mathbf{q}.$$

Az ismeretlen rúderőket legcélszerűbb a (6) egyenletben szereplő együttható-matrix invertálásával meghatározni.

Tekintettel arra, hogy az \mathbf{M} együttható-matrix a koordinátakülönbségekben teljesen szimmetrikus, egy eltolási transzformációval a koordináta-rendszer kezdőpontját a háromszög egyik, — például a 3 indexű — csúcspontjába

helyezzük át. Legyenek az új koordináták ξ és η . Célszerűség céljából alakítsuk át a (6) egyenletet a

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{E}$$

azonosság felhasználásával, ahol

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nem-szinguláris transzformáló-matrix. Az így nyert

$$(7) \quad -(\mathbf{MT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{p}) = \mathbf{q}$$

egyenlet

$$\mathbf{S} = \mathbf{MT} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & 2\xi_1 \xi_2 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & 2\eta_1 \eta_2 \\ \xi_1 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 \end{bmatrix}$$

együttható-matrixa ugyanis a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

másodrendű matrix második hatványtranszformációja által keletkezett.⁴⁾

⁴⁾ Ismeretes, hogy egy

$$x'_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

homogén lineáris transzformáció a

$$\xi'_k = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$$

és a

$$\xi_x = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$$

monomok között — ahol v_k nem-negatív, és $\sum_{k=1}^n v_k = p$ — az

$$x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n} = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right)^{v_1} \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \right)^{v_2} \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right)^{v_n}$$

reláció alapulvétele mellett egy

$$\xi'_x = a_{x1} \xi_1 + \dots + a_{xN} \xi_N$$

$$N = \binom{n+p-1}{p}$$

homogén lineáris transzformációt indukál, amelyet az eredeti transzformáció p -edik hatványtranszformációjának nevezünk. Ha ennek az indukált hatványtranszformáció-

Megjegyezzük, hogy a fenti S matrix szerepel *Scholtz és Hunyadi* determináns-elméleti dolgozataiban.⁵⁾

A (7) egyenlet megoldása — az együttható-matrix invertálása, valamint a T transzformáló-matrix-szal való szorzás után —

$$(8) \quad p = -TS^{-1}q$$

alakban adódik.

Felhasználva a hatványtranszformációra vonatkozó fenti, — a ⁴⁾ láb-jegyzetben tett — megjegyzésünket, — mivel

$$S = \mathcal{H}_2(C),$$

tehát

$$S^{-1} = \mathcal{H}_2(C^{-1}).$$

Továbbá, tekintettel arra, hogy

$$C^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \eta_2 & -\xi_2 \\ -\eta_1 & \xi_1 \end{bmatrix},$$

kapjuk :

$$S^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2} \begin{bmatrix} \eta_2^2 & \xi_2^2 & -2\xi_2\eta_2 \\ \eta_1^2 & \xi_1^2 & -2\xi_1\eta_1 \\ -\eta_1\eta_2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 \end{bmatrix}.$$

A kapott eredményt behelyettesítve a (8) egyenletbe, a T transzformáló-matrix-szal való szorzás után

$$p = \frac{1}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2} \begin{bmatrix} -\eta_2(\eta_2 - \eta_1) & -\xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \eta_2(\xi_2 - \xi_1) + \xi_2(\eta_2 - \eta_1) \\ \eta_1(\eta_2 - \eta_1) & \xi_1(\xi_2 - \xi_1) & -\eta_1(\xi_2 - \xi_1) - \xi_1(\eta_2 - \eta_1) \\ -\eta_1\eta_2 & -\xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 \end{bmatrix} q$$

adódik. Végül ismét eltolási transzformáció segítségével térjünk vissza az eredeti koordinátarendszerre. Jelentse A_{ik} az (5) alatti A matrix reciprokának az elemeit ; ekkor eredményünk a következő teljes szimmetriát mutató alakban írható :

$$\begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22}A_{32} & A_{23}A_{33} & A_{22}A_{33} + A_{32}A_{23} \\ A_{12}A_{32} & A_{13}A_{33} & A_{12}A_{33} + A_{32}A_{13} \\ A_{12}A_{22} & A_{13}A_{23} & A_{13}A_{23} + A_{22}A_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{xx} \\ q_{yy} \\ q_{xy} \end{bmatrix}.$$

nak a matrixát, mint a kiindulási lineáris transzformáció A matrixának a függényét $\mathcal{H}_p(A)$ -val jelöljük, akkor tudvalevőleg (lásd például [2] 44. (85. oldal) ; különösen : (88. oldal) :

$$\{\mathcal{H}_p(A)\}^{-1} = \mathcal{H}_p(A^{-1}).$$

⁵⁾ Lásd [3]—[7].

Megjegyezzük, hogy ebben a megoldási formulában szereplő másodrendű minorok mindegyike az alapháromszög egyik oldalának valamelyik koordinátatengelyre való irányított vetületét jelenti.

Most térjünk rá a térbeli feladatra: határozzuk meg egy tetraédert alkotó hat rúdból álló (térbeli) rácsos szerkezet rúdjaiban ébredő erőket, ha a szerkezetet a csuklókbán egyensúlyban levő erőrendszer terheli.

Az (1) egyenletrendszer — ismét a $p_{ik} = S_{ik}/l_{ik}$ jelölést alkalmazva — ekkor a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}
 (x_1 - x_4) p_{14} + (x_2 - x_4) p_{24} + (x_3 - x_4) p_{34} &= X_4 \\
 (x_4 - x_3) p_{34} + (x_1 - x_3) p_{13} + (x_2 - x_3) p_{23} &= X_3 \\
 (x_4 - x_2) p_{24} + (x_1 - x_2) p_{12} + (x_3 - x_2) p_{23} &= X_2 \\
 (x_4 - x_1) p_{14} + (x_2 - x_1) p_{12} + (x_3 - x_1) p_{13} &= X_1,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

valamint még négy-négy, a fentivel azonos szerkezetű egyenlet, az y - illetve z -irányú komponensekre. A hat ismeretlen rúderő meghatározására ezzel 12 egyenletet kaptunk, teljesülnie kell azonban a következő egyensúlyi egyenleteknek:

$$\begin{aligned}
 \sum_i X_i &= 0 & \sum_i x_i Y_i &= \sum_i y_i X_i \\
 \sum_i Y_i &= 0 & \sum_i x_i Z_i &= \sum_i z_i X_i \\
 \sum_i Z_i &= 0 & \sum_i y_i Z_i &= \sum_i z_i Y_i.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Ha a (9) egyenleteket matrix-egyenlet alakjában írjuk, akkor

$$\begin{bmatrix}
 x_1 - x_4 & x_2 - x_4 & x_3 - x_4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & x_4 - x_3 & 0 & x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\
 0 & x_4 - x_2 & 0 & x_1 - x_2 & 0 & x_3 - x_2 \\
 x_4 - x_1 & 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_{14} \\
 p_{24} \\
 p_{34} \\
 p_{12} \\
 p_{13} \\
 p_{23}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 X_4 \\
 X_3 \\
 X_2 \\
 X_1
 \end{bmatrix},
 \tag{11}$$

valamint ugyanilyen egyenletek adódnak az y -, illetve z -irányú komponensekre is.

Miként a síkbeli feladatnál tettük, itt is áttérünk egy alkalmasabb formájú, de a kiindulási egyenletekkel ekvivalens egyenletrendszerre, mégpedig úgy, hogy a (11) matrix-egyenleteket, a tetraéder csúcspontjainak

$$(12) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

nem-szinguláris⁶⁾ koordináta-matrixával megszorozzuk. Ekkor a

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_4)^2 & (x_2 - x_4)^2 & (x_3 - x_4)^2 & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_2)^2 & (x_2 - x_3)^2 \\ (x_1 - x_4)(y_1 - y_4) & (x_2 - x_4)(y_2 - y_4) & (x_3 - x_4)(y_3 - y_4) & (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) & (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) \\ (x_1 - x_4)(z_1 - z_4) & (x_2 - x_4)(z_2 - z_4) & (x_3 - x_4)(z_3 - z_4) & (x_1 - x_3)(z_1 - z_3) & (x_1 - x_2)(z_1 - z_2) & (x_2 - x_3)(z_2 - z_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma X_i \\ \Sigma x_i X_i \\ \Sigma y_i X_i \\ \Sigma z_i X_i \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (y_1 - y_4)(x_1 - x_4) & (y_2 - y_4)(x_2 - x_4) & (y_3 - y_4)(x_3 - x_4) & (y_1 - y_3)(x_1 - x_3) & (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) & (y_2 - y_3)(x_2 - x_3) \\ (y_1 - y_4)^2 & (y_2 - y_4)^2 & (y_3 - y_4)^2 & (y_1 - y_3)^2 & (y_1 - y_2)^2 & (y_2 - y_3)^2 \\ (y_1 - y_4)(z_1 - z_4) & (y_2 - y_4)(z_2 - z_4) & (y_3 - y_4)(z_3 - z_4) & (y_1 - y_3)(z_1 - z_3) & (y_1 - y_2)(z_1 - z_2) & (y_2 - y_3)(z_2 - z_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma x_i Y_i \\ \Sigma y_i Y_i \\ \Sigma z_i Y_i \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (z_1 - z_4)(x_1 - x_4) & (z_2 - z_4)(x_2 - x_4) & (z_3 - z_4)(x_3 - x_4) & (z_1 - z_3)(x_1 - x_3) & (z_1 - z_2)(x_1 - x_2) & (z_2 - z_3)(x_2 - x_3) \\ (z_1 - z_4)(y_1 - y_4) & (z_2 - z_4)(y_2 - y_4) & (z_3 - z_4)(y_3 - y_4) & (z_1 - z_3)(y_1 - y_3) & (z_1 - z_2)(y_1 - y_2) & (z_2 - z_3)(y_2 - y_3) \\ (z_1 - z_4)^2 & (z_2 - z_4)^2 & (z_3 - z_4)^2 & (z_1 - z_3)^2 & (z_1 - z_2)^2 & (z_2 - z_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Z_i \\ \Sigma x_i Z_i \\ \Sigma y_i Z_i \\ \Sigma z_i Z_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matrix-egyenletekre jutunk. Ez a három matrix-egyenlet 12 skálár-egyenletet reprezentál, melyek közül az első, az ötödik és a kilencedik — a (10) kompatibilitási feltételek első három egyenlete folytán — automatikusan ki van elégítve, a harmadik és a hatodik, illetve a negyedik és a tizedik, valamint a nyolcadik és a tizenegyedik egyenlet — a (10) feltételek többi egyenlete miatt — páronként egy-egy egyenletre redukálódik. Ezek figyelembevételével az adott egyenletrendszert hat független egyenletre redukáltuk, melyekből az is kitűnik, hogy — a síkbeli feladathoz hasonlóan — az adott erőkomponensek alábbi lineáris kombinációit célszerű független skálár paraméterekként bevezetni:

$$\begin{aligned} q_{xx} &= \Sigma x_i X_i & q_{xy} &= \Sigma y_i X_i \\ q_{yy} &= \Sigma y_i Y_i & q_{xz} &= \Sigma z_i X_i \\ q_{zz} &= \Sigma z_i Z_i & q_{yz} &= \Sigma z_i Y_i . \end{aligned}$$

⁶⁾ Ezzel kizárjuk az elfajuló, tehát egy síkba eső hat rúdból álló rácsos tartó esetét.

Az így nyert hat független egyenletet a következő matrix-egyenlet alakjában írhatjuk fel :

$$- \begin{bmatrix} (x_1 - x_4)^2 & (x_2 - x_4)^2 & (x_3 - x_4)^2 & (x_1 - x_2)^2 & (x_1 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)^2 \\ (y_1 - y_4)^2 & (y_2 - y_4)^2 & (y_3 - y_4)^2 & (y_1 - y_2)^2 & (y_1 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)^2 \\ (z_1 - z_4)^2 & (z_2 - z_4)^2 & (z_3 - z_4)^2 & (z_1 - z_2)^2 & (z_1 - z_3)^2 & (z_2 - z_3)^2 \\ (x_1 - x_4)(y_1 - y_4) & (x_2 - x_4)(y_2 - y_4) & (x_3 - x_4)(y_3 - y_4) & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) & (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) & (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) \\ (x_1 - x_4)(z_1 - z_4) & (x_2 - x_4)(z_2 - z_4) & (x_3 - x_4)(z_3 - z_4) & (x_1 - x_2)(z_1 - z_2) & (x_1 - x_3)(z_1 - z_3) & (x_2 - x_3)(z_2 - z_3) \\ (y_1 - y_4)(z_1 - z_4) & (y_2 - y_4)(z_2 - z_4) & (y_3 - y_4)(z_3 - z_4) & (y_1 - y_2)(z_1 - z_2) & (y_1 - y_3)(z_1 - z_3) & (y_2 - y_3)(z_2 - z_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{xx} \\ q_{yy} \\ q_{zz} \\ q_{xy} \\ q_{xz} \\ q_{yz} \end{bmatrix}$$

Ugyanez matrix-jelekkel :

$$(13) \quad - \mathbf{Np} = \mathbf{q}.$$

Az ismeretlen rúderőket a (13) egyenlet együttható-matrixának invertálásával határozzuk meg.

Tekintettel arra, hogy az \mathbf{N} együttható-matrix a koordinátakülönbségekben teljesen szimmetrikus, egy eltolási transzformációval — hasonlóan ahhoz, ahogy ezt a síkbeli feladatnál tettük — a koordináta-rendszer kezdő-pontját a tetraéder egyik — például a 4-indexű — csúcspontjába helyezzük át. Legyenek az új koordináták ξ , η és ζ . Célszerű a (13) egyenletet az

$$\mathbf{UU}^{-1} = \mathbf{E}$$

azonosság felhasználásával átalakítani, ahol

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nem-szinguláris transzformáló-matrix. Az így nyert

$$(14) \quad - (\mathbf{NU})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{p}) = \mathbf{q}$$

egyenlet együttható-matrixa ugyanis ezúttal is *Scholtz—Hunyadi*-típusú matrix :

$$\mathbf{R} = \mathbf{NU} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & 2\xi_1\xi_2 & 2\xi_1\xi_3 & 2\xi_2\xi_3 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & 2\eta_1\eta_2 & 2\eta_1\eta_3 & 2\eta_2\eta_3 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & 2\zeta_1\zeta_2 & 2\zeta_1\zeta_3 & 2\zeta_2\zeta_3 \\ \xi_1\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_3\eta_3 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 & \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 \\ \xi_1\zeta_1 & \xi_2\zeta_2 & \xi_3\zeta_3 & \xi_1\zeta_2 + \xi_2\zeta_1 & \xi_1\zeta_3 + \xi_3\zeta_1 & \xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2 \\ \eta_1\zeta_1 & \eta_2\zeta_2 & \eta_3\zeta_3 & \eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1 & \eta_1\zeta_3 + \eta_3\zeta_1 & \eta_2\zeta_3 + \eta_3\zeta_2 \end{bmatrix},$$

amely a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix}$$

harmadrendű matrix második hatványtranszformációja által keletkezett, vagyis

$$(15) \quad \mathbf{R} = \mathcal{H}_2(\mathbf{D}).$$

A (14) egyenlet megoldása — az együttható-matrix invertálása, valamint az \mathbf{U} transzformáló-matrix-szal való szorzás után

$$(16) \quad \mathbf{p} = -\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{q}$$

alakban adódik.

Felhasználva a ⁴⁾ lábjegyzetben tett megjegyzésünket, az \mathbf{R}^{-1} reciprokmatrix a (15) összefüggés alapján

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathcal{H}_2(\mathbf{D}^{-1})$$

hatványtranszformációval számítható.

A kapott eredményt behelyettesítjük a (16) egyenletbe — azaz balról szorozzuk az \mathbf{U} matrix-szal — végül eltolási transzformációval az eredeti koordinátarendszerre térünk vissza. Ha B_{ik} jelenti a (12) alatti \mathbf{B} matrix reciprokának elemeit, akkor eredményünk a következő szimmetrikus alakban írható:

$$\begin{bmatrix} p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{42} B_{12} & B_{43} B_{13} & B_{41} B_{14} & B_{42} B_{13} + B_{12} B_{43} & B_{42} B_{14} + B_{12} B_{44} & B_{43} B_{14} + B_{13} B_{44} \\ B_{32} B_{12} & B_{33} B_{13} & B_{34} B_{14} & B_{32} B_{13} + B_{12} B_{33} & B_{32} B_{14} + B_{12} B_{34} & B_{33} B_{14} + B_{13} B_{34} \\ B_{22} B_{12} & B_{23} B_{13} & B_{24} B_{14} & B_{22} B_{13} + B_{12} B_{23} & B_{22} B_{14} + B_{12} B_{24} & B_{23} B_{14} + B_{13} B_{24} \\ B_{42} B_{32} & B_{43} B_{33} & B_{44} B_{34} & B_{42} B_{33} + B_{32} B_{43} & B_{42} B_{34} + B_{32} B_{44} & B_{43} B_{34} + B_{33} B_{44} \\ B_{42} B_{22} & B_{43} B_{23} & B_{44} B_{24} & B_{42} B_{23} + B_{22} B_{43} & B_{42} B_{24} + B_{22} B_{44} & B_{43} B_{24} + B_{23} B_{44} \\ B_{32} B_{22} & B_{33} B_{23} & B_{34} B_{24} & B_{32} B_{23} + B_{22} B_{33} & B_{32} B_{24} + B_{22} B_{34} & B_{33} B_{24} + B_{23} B_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{xx} \\ q_{yy} \\ q_{zz} \\ q_{xy} \\ q_{xz} \\ q_{yz} \end{bmatrix}$$

Ebben a megoldásban szereplő minörök az egyes tetraéder-lapoknak valamelyik koordinátasíkra való merőleges, irányított vetületét jelentik.

IRODALOM

- [1] ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. Teubner, Leipzig, 1899—1916.
- [2] C. C. MAC DUFFEE: *The theory of matrices*. Springer, Berlin, 1933.
- [3] SCHOLTZ Á.: „A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagrammum mysticum tétele.” *Műegyetemi Lapok* 2 (1877) 65—71.
- [4] Á. SCHOLTZ: „Sechs Punkte eines Kegelschnittes.” *Archiv der Mathematik* 62 (1878) 317—324.
- [5] HUNYADI J.: „A másodfokú felületek elméletéhez.” *Értekezések a matematikai tudományok köréből* 7 (1879) No. 5.

[6] HUNYADI J.: „A másodfokú görbék és felületek meghatározásáról.” *Értekezések a matematikai tudományok köréből* 7 (1880) No. 18.

[7] E. HUNYADI: „Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades.” *Journal für Mathematik* 83 (1877) 76—85.

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ ХУНЯДЬИ-ШОЛЬЦА К ТЕОРИИ РЕШЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Е. Эгервари

Резюме

Определение стержневых усилий в фермах на шарнирах, нагруженных равновесной системой сил, по общей теории решетчатых конструкций приводит к такой системе линейных уравнений, в которой число уравнений в плоскости на три, в пространстве на шесть больше числа неизвестных. Выполняемость уравнений обеспечивается условиями равновесия внешних сил, приложенных к ферме в шарнирах. Необходимость считаться этими условиями равновесия при решении уравнений, обычно приводит к необходимости исключения неизвестных, которое нарушает симметрию первоначальных уравнений, и тем самым делает выкладки необозримыми.

В настоящей статье мы излагаем такой метод трактовки — по крайней мере для простейших конструкций, (в плоскости для треугольника, в пространстве для тетраэда) — который является вполне симметричным относительно всех определяющих данных и для неизвестных стержневых усилий дает простую явную формулу.

С этой целью мы определяем действующую на конструкцию равновесную систему сил в плоскости треугольника, в пространстве шестью независимыми параметрами, обеспечивающими автоматическое выполнение условий равновесия. Применение этих параметров приводит к системе уравнений с невырожденной матрицей неожиданно симметричного строения. После элементарных преобразований эта матрица коэффициентов оказывается тождественной с матрицей, введенной впервые в рассмотрение Гунядьи и Шольцом в их работах исторического значения, посвященных теории поверхностей второго порядка. Так как эта матрица, являющаяся в случае пространственной проблемы матрицей шестого порядка, получается из матрицы третьего порядка с помощью второго степенного преобразования, поэтому для нее очень легко находится обратная матрица, так что для искомых стержневых усилий получается ясный и симметричный результат.

ÜBER EINE ANWENDUNG DER HUNYADI-SCHOLTZSCHEN MATRIZEN IN DER THEORIE DER EBENEN UND RÄUMLICHEN FACHWERKEN

J. EGERVÁRY

Zusammenfassung

Für die Berechnung der Stabspannungen, welche in einem tragfähigen Fachwerke mit lauter gelenkigen Stabverbindungen unter der Wirkung eines mit 0 äquivalenten Kräftesystems entstehen, liefert die allgemeine Theorie der Fachwerke ein lineares Gleichungssystem, bei welchem die Anzahl der Gleichungen die Anzahl der Unbekannten im Falle der ebenen Fachwerke um 3, und bei räumlichen Fachwerken um 6 übertrifft. Die Erfüllbarkeit dieser Gleichungen wird durch das Bestehen von 3 bzw. 6 Bedingungsgleichungen gesichert, welche zwischen den Komponenten eines mit 0 äquivalenten Kraftsystems bestehen müssen. Durch die Berücksichtigung dieser Bedingungsgleichungen wird die Auflösung der Gleichgewichtsgleichungen im allgemeinen unsymmetrisch und deshalb sehr unübersichtlich.

In der vorliegenden Arbeit wird, wenigstens für die einfachsten Fachwerke (Dreieck in der Ebene, und Tetraeder im Raume), ein Lösungsverfahren angegeben, welches in allen Bestimmungsstücken vollkommen symmetrisch verläuft, und für die Stabspannungen einfache, explizite Formeln liefert.

Zu diesem Zwecke wird ein mit 0 äquivalentes Kraftsystem in der Ebene durch 3, im Raume durch 6 unabhängige Parameter bestimmt. Werden die ursprünglichen Gleich-

gewichtsgleichungen derartig umgeformt, dass auf den rechten Seiten an Stelle der Kraftkomponenten die oben erwähnten Kraftparameter erscheinen, so erhält man für die Bestimmung der Stabspannungen ein Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix quadratisch, im allgemeinen nichtsingulär und überraschende Symmetrieeigenschaften besitzt. Diese Matrix erweist sich nach einer elementaren Umformung mit derjenigen Matrix identisch, welche wohl zuerst von *Hunyadi* und *Scholtz* in ihren grundlegenden Arbeiten über die Flächen zweiten Grades untersucht worden ist. Nachdem diese Matrix, welche beim räumlichen Problem von sechster Ordnung ist, durch zweite Potenztransformation aus einer Matrix dritter Ordnung erzeugt werden kann, lässt sie sich auch äusserst leicht invertieren und auf diesem Wege ergeben sich übersichtlich und symmetrisch gebaute Endformeln für die gesuchten Stabspannungen.

VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA BIZONYOS METEOROPATOLÓGIAI JELENSÉGEK VIZSGÁLATÁNÁL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

H. v. Schelling [1] munkájában, amely 1941-ben jelent meg, eljárást közöl annak megállapítására, hogy egy bizonyos eseménysorozat (biológiai jelenségek) úgy tekinthető-e, mint amely egy másik eseménysorozat (klimatikai jelenségek) hatására iött létre. *Schelling* módszert közöl annak megállapítására, hogy a hatás jelentős (szignifikáns) vagy jelentéktelen-e. *Schelling* eme módszerét hazai orvoskutatók, *dr Kérdő Imre* [2], [3] és *dr Takácsy László* [4] is átvették kísérleti adataik feldolgozására. Ezen munkáikban *Kérdő* és *Takácsy* azzal a kérdéssel foglalkoznak, hogy meteorológiai frontok előfordulásai hatással vannak-e bizonyos biológiai elváltozásokra. *Schelling* módszerét a szakemberek általában általános érvényűnek tekintik, bár *Schelling* nem foglalkozott a megengedhető alkalmazási terület vizsgálatával. Ezek a tények szükségessé tették annak megvizsgálását, hogy *Schelling* módszere milyen körülmények között alkalmazható, illetve adott körülmények között milyen módszert kell követni a kérdéses hatás kimutatására. Ezen célokat szem előtt tartva *dr Juvancz Iréneusz* kezdeményezett egy megbeszélést, amelyen *dr Kérdő Imre* és *dr Takácsy László* felvetették a megoldandó problémákat, és megadták a szükséges tájékoztatást, továbbá *Takács Lajos* a Meteorológiai Intézet részéről adott értékes felvilágosításokat a meteorológiai frontok törvényszerűségére vonatkozóan. E helyen is köszönetet mondunk mindannyiuknak a problémák felvetéséért és értékes felvilágosításaiért.

A most következő tárgyalás *Schelling* matematikai módszerének kritikájával foglalkozik, és a sztochasztikus folyamatok elméletére támaszkodva a kérdésnek az eddiginél mélyebb analizisét adja meg. Ennek eredményeképpen egy olyan kiértékelési eljárást adunk meg, amely a jelenségek széles körére alkalmazható.

Külön is köszönetet mondunk *dr Juvancz Iréneusz*nak, akivel jelen dolgozat elkészülte során a felmerülő kérdéseket megvitattuk, és aki értékes tanácsaival segítette a munka elkészültét. Továbbá köszönettel tartozunk *dr Takácsy Lászlónak*, aki [5] munkájában közölt kísérleti adatait rendelkezésünkre bocsátotta az elmélet illusztrálásához. Végül köszönet illeti *Fischer Jánost* a numerikus számítások elvégzésének irányításáért, valamint *Koós Erzsébetet* és *Major Imrénét* a számítások elvégzéséért.

1. §. A probléma kitűzése

Jelen értekezésünkben a problémát tisztán matematikai szempontból tárgyaljuk, és annak megállapításával kívánunk foglalkozni, hogy két eseménysorozat, mondjuk $\{t_n\}$ és $\{u_n\}$ előfordulási pontjai között fennáll-e valamilyen kapcsolat vagy sem, azaz az egyik sorozat eseményei hatást gyakorolnak-e a másik sorozat eseményeinek bekövetkezési időpontjaira, vagy az utóbbiak az előzőktől függetleneknek tekinthetők-e. A problémát természetesen nem ebben az általános alakjában tárgyaljuk, hanem speciális feltevéseket teszünk a $\{t_n\}$ és $\{u_n\}$ sorozat törvényszerűségére. Mégpedig feltesszük, hogy: a) $\{t_n\}$ Poisson-folyamatot alkot, b) $\{t_n\}$ rekurrens folyamatot alkot és $\{u_n\}$ mindkét esetben Poisson-folyamatot alkot. Ezután megállapítjuk, hogy függetlenséget feltételezve a két sorozatnak milyen viszonyban kell állnia egymással, és megnézzük, hogy a valóságos helyzet ettől jelentősen vagy jelentéktelenül tér-e el. Az előbbi esetben hatás feltételezésével élhetünk.

Kérdő és Takácsy példáiban a $\{t_n\}$ sorozat a meteorológiai frontok előfordulási pontjait jelöli az $\{u_n\}$ sorozat pedig a biológiai hatások bekövetkezésének időpontjait.

Meggondolásainkban a $\{t_n\}$ és $\{u_n\}$ sorozat adatait pontosaknak fogjuk tekinteni, és nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy ezek egyáltalában megállapíthatók-e, illetve milyen hibák lépnek fel ezek meghatározásánál.¹⁾

2. §. H. v. Schelling módszeréről

Schelling eljárása a következő: tekinti az időtengelyt, annak origójául rendre a $\{t_n\}$ időpontokat választja, és minden egyes t_n -hez viszonyítva ezen az időtengelyen feltünteti az $\{u_n\}$ időpontok helyzetét. Így az időtengelyen egy pontsokaságot nyer. Ha ezen pontok az origó körül csoportosulnak, akkor beszélhetünk hatásról, különben nem. Schelling az időtengelyt α nagyságú szakaszokra osztja (Schellingnél $\alpha = 1$ nap, Kérdőnél és Takácsynál $\alpha = 8$ óra), mégpedig úgy, hogy az origó egy szakasz közepére esik, és ezen középső szakasztól jobbra és balra ugyanannyi szakaszt tekint. Legyen az ilyen módon tekintett szakaszok száma r . (r páratlan, mondjuk $r = 2m + 1$.) Jelölje v_i^* ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) az egyes szakaszokra eső pontok számát. A számozás v_{-m}^* -tól v_m^* -ig történik sorrendben haladva. Schelling most a maximális és minimális v_i^* különbségét veszi: $\eta_r^* = \max_{i,j} (v_i^* - v_j^*)$, ($i, j = 0,$

$\pm 1, \dots, \pm m$) és elosztja $\sqrt{2N_r/r}$ -rel, ahol $N_r = \sum_{i=-m}^m v_i^*$ az összes tekintetbe

vett észlelések száma. Schelling a hatást jelentősnek minősíti, ha $\eta_r^*/\sqrt{2N_r/r} > f_r$, egyébként pedig jelentéktelennek. Schelling f_r értékeire a következő táblázatot közli:

¹⁾ Megjegyezzük, hogy a Magyar Tudományos Akadémia IV. Osztályának Meteorológiai Főbizottsága 1955. szeptember 2-i ülésén felvette munkatervébe a meteoropatológiai kérdések tanulmányozásához szükséges módszerek kidolgozását, és e munkával dr. Aujezsky Lászlót, dr. Juwancz Iréneusz és dr. Kérdő Imrét bízta meg.

r	f_r	r	f_r	r	f_r	r	f_r
2	3,00	7	3,51	12	3,67	17	3,76
3	3,20	8	3,55	13	3,69	18	3,78
4	3,32	9	3,59	14	3,71	19	3,79
5	3,40	10	3,62	15	3,73	20	3,80
6	3,46	11	3,64	16	3,75	21	3,82

Schelling nem közli azt, hogy miként jutott a fenti eredményre. Az a tény, hogy nem követeli meg, hogy v_0^* legyen a maximális v_i^* , arra utal, hogy megengedi, hogy a hatás állandó időtartammal késsen, illetve siessen a kiváltó okhoz képest. Továbbá valószínűleg feltételezi, hogy függetlenség esetén az egyes szakaszokba eső észlelések számai, a v_i értékek, egymástól független, egyforma várható értékű Poisson-eloszlású változók. Ekkor v_i várható értékének becslése: $\mathbf{M}\{v_i\} \cong N_r/r$, és mivel két tetszőleges v_i és v_j érték ($i \neq j$) különbségének a szórásnégyzete, $\mathbf{D}^2\{v_i - v_j\} = 2 \mathbf{D}^2\{v_i\} = 2 \mathbf{M}\{v_i\}$, tehát $\mathbf{D}\{v_i - v_j\} \cong \sqrt{2N_r/r}$. *Schelling* ehhez viszonyítja a tényleg észlelt η_r^* különbséget, és ha ez a hányados f_r -nél nagyobb, akkor a hatást jelentősnek (szignifikánsnak) minősíti.

Schelling megfontolásának részleteit nem ismerjük, de látszik, hogy a tényleg észlelt η_r^* értéket a függetlenség hipotézisével számított $\mathbf{D}\{v_i - v_j\}$ értékkel kívánja összehasonlítani. Ez az eljárás helyes és szokásos. Hiba azonban az, hogy $\mathbf{D}\{v_i - v_j\}$ becslésére olyan mennyiségeket (N_r) is felhasznál, amelyeknek értéke függ a hatás milyenségétől, és így nem tekinthető a függetlenség esetére vonatkozó érték becslésének. Továbbá nem tudjuk, hogy miképpen nyerte *Schelling* az f_r értékeket, de látszik, hogy rögzített valószínűségi szint mellett f_r -nek gyorsabban kellene növekednie r -rel. Végül *Schelling*-nél nem történik utalás α és r helyes megválasztására. Továbbá módszeréből nem derül ki alkalmazásának érvényességi köre, ami pedig annak veszélyét rejti magában, hogy olyankor is alkalmazzák, amikor nem szabad.

Most következő tárgyalásunkban igyekszünk a fent felsorolt hiányosságokat kiküszöbölni és *Schelling* közelítő eljárásánál általánosabban alkalmazható módszert megadni.

3. §. A probléma megoldása

A következőkben feltesszük, hogy az $\{u_n\}$ időpontokat a $\{t_n\}$ időpontok környezetében *Schelling* diagrammjához hasonlóan ábrázoljuk, és megállapítjuk az egyes α nagyságú közökbe eső v_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) mennyiségeket. Mégpedig vizsgálatunk vonatkozzék egy T hosszúságú időszakaszra, azaz csak azon $\{u_n\}$ időpontokat tekintjük, amelyek beleesnek ebbe a szakaszba. Legyen ismét a tekintetbe vett szakaszok száma $r = 2m + 1$. A következőkben bizonyos feltevésekkel élünk a $\{t_n\}$ és $\{u_n\}$ sorozatokra. Feltesszük, hogy a két sorozat egymástól független, és így megállapítjuk, hogy a $\{v_i\}$ változók eloszlása milyen törvényszerűségeket követ. Ezután megnézzük, hogy a $\{v_i^*\}$ konkrét észlelési adatok jelentős eltérést mutatnak-e a függetlenség feltételezésével indokolható értékektől. Ha az eltérés jelentős, úgy hatásról beszélünk, különben pedig nem.

A meteorológiai frontok törvényszerűségére vonatkozóan a következő feltevésekkel élünk:

a) Bármely időpontban a korábban előforduló frontok semilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező frontokra, és a frontok folyamata bármely időponttól számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

Matematikailag ez a feltevés ekvivalens azzal, hogy feltesszük, hogy a frontok folyamata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ekkor a frontok közötti távolságok átlaga, $\tau = 1/\lambda$ és szórása $\sigma = 1/\lambda$.

b) Az egyes frontok létrejötte után a megelőző frontok semilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező frontokra, és a frontok folyamata minden egyes front előfordulásától számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

Matematikailag ez a feltevés a következővel ekvivalens: A $\{t_n\}$ sorozatban a szomszédos t_n időpontok közötti távolságok egyforma eloszlású független valószínűségi változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvényével. Feltesszük, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlás, átlaga, τ , és szórása, σ , végesek.

A biológiai hatások előfordulási pontjairól, az $\{u_n\}$ sorozatról feltesszük, hogy μ (állandó) eseménysűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek előfordulási pontjaival egyeznek meg.

A meteorológiai frontok törvényszerűségére tett a), illetve még inkább a b) feltevés gyakorlatilag elég jól megállja a helyét. A fentieknél általánosabb feltevések már igen nagy bonyodalmakra vezetnének a matematikai tárgyalásban. Ami a biológiai hatások folyamatát illeti, ha a $\{t_n\}$ sorozattól való függetlenséget tételezünk fel, úgy csakis Poisson-folyamat feltevésének van létjogosultsága.

Feltesszük végül, hogy mindezen folyamatok végtelen hosszú ideje tartanak már. Ekkor stacionárius állapot valósul meg, és vizsgálatainkban stacionárius folyamat T hosszúságú időintervallumára szorítkozunk.

A következőkben a $\{v_i\}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) változók eloszlásának a tanulmányozásával foglalkozunk, majd ismertetjük a kiértékelés módszerét. Először csak az eredményeket közöljük, a bizonyításokat pedig később adjuk meg. Tárgyalásunkat két részre bontjuk aszerint, amint a $\{t_n\}$ sorozat a) Poisson-folyamatot, b) rekurrens folyamatot alkot.

a) *Poisson-folyamat esete.* Tegyük fel, hogy a meteorológiai frontok $\{t_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot, a biológiai megfigyelések pedig az előzőtől független μ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot. Ebben az esetben a Schelling-féle diagramm egyes oszlopaiban levő észlelések számai, a $\{v_i\}$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak. Közös várható értékük

$$(1) \quad M\{v_i\} = \lambda\mu aT,$$

és szórásnégyzetük

$$(2) \quad D^2\{v_i\} = \lambda\mu aT(1 + \lambda a + \mu a) + \dots,$$

T -nél kisebb nagyságrendű tagoktól eltekintve.

A v_i és v_j változók ($i \neq j$) korrelációs koefficiensének határértéke $T \rightarrow \infty$ esetben

$$(3) \quad \varrho(v_i, v_j) = \frac{(\lambda + \mu) a}{1 + (\lambda + \mu) a}.$$

Ezen formulákban a T és α mennyiségek előre rögzített értékek, a λ és μ ismeretleneket pedig a vizsgált észlelések alapján kell meghatározni. Ha a T hosszúságú időszakasz alatt N_1 meteorológiai front fordult elő és N_2 biológiai megfigyelés, úgy a következő becsléssel élhetünk:

$$\lambda \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{és} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T}$$

Ezen becslések alkalmazásával

$$(4) \quad \mathbf{M} \{v_i\} \cong \frac{N_1 N_2}{T} \alpha,$$

$$(5) \quad \mathbf{D}^2 \{v_i\} \cong \frac{N_1 N_2}{T} \alpha \left[1 + \frac{(N_1 + N_2) \alpha}{T} \right],$$

és

$$(6) \quad \varrho(v_i, v_j) \cong \frac{(N_1 + N_2) \alpha / T}{1 + (N_1 + N_2) \alpha / T}$$

írható jó közelítéssel. Ezen becslések javára írandó, szemben *Schellingé*vel, hogy nem tartalmaznak olyan mennyiségeket, amelyek a hatás-diagrammból lettek véve.

Tulajdonképpen a $\{v_i\}$ változók együttes eloszlásának a meghatározása lenne a fő cél, ami azonban igen nehéz feladat. Ezért közelítő megoldáshoz folyamodunk, és a $\{v_i\}$ változók együttes eloszlására jobb híján normális eloszlást tételezünk fel a megadott paraméterekkel. Mint ismeretes, a többdimenziós normális eloszlás egyértelműen meg van határozva az átlagok, szórások és a korrelációs koefficiensek ismeretében. Egyébként a többdimenziós normális eloszlás feltételezése indokolt is, ugyanis a $\{v_i\}$ változóknak a T időtartamtól való függését vizsgálva, jó közelítéssel független növekményű sztochasztikus folyamatot nyerünk, ahonnan következik, hogy a $\{v_i\}$ változók együttes eloszlása közelítőleg aszimptotikusan normális. A következőkben tehát tegyük fel, hogy a $\{v_i\}$ változók együttes eloszlása normális a (4), (5) és (6) által meghatározott paraméterekkel. A $\varrho(v_i, v_j)$ korrelációs koefficiens jelölje egyszerűen ϱ , és legyen $\mathbf{D} \{v_i\} = D$.

A függetlenség feltevésének eldöntésére azt kívánjuk megállapítani, hogy az észlelt $\{v_i^*\}$ értékek tekinthetők-e a fenti törvénynek eleget tevő $\{v_i\}$ változók megfigyelt értékeinek. Ugyanis minél kisebb ennek a valószínűsége, annál biztosabban következtethetünk hatás létezésére. Indokoltnak látszik az $\eta_r = \max_{i,j} (v_i - v_j)$ változó vizsgálata, ugyanis ez a mennyiség érzékenyen tükrözi a hatást. Ha hatás mutatkozik, akkor bizonyos v_i értékek megnőnek, míg mások lecsökkennek. Az η_r változó eloszlásfüggvénye explicite nem határozható meg, de táblázatozva megtalálható abban az esetben, ha $\varrho = 0$. (Lásd például [6].)

I. táblázat

r	$P_\lambda = 0,50$	$P_\lambda = 0,60$	$P_\lambda = 0,70$	$P_\lambda = 0,80$	$P_\lambda = 0,90$	$P_\lambda = 0,95$	$P_\lambda = 0,99$	$P_\lambda = 0,999$	$P_\lambda = 0,9995$
2	0,95	1,20	1,47	1,81	2,33	2,77	3,64	4,65	4,92
3	1,59	1,83	2,09	2,42	2,90	3,31	4,12	5,06	5,31
4	1,98	2,21	2,47	2,78	3,24	3,63	4,40	5,31	5,56
5	2,26	2,48	2,73	3,04	3,48	3,86	4,60	5,48	5,72
6	2,47	2,69	2,94	3,23	3,66	4,03	4,76	5,62	5,86
7	2,65	2,86	3,10	3,39	3,81	4,17	4,88	5,73	5,96
8	2,79	3,00	3,24	3,52	3,93	4,29	4,99	5,82	6,04
9	2,92	3,12	3,35	3,63	4,04	4,39	5,08	5,90	6,12
10	3,02	3,23	3,46	3,73	4,13	4,47	5,16	5,97	6,19
11	3,12	3,32	3,55	3,82	4,21	4,55	5,23	6,04	6,25
12	3,21	3,41	3,63	3,90	4,29	4,62	5,29	6,09	6,31
13	3,29	3,48	3,70	3,97	4,35	4,69	5,35	6,14	6,36
14	3,36	3,55	3,77	4,03	4,41	4,74	5,40	6,19	6,40
15	3,42	3,62	3,83	4,09	4,47	4,80	5,45	6,23	6,45
16	3,48	3,67	3,89	4,14	4,52	4,85	5,49	6,28	6,49
17	3,54	3,73	3,94	4,19	4,57	4,89	5,54	6,32	6,52
18	3,59	3,78	3,99	4,24	4,61	4,93	5,57	6,35	6,56
19	3,64	3,83	4,03	4,29	4,65	4,97	5,61	6,38	6,59
20	3,69	3,87	4,08	4,33	4,69	5,01	5,65	6,41	6,62

Az I. táblázat a

$$(7) \quad P\{\eta_r \geq \lambda D\} = P_\lambda$$

valószínűség összetartozó λ és P_λ értékeit tünteti fel különböző r -ekre.

Arra az esetre, ha a ρ korrelációs koefficiens zérustól különbözik, nincsenek táblázatok, de szerencsére az előbbi táblázat összetartozó λ és P_λ értékei felhasználhatók η_r eloszlásának meghatározására ebben az általánosabb esetben is, ugyanis $\rho \neq 0$ -ra fennáll, hogy

$$(8) \quad P\left\{\eta_r \geq \lambda D \frac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma(r-1)\rho + (r-1)[1 + (r-2)\rho]}}{\gamma + 1}\right\} = P_\lambda,$$

ahol

$$(9) \quad \gamma = \frac{1 + (r-2)\rho + \sqrt{1 + (r-2)\rho - (r-1)\rho^2}}{\rho}.$$

Amint látjuk, $\rho = 0$ és $\rho \neq 0$ esetben egyaránt meghatározható η_r eloszlása. Ezen eloszlás ismeretében pedig eldönthetjük, hogy a kísérletileg talált $\eta_i^* = \max_{i,j} (\nu_i^* - \nu_j^*)$ érték tekinthető-e a fenti feltevessel nyert η_r változó megfigyelt értékének. A döntés a hipotézis-vizsgálat szokásos módszere szerint hajtható végre.

Az elmondottak alapján a következő vizsgálati módszert követhetjük: először megválasztjuk r és α értékeit. Mint említettük, $r = 2m + 1$. r megválasztásával kapcsolatban az a helyzet, hogy minél nagyobbra választjuk, annál szigorúbbnak mondható eljárásunk, ugyanis nagy r érték esetén elég nagy η_r^* értékeket sem tekinthetünk jelentősen kiugrónak. Nem célszerű azonban r -et úgy megválasztani, hogy $m\alpha > \tau$ legyen, ugyanis ekkor már távolabbi frontok hatáskörébe esnek az észlelések. Ezért javasoljuk az $m \approx \tau/\alpha$

választást. Az α érték megválasztására a következő szempontok mérvadók. Ha kiértékelésre a (7) képletet akarjuk felhasználni, amely a legegyszerűbb, de amely csak $\varrho = 0$ esetén érvényes, úgy α -t úgy kell megválasztani, hogy ϱ értéke lehetőleg kicsiny legyen. Mivel ϱ α -val együtt nő, ezért α -t elegendő kicsinyre kell választani. A (8) alatti képlet alkalmazásánál ϱ miatt nem kell kikötést tenni α -ra, de α -t elég kicsire kell választani τ -hoz képest, és pedig annál kisebbre, minél szigorúbbnak vesszük a megengedett hatótávolságot. Miután r -et és α -t megválasztottuk, az (5) és (6) képlet alapján meghatározzuk D és τ értékét. A Schelling-féle diagrammból leolvassuk az $\eta_r^* = \max_i v_i^* - \min_i v_i^*$ különbséget és képezzük az

$$(10) \quad \frac{\eta_r^*}{D},$$

illetve

$$(11) \quad \frac{\eta_r^*}{D} \frac{\gamma + 1}{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma(r-1)\varrho + (r-1)[1 + (r-2)\varrho]}}$$

hányadost, aszerint, amint ϱ elhanyagolható, vagy sem. A P_λ -táblázat r -edik sorában megkeressük a fenti értéknek megfelelő λ -t, és a hozzá tartozó P_λ szolgáltatja azt a valószínűségi szintet, amellyel a hatás feltételezhető.

A (7) és (8) képletek nyeréséhez a következő gondolatmenet vezet. Ismeretes, hogy korrelálatlan normális együttes eloszlású változók egyúttal függetlenek is. Így, ha $\varrho = 0$, úgy a $\{v_i\}$ változók ugyanazon normális eloszlású független valószínűségi változók, azaz egy r - elemű minta elemei. Az η_r változó jelöli a minta terjedelmét, amelynek eloszlása normális alapsokaság esetén ismeretes. Ha $\varrho \neq 0$, akkor a $\{v_i\}$ változók egyforma normális eloszlású változók ugyan, de nem függetlenek. Ha azonban a

$$\xi_i = (\gamma + 1)v_i - \sum_{j=-m}^m v_j \quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm m$$

új változókat vezetjük be, ahol γ -t (9) definiálja, akkor a ξ_i változók is egyforma normális eloszlású változók lesznek, de már korrelálatlanok és következőleg függetlenek is lesznek. Így az új változókra (7) alapján fennáll, hogy

$$P \left\{ \frac{\max(\xi_i - \xi_j)}{D(\xi_i)} \geq \lambda \right\} = P_\lambda.$$

Ha most tekintetbe vesszük, hogy

$$\frac{\max(\xi_i - \xi_j)}{D(\xi_i)} = \frac{\gamma + 1}{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma(r-1)\varrho + (r-1)[1 + (r-2)\varrho]}} \frac{\max(v_i - v_j)}{D(v_i)}.$$

úgy nyerjük a (8) képletet.

b) *Rekurrens folyamat esete.* Tegyük fel most, hogy a meteorológiai frontok $\{t_n\}$ sorozatában a $t_n - t_{n-1}$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók, ugyanazon nem-rácsos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $F(x)$ átlaga τ és szórása σ . A biológiai megfigyelésekről pedig tegyük fel, hogy az előzőtől függetlenül μ esemény-sűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak. Jelölje most is $\{v_i\}$ a Schelling-diagrammban szereplő

értékeket. A $\{v_i\}$ valószínűségi változók most is egyforma eloszlásúak. Közös várható értékük

$$(12) \quad M\{v_i\} = \frac{\mu \alpha T}{\tau},$$

és szórásnégyzetük

$$(13) \quad D^2\{v_i\} = \frac{\mu \alpha T}{\tau} \left[1 + \frac{\mu \alpha \sigma^2}{\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} m(t) dt \right] + \dots,$$

eltekintve T -nél kisebb nagyságrendű tagoktól. Itt $m(t)$ jelenti egy meteorológiai fronttól számított t időtartamon belül előforduló újabb frontok várható számát. Ennek értéke

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

ahol $F_n(t)$ jelöli az $F(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n -szeres kompozícióját.

A v_i és v_j változók ($i < j$) korrelációs koefficiense $T \rightarrow \infty$ esetben:

$$(14) \quad \varrho(v_i, v_j) = \frac{\frac{\alpha \mu \sigma^2}{\tau^2} + \frac{1}{\alpha} \int_{(i-i)\alpha}^{(j-i+1)\alpha} m(t) dt - m((j-i)\alpha)}{1 + \frac{\alpha \mu \sigma^2}{\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} m(t) dt}.$$

Ezen formulákban rögzített T és α értékek mellett a τ, σ, μ paraméterektől és az $m(t)$ átlagfüggvényt kell megbecsülni. A meteorológiai frontok analíziséhez megadja τ, σ és $m(t)$ értékeit, és $\mu \cong N_2/T$, ha T idő alatt N_2 biológiai megfigyelés történt. A fenti képleteknek ily módon becsült értékei is azzal sa előnnyel rendelkeznek, hogy nem tartalmaznak olyan mennyiségeket, amelyeket a hatás-diagramm alapján kellene számítani. A Poisson-folyamat tárgyalásánál említett normális eloszlással való közelítés most is alkalmazható, és így az előbbi tárgyalás szinte szó szerint megismételhető. Ha α -t olyan kicsinyre választjuk, hogy $\varrho(v_i, v_j)$ elhanyagolható, úgy az

$$\frac{\eta_r^*}{D\{v_i\}}$$

mennyiség kiszámításával a (7) formula alapján dönthetünk a hatás létezéséről. Ha a $\varrho(v_i, v_j)$ mennyiségek nem hanyagolhatók el, akkor a (7) formulára való visszavezetés bonyolult transzformációk alkalmazását kívánja meg, mivel ekkor $\varrho(v_i, v_j)$ nem állandó, hanem függ a $j - i$ különbségtől. A legtöbb esetben azonban $\varrho(v_i, v_j)$ közel állandó, és ekkor egy átlagos ϱ bevezetésével a (8) kiértékelés is alkalmazható.

4. §. Az eredmények bizonyítása

Az előző fejezetben tárgyalt *a*) eset a *b*) eset speciális esetét képezi, mégpedig, ha *b*)-ben $m(t) = \lambda t$, $\tau = 1/\lambda$, $\sigma = 1/\lambda$, úgy nyerjük az *a*) esetet. Ezért külön *a*)-val nem foglalkozunk.

Az előrebecsült eredmények bizonyításához felhasználnuk néhány segédtevélt, amelyet [7] dolgozatunkban bizonyítottunk be.

Tegyük fel, hogy $\{t_n\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) időpontokban előfordul egy-egy esemény, ahol a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) időkülönbségek egyforma eloszlású független, pozitív valószínűségi változók ugyanazon $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy $F(x)$ átlaga, τ , és szórása, σ , végesek.

Feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ sorozat minden egyes eseményéhez hozzá van rendelve egy $f(t - t_n)$ amplitúdójú jel, ahol $f(u)$ csak véges hosszúságú intervallumban különbözik zérustól. Feltesszük továbbá, hogy az egyes jelek lineárisan szuperponálódnak (összeadódnak). Ilymódon az

$$\eta_t = \sum_{(n)} f(t - t_n)$$

sztochasztikus folyamatot nyerjük, amely 1 valószínűséggel létezik, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. [7] dolgozatunkban megmutattuk, hogy η_t egy stacionárius sztochasztikus folyamatot alkot. η_t várható értéke

$$(15) \quad \mathbf{M} \{ \eta_t \} = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

és második momentuma

$$(16) \quad \mathbf{M} \{ \eta_t^2 \} = \frac{1}{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt + 2 \int_0^{\infty} f_{11}(t) dm(t) \right],$$

ahol

$$f_{11}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u + t) du$$

és

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

ahol $F_n(t)$ jelöli az $F(t)$ függvénynek önmagával való n -szeres kompozícióját. Itt $m(t)$ jelenti egy $\{t_n\}$ sorozatbeli eseménytől számított t időtartam alatt előforduló újabb eseménynek várható számát.

Megjegyezzük, hogy ha az $f(u)$ függvény argumentumát lineárisan eltoljuk, úgy ezáltal az η_t folyamat sztochasztikus viselkedése nem változik meg; ez kifejezésre jut a fenti képletekben is. Ezen észrevétel alapján megengedhető, hogy az egyes jelek kezdőpontja a hozzájuk tartozó esemény idő-

pontjába toljuk, azaz, úgy tekinthető a helyzet, mintha az egyes események tényleg elindították volna a jeleket, és így az eseményeknek csak utóhatásuk van.

Ha speciálisan $\{t_n\}$ λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot, amikor is $m(t) = \lambda t$ és $\tau = 1/\lambda$, úgy

$$\mathbf{M}\{\eta_t\} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt.$$

A fenti segédtelemek segítségével kívánjuk a v_i változók várható értékét, szórásnégyzetét és korrelációs koefficiensét meghatározni.

Tekintsük a $\{t_n\}$ sorozatot, $\{u_n\}$ pedig legyen egy, a $\{t_n\}$ időpontoktól független, μ eseménysűrűségű Poisson-folyamat, amelyet $(0, T)$ intervallumban tekintünk. Készítsük el Schelling diagrammját, és jelölje v_i ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm m$) az egyes α hosszúságú közökbe eső észlelések számát.

Célunk a v_i változó tanulmányozása. Észrevevesszük, hogy v_i a következőképpen is megkapható. Tegyük fel, hogy minden egyes $\{t_n\}$ sorozatbeli esemény elindít egy α ideig tartó történést, és pedig a történet kezdőpontja t_n -től ($i - 1/2$) α távolságra van, és a $(0, T)$ intervallumban minden egyes $\{u_n\}$ sorozatbeli eseményt annyiszor számolunk, ahány történet éppen folyamatban van. Így megkapjuk v_i értékét. Az elmondottak viszont tovább egyszerűsíthetők, ugyanis egyszerűen tekinthetünk olyan történéseket, amelyek a t_n időpontokban kezdődnek és α ideig tartanak, és ekkor v_i -vel azonos eloszlást mutató valószínűségi változót nyerünk. A történéseket pedig definiálhatjuk

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq u \leq \alpha \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

időbeli lefolyású jelekkel, és azt mondhatjuk, hogy t időpontban E_k állapot van, ha $\eta_t = k$. Ha az $\{u_n\}$ Poisson-folyamatban $(0, T)$ időközben előforduló eseményeket annyiszorosan számítjuk, amennyi abban a pillanatban η_t értéke, úgy az események összege v_i -vel ekvivalens változót szolgáltat.

Jelölje most a $\{t_n\}$ sorozatban $(0, T)$ időközben előforduló események számát ξ_t változó, az E_0, E_1, E_2, \dots állapotokban való tartózkodási időket pedig $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ változók.

Ekkor nyilvánvalóan fennáll

$$(17) \quad \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots = T$$

és

$$(18) \quad \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \dots = \alpha\xi_T + \varepsilon_T.$$

Az utóbbi egyenlőség, jobboldalán csak $\alpha\xi_T$ -vel, nem pontos a $(0, T)$ intervallum szélein levő speciális helyzet folytán, ezért kell az ε_T hibatagot is szerepeltetni. Erre mindenesetre fennáll, hogy $\mathbf{M}\{\varepsilon_T\} = 0$ és $\mathbf{D}^2\{\varepsilon_T\}$ T -től független korlát alatt marad.

$\mathbf{M}\{v_i\}$ meghatározása. v_i összetevődik az $\{u_n\}$ Poisson-folyamat $(0, T)$ időközben előforduló k -szoros $(k = 1, 2, 3, \dots)$ multiplicitással számított eseményeinek számából. Ha τ_k állandó, úgy ezen feltétel mellett a Poisson-folyamatban τ_k idő alatt előforduló események várható száma $\mu\tau_k$, és mivel minden ilyen esemény k -szoros multiplicitással veendő, tehát a k -szoros multiplicitású eseményekből adódó adalék $k\mu\tau_k$. A keresett várható érték pedig

$$(19) \quad \mathbf{M}\{v_i\} = \mathbf{M}\{\mu\tau_1 + 2\mu\tau_2 + 3\mu\tau_3 + \dots\} = \mu T \mathbf{M}\{\eta_t\} = \frac{\mu a T}{\tau}.$$

Ugyanis

$$\mathbf{M}\{\tau_k\} = T \mathbf{P}\{\eta_t = k\}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{P}\{\eta_t = k\} = \mathbf{M}\{\eta_t\}$$

és (15) alapján

$$\mathbf{M}\{\eta_t\} = \frac{a}{\tau}.$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény (18) alapján is belátható, ha tekintetbe vesszük, hogy $\mathbf{M}\{\xi_T\} = \frac{T}{\tau}$ és $\mathbf{M}\{\varepsilon_T\} = 0$.

$\mathbf{D}^2\{v_i\}$ meghatározása. A szórásnégyzet a feltételes várható érték ismert definíciója alapján határozható meg:

$$(20) \quad \mathbf{D}^2\{v_i\} = \mathbf{M}\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \tau_k\right\} + \mathbf{D}^2\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \tau_k\right\}.$$

Itt most (16) alapján

$$\mathbf{M}\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \tau_k\right\} = \mu T \mathbf{M}\{\eta_t^2\} = \frac{\mu T}{\tau} \left[a + 2 \int_0^a m(t) dt \right],$$

ugyanis

$$\mathbf{M}\{\tau_k\} = T \mathbf{P}\{\eta_t = k\} \quad \text{és} \quad \mathbf{M}\{\eta_t^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbf{P}\{\eta_t = k\}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \tau_k\right\} &= \mu^2 \mathbf{D}^2\{a\xi_T + \varepsilon_T\} = \mu^2 a^2 \mathbf{D}^2\{\xi_T\} + \mu^2 \mathbf{D}^2\{\varepsilon_T\} + \\ &+ 2\mu^2 a \varrho(\xi_T, \varepsilon_T) \mathbf{D}\{\xi_T\} \mathbf{D}\{\varepsilon_T\}, \end{aligned}$$

ahol $\varrho(\xi_T, \varepsilon_T)$ a korrelációs együttható

Most, mint ismeretes

$$\mathbf{D}^2\{\xi_T\} = \frac{2}{\tau} \int_0^T \left[m(t) - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \right] du = \frac{\sigma^2}{\tau^3} T + \dots,$$

ahol jobboldalon elhagytuk a T -nél kisebb nagyságrendű tagokat. $\mathbf{D}^2\{ \varepsilon_T \}$ korlátos $(m(a) a^2 - \text{nagyságrendű})$. Így tehát végül

$$(21) \quad \mathbf{D}^2\{v_i\} = \frac{\mu T}{\tau} \left[a + \frac{\mu a^2 \sigma^2}{\tau^2} + 2 \int_0^a m(t) dt \right] + \dots,$$

eltekintve a T -nél kisebb nagyságrendű tagoktól.

Abban a speciális esetben, midőn $\{t_n\}$ λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot, érvényes, hogy $\mathbf{D}^2\{ \varepsilon_T \} = \frac{2}{3} \lambda a^3$ és

$$\mathbf{D}^2\{v_i\} = T \lambda \mu a (1 + \lambda a + \mu a) + \dots$$

$\varrho(v_i, v_j)$ meghatározása. A korrelációs koefficiens meghatározását úgy végezzük el, hogy először $v_i + v_j$ várható értékét és szórásnégyzetét határozzuk meg, és abból következtetünk $\varrho(v_i, v_j)$ -re. $v_i + v_j$ meghatározására pontosan azt az utat követjük, mint v_i meghatározásánál tettük, csak az $f(u)$ függvényt definiáljuk másképpen, mégpedig most feltesszük, hogy

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq u \leq a, (j-i)a \leq u \leq (j-i+1)a, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az E_k állapotot most is $\eta_t = k$ definiálja, és a $(0, T)$ időközben E_k állapotban töltött időt most is τ_k -val jelöljük. Ekkor (18)-hoz hasonlóan felírható, hogy

$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \dots = 2a\xi_T + \varepsilon'_T$$

ahol most $\mathbf{M}\{\varepsilon'_T\} = 0$ és $\mathbf{D}\{\varepsilon'_T\}$ T -ről független korlát alatt marad.

Ekkor (19)-hez hasonlóan azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{M}\{v_i + v_j\} = \frac{2\mu a T}{\tau},$$

és (20) szerint

$$\mathbf{D}^2\{v_i + v_j\} = \mathbf{M}\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \tau_k\right\} + \mathbf{D}^2\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \tau_k\right\},$$

ahol most

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \tau_k\right\} &= \mu T \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = \\ &= \frac{2\mu a T}{\tau} + \frac{2\mu T}{\tau} \left[2 \int_0^a m(t) dt + \int_{(j-i)a}^{(j-i+1)a} m(t) dt - a m[(j-i)a] \right], \\ \mathbf{D}^2\left\{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \tau_k\right\} &= \frac{4a^2 \mu^2 \sigma^2}{\tau^3} T + \dots \end{aligned}$$

ahol elhagytuk a T -nél kisebb nagyságrendű tagokat.

Ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\mathbf{D}^2\{v_i + v_j\} = \mathbf{D}^2\{v_i\} + 2\mathbf{D}\{v_i\} \mathbf{D}\{v_j\} \varrho(v_i, v_j) + \mathbf{D}^2\{v_j\},$$

és hogy $\mathbf{D}\{v_i\} = \mathbf{D}\{v_j\}$, úgy azt nyerjük, hogy

$$\varrho(v_i, v_j) = \frac{\mathbf{D}^2\{v_i + v_j\} - 2\mathbf{D}^2\{v_i\}}{2\mathbf{D}^2\{v_i\}}.$$

A korrelációs koefficiens mindjárt $T \rightarrow \infty$ esetre felírva azt kapjuk, hogy

$$(22) \quad \varrho(v_i, v_j) = \frac{\frac{a\mu\sigma^2}{\tau^2} + \frac{1}{a} \int_{(j-i)a}^{(j-i+1)a} m(t) dt - m[(j-i)a]}{1 + \frac{a\mu\sigma^2}{\tau^2} + \frac{2}{a} \int_0^a m(t) dt}.$$

Ha $\{t_n\}$ λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot, úgy speciálisan

$$\varrho(v_i, v_j) = \frac{(\lambda + \mu) a}{1 + (\lambda + \mu) a}$$

5. §. Példa

A következő illusztráló példát *Takácsy L.* [5] értekezésének adatai alapján számítottuk. *Takácsy* adatai 4 évi megfigyelésen alapulnak, amelyek az 1948. január 1-től 1951. december 31-ig terjedő időre vonatkoznak. $\{t_n\}$ jelöli a meteorológiai frontok előfordulási pontjait, $\{u_n\}$ pedig a biológiai jelenségek (hirtelen szívhalálozások) időpontjait.

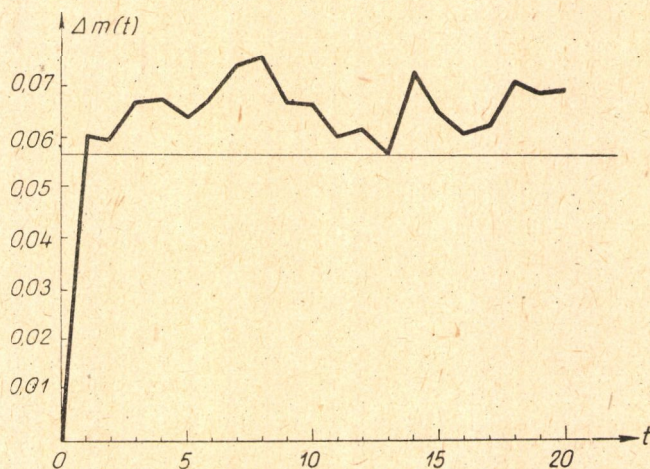
Ennél a példánál $T = 4$ év = 1461 nap = 35064 óra. A Meteorológiai Intézet által az *Időjárás* című folyóiratban közzétett adatok szerint ez idő alatt $N_1 = 1979$ meteorológiai front fordult elő. A frontok átlagos távolsága

$\tau = 17,64$ óra volt ($\tau \cong \frac{T}{N_1}$ becsléssel $\tau = 17,72$ órának adódik), és szórása

$\sigma = 21,09$ óra. Az $m(t)$ átlagfüggvény mellett a $\Delta m(t) = m(t) - m(t-1)$ különbséget is feltüntetjük, ahol t órában értendő. Ezekre a 4 évi adatok alapján a következő adódott (lásd: 1. ábra és 2. táblázat):

2. táblázat

t óra	$m(t)$	$\Delta m(t)$	t óra	$m(t)$	$\Delta m(t)$
1	0,0602	0,0602	11	0,7385	0,0602
2	0,1194	0,0592	12	0,8002	0,0617
3	0,1861	0,0667	13	0,8569	0,0567
4	0,2534	0,0673	14	0,9297	0,0728
5	0,3273	0,0639	15	0,9949	0,0652
6	0,3950	0,0677	16	1,0556	0,0607
7	0,4689	0,0739	17	1,1179	0,0623
8	0,5443	0,0754	18	1,1887	0,0708
9	0,6110	0,0667	19	1,2575	0,0688
10	0,6783	0,0673	20	1,3268	0,0693



1. ábra

A következőkben az $m(t)$ átlagfüggvényt a tapasztalatilag megállapított függvénnyel helyettesítjük. Első közelítésként azonban $\Delta m(t)$ közel állandónak tekinthető, és a $\Delta m(t) \cong \frac{N_1}{T} = \frac{1979}{35064} = 0,0564$ becsléssel élhetünk. Pontosabb számításnál az $F(x)$ eloszlásfüggvényt jó közelítéssel vehetjük Γ -eloszlásnak, mikor is

$$F'(x) = \frac{e^{-\omega x} \omega^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},$$

ahol $\omega = \tau/\sigma^2$ és $\beta = \tau^2/\sigma^2$, és ekkor

$$m'(t) = e^{-\omega t} \omega \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\omega t)^{h\beta-1}}{\Gamma(h\beta)}.$$

A megfigyelt halálozások száma ez alatt a 4 év alatt $N_2 = 1004$ volt. Így a μ eseménysűrűsége $\mu \cong N_2/T = \frac{1004}{35064} = \frac{1}{34,8 \text{ óra}}$ adódik.

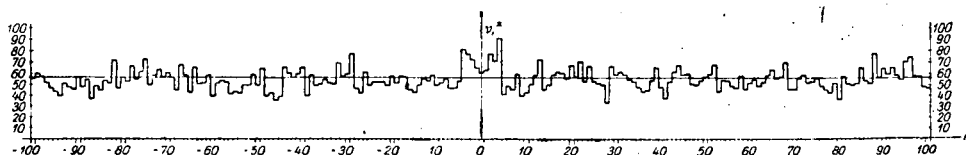
Schelling diagrammját $\alpha = 1$ órás közökre a következőkben adjuk meg (lásd: 2. ábra és 3. táblázat). Most

$$\mathbf{M}\{v_i\} \cong \frac{N_1 N_2}{T} \alpha$$

alapján az $\mathbf{M}\{v_i\} = 56,7$ becslést nyerjük az átlagra függetlenség feltételezése mellett.

3. táblázat

i	-100	-99	-98	-97	-96	-95	-94	-93	-92	-91	-90	-89	-88	-87	-86
v_i^*	56	60	57	52	47	44	40	51	48	46	57	48	55	37	49
i	-85	-84	-83	-82	-81	-80	-79	-78	-77	-76	-75	-74	-73	-72	-71
v_i^*	45	54	52	72	47	57	53	67	56	62	73	50	59	64	57
i	-70	-69	-68	-67	-66	-65	-64	-63	-62	-61	-60	-59	-58	-57	-56
v_i^*	61	57	45	68	59	43	66	51	52	59	40	52	54	53	42
i	-55	-54	-53	-52	-51	-50	-49	-48	-47	-46	-45	-44	43	-42	-41
v_i^*	44	43	50	50	59	50	65	50	53	46	49	66	61	57	60
i	-40	-39	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32	-31	-30	-29	-28	-27	-26
v_i^*	66	40	59	50	51	55	52	51	70	58	60	78	47	43	62
i	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11
v_i^*	50	53	53	53	50	58	52	58	57	46	43	50	56	54	59
i	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	1	2	3	4
v_i^*	50	52	56	47	47	53	82	78	73	66	61	64	78	72	92
i	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
v_i^*	41	49	47	60	40	43	51	59	73	46	50	59	62	61	56
i	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
v_i^*	68	57	71	53	67	53	52	50	34	67	59	62	59	55	53
i	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
v_i^*	48	44	45	54	66	48	38	53	62	68	59	60	51	50	54
i	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
v_i^*	57	60	68	44	55	54	49	47	58	46	52	55	49	52	59
i	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
v_i^*	64	56	57	70	46	46	56	59	52	53	56	49	46	43	52
i	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
v_i^*	37	58	51	50	52	66	54	51	78	57	65	60	66	59	55
i	95	96	97	98	99	100									
v_i^*	71	75	58	58	48	47									



2. ábra

Az $\alpha = 1$ órás diagramm ismeretében az $\alpha = 3$ órás, $\alpha = 5$ órás, ... diagrammok összevonással egyszerűen elkészíthetők.

A fent elmondottak ismeretében hozzákezdhetünk a kiértékeléshez. A kiértékelésnél célszerűen $\alpha = 3$ óra és $m = 6$, azaz $r = 2m + 1 = 13$ választással élhetünk. A kiértékelést először az a) alatti Poisson-féle közelítéssel, majd a b) alatti rekurrens folyamatokra vonatkozó közelítéssel véghez-
 zük. A fenti esetben $\eta_r^* = \max_i v_i^* - \min_i v_i^* (i = 0, \pm 1, \dots, \pm m)$ értéke $r = 13$ mellett $\eta_{13}^* = 106$.

a) Poisson-folyamat esete. Ekkor $\lambda \cong \frac{N_1}{T} = \frac{1}{17,72 \text{ óra}}$

és $\mu \cong \frac{N_2}{T} = \frac{1}{34,79 \text{ óra}}$, és így (5) szerint

$$D = D\{v_i\} \cong \sqrt{\frac{N_1 N_2 \alpha}{T} \left[1 + \frac{(N_1 + N_2) \alpha}{T} \right]} = 14,25$$

és (6) szerint

$$\varrho \cong \frac{(N_1 + N_2) \alpha / T}{1 + (N_1 + N_2) \alpha / T} = 0,2032.$$

Most

$$\frac{\eta_r^*}{D} \cong 7,44$$

és

$$\frac{\eta_r^*}{D} \frac{\gamma + 1}{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma(r-1)\varrho + (r-1)[1 + (r-2)\varrho]}} \cong 7,44 \cdot 1,11 \cong 8,26;$$

ugyanis most (9) szerint $\gamma = 24,0$.

Mindkét esetben a $P_\lambda > 0,9995$ valószínűségi szintet nyerjük az 1. táblázat 13. sorából ($\lambda = 6,36$ mellett $P_\lambda = 0,9995$).

b) Rekurrens folyamat esete. Ekkor $\tau \cong 17,64$ óra, $\sigma \cong 21,09$ óra, $\mu \cong 1/34,79$ óra és $m(t)$ értékeit a 2. táblázat tünteti fel. Ezen értékek segítségével $\alpha = 3$ órára és $r = 13$ esetre számítva

$$D = D\{v_i\} \cong \sqrt{\frac{\mu \alpha T}{\tau} \left[1 + \frac{\mu \alpha \sigma^2}{\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha m(t) dt \right]} \cong 14,83;$$

és a $\varrho(v_i, v_j)$ korrelációs koefficiensekre az adódik, hogy

$j-i$	1	2	3	4	5
$\varrho(v_i, v_j)$	0,1925	0,1978	0,1884	0,1836	0,1827

Most

$$\frac{\eta_r^*}{D} \cong 7,15$$

és (11) szerint $\varrho \cong 0,189$ középértékkel számolva

$$\frac{\eta_r^*}{D} \frac{\gamma + 1}{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma(r-1)\varrho + (r-1)[1 + (r-2)\varrho]}} \cong 7,15 \cdot 1,11 \cong 7,49;$$

ugyanis most (9) szerint $\gamma = 25,3$.

Most is mindkét esetben a hatás feltételezésének valószínűségére a $P_\lambda > 0,9995$ valószínűségi szintet nyerjük az 1. táblázat $r = 13$ -adik sorából.

Amint látjuk, az egyes kiértékelési módok nem adnak lényegesen különböző eredményeket. Ha a meteorológiai frontokra érvényes, hogy $\sigma \sim \tau$ és $\Delta m(t)$ közel állandó, úgy számolhatunk az *a*) alatti Poisson-féle közelítéssel. Ha ez nem áll fenn, akkor a *b*) alatti, rekurrens folyamatokra vonatkozó közelítéssel kell számolni. Az η_r^*/D szorzótényezőjének figyelembevétele mindkét esetben nem lényeges, de némileg finomítja az eredményt.

Schelling módszerénél ebben az esetben $\eta_r^* = 106$, $N_r = 2242$, és

$$\frac{\eta_r^*}{\sqrt{2N_r/r}} \cong 5,65$$

nagyobb a megadott $f_r = 3.69$ értéknél, és így a hatás Schelling szerint is jelentős.

IRODALOM

- [1] H. v. SCHELLING: „Die Bedeutung der statistischen Methodik für die Biologie” *Ergebnisse der Hygiene, Bakteriologie, Immunitätsforschung und Experimentelle Therapie* 24 (1941) 87—149.
- [2] KÉRDŐ I.: „Újabb vizsgálatok a frontátvonulásoknak a halálózásra való hatásáról” *Orvosi Hetilap* 90 (1949) 430.
- [3] KÉRDŐ I.: „Az orvos meteorológiai vizsgálatok módszertani kérdései és új feladatai” *Időjárás* 53 (1949) 232—237.
- [4] TAKÁCSY L.: „Tapasztalatok a frontátvonulások hatásáról, három évi boncolási anyag alapján” *Időjárás* 55 (1951) 199—209.
- [5] TAKÁCSY L.: „Hirtelen szívhalál orvos-meteorológiai vonatkozásai” *Nép-egészségügy* (sajtó alatt).
- [6] A. HALD: *Statistical tables and formulas*. Wiley, New-York, 1952.
- [7] TAKÁCSY L.: „Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 187—197.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ МЕТЕОРО-ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Л. Такач

Резюме

Настоящая работа задается целью установить, оказывает ли один ряд событий $\{t_n\}$ (климатические явления) влияние на точки происхождения другого ряда событий $\{u_n\}$ (биологические явления). Исследование основывается на том обычном принципе что мы предполагаем, что влияния нет и установим, с какой вероятностью оправдывается этим предположением некоторая вычисленная на основе данных опыта характеристическая величина. Если эта вероятность мала, то можно говорить о влиянии.

Наши рассуждения относятся к следующей модели: о ряде $\{t_n\}$ мы предполагаем, что он является или а) процессом Пуассона с плотностью событий λ или б) рекуррентным процессом, в котором разности времени $t_n - t_{n-1}$ являются независимыми положительными случайными величинами одинакового распределения с общей функцией распределения $F(x)$; распределение $F(x)$ не решетчатое, его среднее значение τ и дисперсия σ^2 конечны. Относительно ряда $\{u_n\}$ мы предполагаем в обоих случаях, что он является процессом Пуассона плотности μ . Все эти явления мы предполагаем продолжающимися с бесконечно давнего времени, т. е. мы предполагаем стационарное состояние.

Следуя теперь методу, изложенному в работе [1] *Х. фон Шеллинга*, мы изобразим расположение точек $\{u_n\}$ в окрестности точек $\{t_n\}$ следующим образом. Рассмотрим ось времени и принимая за начало координат последовательно точки t_n , расположим в их окрестности точки u_n . Пусть наши исследования относятся к промежутку времени T и разделим отрезок $\left[-\left(m + \frac{1}{2}\right)a, \left(m + \frac{1}{2}\right)a\right]$ на $r = 2m + 1$ частей длины a и подсчитаем точки в каждом интервале. Пусть будут эти величины в случае конкретных данных $v_{-m}^*, \dots, v_0^*, \dots, v_m^*$, в то время как в случае, получающемся при предположении независимости они были бы случайными величинами $v_{-m}, \dots, v_0, \dots, v_m$.

Для исследования влияния мы будем рассматривать величины $\eta_r^* = \max_i v_i^* - \min_i v_i^*$ соответственно случайные величины $\max_i v_i - \min_i v_i$.

На основе результатов, содержащихся в работе [7] мы определяем математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции переменных v_i ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm m$). Эти величины даются в случае а) формулами (1), (2) и (3) соответственно,

а в случае б) формулами (12), (13) и (14) соответственно, где $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$. Через $F_n(t)$

мы обозначаем n -кратную композицию функции распределения $F(t)$ с самым собой. Если в промежутке времени длины T произошло N_1 событий, принадлежащих к ряду $\{t_n\}$ и N_2 событий, принадлежащих к ряду $\{u_n\}$, то в случае а) мы можем пользоваться оценками $\lambda \cong N_1/T$ и $\mu \cong N_2/T$ и получить тем самым для (1), (2) и (3) оценки (4), (5) и (6). В случае б) надо еще оценить σ и $m(t)$. В обоих случаях а) и б) можно положить с хорошим приближением, что величины $\{v_{-m}, \dots, v_0, \dots, v_m\}$ имеют совместное нормальное распределение. Но тогда в случае а) можно определить распределение η_r , именно для него имеет место (8), где $D = D\{v_i\}$, ρ — коэффициент корреляции, а γ определяется через (9). Соответствующие друг другу значения вероятности P_λ и параметра λ даются таблицей 1. (см. *А. Халд* [6]). На основе сказанного в случае а) мы можем следовать такому способу: оценим значение D и ρ , из (11) определим λ и вероятность гипотезы влияния дается уровнем вероятности P_λ , соответствующим найденному значению λ , фигурирующему в r -ой строке таблицы 1. В случае б) распределение η_r уже сложнее, но с помощью введения среднего коэффициента корреляции ρ сказанное об а) можно применить в качестве приближения. На практике целесообразно выбрать $m \sim \tau/a$, а a следует выбрать тем меньшим, чем более точным предполагается значение дальности действия; иначе говоря a — допускаемая неопределенность дальности действия.

Для иллюстрации принципиальных результатов мы выбрали пример, приведенный в работе *Л. Такачи* [5], занимающемся воздействием метеорологических фронтов от 1. января 1948 г. до 1. декабря 1951 г. на случаи внезапной смерти от сердца.

Настоящая статья возникла так, что некоторые (И. Керде [2], [3], Л. Такачи [4]) считали, что изложенный в статье [1] метод для исследования вышеописанного явления Х. фон Шеллинга имеет общую силу. Однако, доктор Иренеус Юванц обратил внимание на то, что метод Шеллинга следует принимать с критикой и надо исследовать возможности его применения. В результате относящегося к этому разговору возникла настоящая статья, показывающая, что метод Шеллинга недостаточно основан математически, в нем скрываются источники ошибок и он не имеет общей силу. Напротив, изложенный в настоящей статье метод может быть применен к широкому кругу явлений и принимает во внимание также индивидуальные особенности исследуемого явления.

ANWENDUNG WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHER METHODEN BEI DER UNTERSUCHUNG GEWISSEY METEOROPATHOLOGISCHER ERSCHEINUNGEN

L. TAKÁCS

Zusammenfassung

Es wird das Problem untersucht, ob die Aufttrittspunkte einer Ereignissfolge $\{u_n\}$ (biologische Erscheinungen) durch eine andere Ereignissfolge $\{t_n\}$ (meteorologische Ereignisse) beeinflusst werden oder nicht? Die Untersuchung beruht auf dem üblichen Prinzip der Annahme, dass keine Beeinflussung besteht; sodann die Wahrscheinlichkeit bestimmt mit welcher der Wert einer gewissen auf Grund der Versuchsergebnisse berechneten charakteristischen Grösse durch diese Hypothese begründet werden kann. Ist diese Wahrscheinlichkeit klein, so kann von einer Beeinflussung gesprochen werden.

Die Überlegungen beziehen sich auf das folgende Modell: Von der Folge $\{t_n\}$ wird angenommen, dass sie a) : ein Poissonscher Prozess von Ereignisdichte λ , bzw. b) : ein rekurrenter Prozess ist, in welchem die Zeitdifferenzen $t_n - t_{n-1}$ unabhängige positive Zufallsveränderliche von gleicher Verteilung mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x)$ sind; $F(x)$ ist keine gitterartige Verteilung und ihr Mittelwert τ und Streuungsquadrat σ^2 existieren. Von der Folge $\{u_n\}$ wird es in beiden Fällen angenommen, dass sie ein Poissonscher Prozess von Ereignisdichte μ ist. Es wird angenommen, dass beide Prozesse stationär sind.

Dem Verfahren von H. v. Schelling [1] befolgend wird die Lagerung der Punkte $\{u_n\}$ in der Umgebung der Punkte $\{t_n\}$ folgendermassen dargestellt: Man betrachte die Zeitachse; die Punkte t_n der Reihe nach als Nullpunkt wählend, werden die Zeitpunkte u_k in deren Umgebung betrachtet, d. h. die Punkte mit Koordinaten $u_k - t_n$ in Bezug auf t_n . Die Untersuchungen sollen sich auf das Zeitintervall T beziehen. Man teile das Intervall $\left[-\left(m + \frac{1}{2}\right)a, \left(m + \frac{1}{2}\right)a\right]$ der Zeitachse in $r = 2m + 1$ Strecken von der Grösse a und zähle die Anzahl der in die einzelnen Strecken fallenden Punkte ab. Im Falle konkreter Angaben seien diese Anzahlen der Reihe nach $\nu_m^*, \dots, \nu_0^*, \dots, \nu_m^*$ im Falle aber, dass eine Unabhängigkeit angenommen wurde, die Zufallsveränderlichen $\nu_{-m}, \dots, \nu_0, \dots, \nu_m$.

Zur Untersuchung der Beeinflussung seien die Grösse $\eta_i^* = \max_i \nu_i^* - \min_i \nu_i^*$ bzw. die Zufallsveränderliche $\eta_i = \max_i \nu_i - \min_i \nu_i$ betrachtet.

Weiterhin werden der Mittelwert, das Streuungsquadrat und die Korrelationskoeffizienten der Veränderlichen ν_i ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm m$) auf Grund der in der Abhandlung [7] publizierten Ergebnisse bestimmt. Die Grössen werden im Falle a) der Reihe nach durch die Formeln (1), (2) und (3), im Falle b) aber durch die Formeln (12), (13),

(14) geliefert, wobei $m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_n(t)$. Durch $F_n(t)$ wird n -fache Faltung der Verteilungsfunktion $F(t)$ mit sich bezeichnet. Wenn während des Zeitintervalls der Länge T , N_1 bzw. N_2 Ereignisse, die der Folge $\{t_n\}$ bzw. $\{u_n\}$ angehören, vorkommen, dann kann man im Falle a) die Abschätzungen $\lambda \cong N_1/T$ und $\mu \cong N_2/T$ anwenden; man erhält die Abschätzungen (4), (5) und (6) für (1), (2) und (3). Im Falle b) sind auch σ

und $m(t)$ abzusätzen. Sowohl im Falle $a)$ als in $b)$ darf man mit guter Annäherung annehmen, dass die kumulative Verteilung der Veränderlichen $\{v_{-m}, \dots, v_0, \dots, v_m\}$ normal ist. Dann kann aber die Verteilung von η_r im Falle $a)$ bestimmt werden, und zwar gilt (8), wobei $D = D\{v_i\}$, ρ der Korrelationskoeffizient ist und γ durch (9) definiert ist. Die zusammengehörigen Werte der Wahrscheinlichkeit P_λ und des Parameters λ sind in der Tabelle 1. gegeben (siehe A. Hald [6]). Daher verfährt man im Falle $a)$ folgendermassen: man schätzt die Werte von D und ρ ab, rechnet λ (11) aus, und sucht dessen Wert in der r -ten Zeile der Tabelle 1. auf. Das zu diesem λ Wert gehörige Wahrscheinlichkeitsniveau liefert die Wahrscheinlichkeit der Hypothese einer Beeinflussung. Im Falle $b)$ ist die Verteilung von η_r bereits verwickelter; die Einführung eines mittleren Korrelationskoeffizienten ρ ermöglicht aber die angenäherte Anwendung dessen, was unter $a)$ festgelegt wurde. In der Praxis darf man zweckmässig $m \sim \tau/\alpha$ wählen und α soll desto kleiner gewählt werden, je mehr die Grösse der Reichweite als pünktlich angenommen wird, d. h. α ist die erlaubte Unsicherheit der Reichweite.

Zur Illustration der theoretischen Resultate wird auf ein Beispiel in L. Takácsy's hingewiesen, welcher sich auf die Frage des Einflusses der zwischen 1. I. 1948. und 1. XII. 1951. aufgetretenen meteorologischen Fronten auf das Vorkommen von plötzlichen Todesfällen bei Herzkranken bezieht.

Die für die Untersuchung der obigen Erscheinung in [1] vorgeschlagene Methode von H. v. Schelling wurde von mehreren Verfassern (I. Kérdó [2], [3], L. Takácsy [4]) angewandt. I. Juvancz machte darauf aufmerksam, dass Schelling's Methode mit Vorsicht angewendet werden sollte. Als Folge einer hieraufbezüglichen Besprechung ist die vorliegende Abhandlung entstanden. Sie zeigt, dass Schelling's Methode mathematisch ungenügend begründet ist, Fehlerquellen in sich verbirgt und keine Allgemeingültigkeit besitzt. Dagegen kann die in dieser Arbeit veröffentlichte Methode auf einen breiteren Kreis von Erscheinungen angewandt werden; sie zieht auch die individuellen Besonderheiten der untersuchten Erscheinung in Betracht.

KÖZELÍTŐ ELJÁRÁS CAUCHY-SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐKRE BONTÁSÁRA

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

[1] dolgozatunkban, amelyben bizonyos valószínűségi sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékének összetevőire bontásával foglalkoztunk, megemlítettük a Cauchy-sűrűségfüggvények esetét is (lásd: [1], 6. §.) a rájuk alkalmazandó eljárást azonban nem részleteztük.

Ezt a hiányt akarjuk részben pótolni ezzel a dolgozatunkkal. Közzölünk fogunk Cauchy-sűrűségfüggvények

$$g(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\pi \sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{(x - m_k)^2}{\sigma_k^2}} \equiv \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]}$$

alakú ($A_k, m_k, \sigma_k > 0$ konstansok) keverékének komponensekre bontására, illetve az ismeretlen paraméterek (elsősorban az m_k -k) meghatározására egy közelítő eljárást, amely hasonlít ahhoz, amelyet a [2] dolgozat 5. §-ában Gauss-függvények keverékére alkalmaztunk. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy — másokkal ellentétben — minden segédeszköz nélkül elvégezhető, és aránylag kevés munkával kvalitatíve használható eredményt szolgáltat.

1. §. Az eljárás

Kiindulunk tehát a következőkből: ismerjük Cauchy-sűrűségfüggvények

$$(1) \quad g(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]}$$

alakú keverékét, ahol az ismeretlen $A_k, \sigma_k > 0, m_k$ paraméterekről az eljárás lényegének megváltoztatása nélkül feltehetjük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, és az m_k -k mind különbözők. Meg kell határoznunk az A_k, σ_k, m_k paramétereket.

Feladatunkat a [1]-ben tárgyalt „szóráscsökkentés” módszerével oldhatjuk meg. Előállítunk általunk választott $0 < \lambda < \sigma_1$ paraméterrel, — egyedül $g(x)$ grafikonját használva fel — egy

$$(2) \quad g^*(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k (\sigma_k - \lambda)}{\pi [(\sigma_k - \lambda)^2 + (x - m_k)^2]}$$

függvényt. Ez szintén Cauchy-sűrűségfüggvények keveréke, amelyek maximuma ugyanott van, mint a $g(x)$ függvény megfelelő indexű komponenseinek maximuma, alakjuk azonban keskenyebb és magasabb. Ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, az 1-indexű komponens *Dirac- δ -vá* (»tűvé«) fajul el. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy több monoton növekvő λ -értékkel előállítva a $g^*(x, \lambda)$ függvényt, az 1-indexű komponens annál jobban »tűszerűen« kiemelkedik, minél közelebb jár az éppen alkalmazott λ a σ_1 értékhez. Erősen kiemelkedő »tű« tehát az $x = m_1$ értéknél fog mutatkozni, az ugyanekkor használt λ közelítőleg σ_1 értékét szolgáltatja, bár könnyebb σ_1 -et az ekkor általában már elég különváltan jelentkező első komponens görbéjéből határozni meg. Így tehát két paramétert már ismerünk; az eljárás megismétlését s ezzel újabb paraméterek, továbbá az A_k súlyok meghatározását, egyforma σ_k -k vagy m_k -k esetét stb. itt nem érintjük már, hiszen erről [1]-ben és [2]-ben bőven volt szó.

A $g^*(x, \lambda)$ függvény Fourier-transzformáción alapuló előállítását elvben letárgyaltuk [1]-ben; most más utat mutatunk a keresett paraméterek meghatározására.

Próbáljuk meg egyelőre itt is alkalmazni a [2] dolgozat 5. §-ában leírt módszert. Fejtsük λ szerint hatványsorba a $g^*(x, \lambda)$ függvényt. Ebben szerepel

$\left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g^*(x, \lambda) \right]_{\lambda=0}$. Ha $n = 2r$, ez kifejezhető $g(x)$ deriváltjaival, mert $g^*(x, \lambda)$ eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 g^*}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial x^2} = 0$$

differenciálegyenletnek, ebből pedig az következik, hogy

$$\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} = (-1)^r \frac{\partial^{2r} g^*}{\partial x^{2r}},$$

és így $g^*(x, \lambda)$ alakja folytán

$$(3) \quad \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} \right]_{\lambda=0} = (-1)^r \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial x^{2r}} \right]_{\lambda=0} = (-1)^r \frac{d^{2r} g}{dx^{2r}},$$

minthogy $g^*(x, 0) = g(x)$. A páratlan rendű deriváltak azonban nem fejezhetők ki $g(x)$ deriváltjaival, s ezért nem alkalmazhatjuk közvetlenül a [2] dolgozat 5. §-ában közölt eljárást.

Ha azonban megelégszünk az m_k paramétereknek és a komponensek számának a meghatározásával, könnyen szerkeszthetünk olyan függvényt, amely szintén végtelenbe futó *Dirac- δ -t* mutat az $x = m_1$ helyen, ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, — *bár típusa már nem $g^*(x, \lambda)$ típusa* — emellett pedig $g(x)$ páros deriváltjai és λ segítségével állítható elő.¹⁾

Ez a függvény:

$$(4) \quad G^*(x, \lambda) = \frac{1}{2} [g^*(x, \lambda) + g^*(x, -\lambda)].$$

¹⁾ Ez az észrevétel általános módszernek tekinthető keverékek felbontásánál: Ha az adott keverék alapján elő tudunk állítani egy olyan függvényt, amelynek ugyan más a típusa, de pl. maximumhelyei ugyanott vannak, mint a felbontandó keveréknek, problémánkat megoldottuk, hiszen a maximum helyéből már következtethetünk a keresett paraméterekre.

Ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, $g^*(x, \lambda)$, mint láttuk, az $x = m_1$ helyen *Dirac*- δ -vá fajul el, $g^*(x, -\lambda)$ pedig σ_k helyett $\sigma_k + \lambda$ paraméterű, — tehát az eredeténél laposabb — Cauchy-sűrűségfüggvénykeveréket képvisel, ami ugyan eltorzítja $g^*(x, \lambda)$ alakját, a *Dirac*- δ -n azonban mit sem változtat, mert benne nem keletkezik újabb *Dirac*- δ . Így tehát a »tű« fellépte alapján a $G^*(x, \lambda)$ függvényből is meghatározható m_1 —, épp úgy, mint ahogy $g^*(x, \lambda)$ -ból — a »tű« kihagyása után pedig az eljárás megismételhető, és lépésenként az összes m_k értékeket megadja (s ezzel a komponensek N számát is).

Az A_k , σ_k paraméterek meghatározását itt általánosságban már nem tudjuk elvégezni.

Megelégedve tehát az említett eredménnyel, a $G^*(x, \lambda)$ függvényt a következőképpen állítjuk elő: a benne szereplő $g^*(x, \lambda)$ és $g^*(x, -\lambda)$ függvényeket λ szerint hatványsorba fejtjük (ezek konvergenciáját később igazoljuk):

$$g^*(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g^*}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}, \quad (5)$$

$$g^*(x, -\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g^*}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}.$$

Képezzük ezekkel a

$$G^*(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} \right]_{\lambda=0}$$

függvényt; végül is (3) felhasználásával:

$$G^*(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \frac{d^{2r} g}{dx^{2r}}. \quad (6)$$

A felbontás alapjául szolgáló $G^*(x, \lambda)$ függvényt tehát a kiindulási $g(x)$ függvény páros deriváltjaival képezett függványsor adja meg.

2. §. Az eljárás gyakorlati kivitele

A gyakorlatban persze csak közelítőleg állíthatjuk elő a $G^*(x, \lambda)$ függvényt, — úgy, hogy (6) valamilyen szelétét vesszük. Vegyük az $r = S$ indexszel záruló szeletet. Meg fogjuk becsülni, milyen hibával közelíti meg ez a szelet $G^*(x, \lambda)$ -t.

Ehhez figyelembe kell vennünk, hogy $g(x)$ páros deriváltjait numerikusan tudjuk csak meghatározni. Az erre szolgáló formulákat (a hatodik deriváltig bezárólag) pl. [3] 199. oldalán találhatunk; a nyolcadik és tizedik derivált közelítő meghatározására is alkalmas (azaz 7-nél több rácsponttal dolgozó) formulákat a kézikönyvekben azonban nem találtunk. Mivel $D^*(x, \lambda)$ pontosabb előállításánál erre is szükség lehet, kiszámítottuk a másodiktól tizedikig terjedő deriváltak 11 rácspontra támaszkodó numerikus formuláit. Ezeket a *Függelék*-ben közöljük.

Ha tehát (6)-ban csak az S indexig haladunk, kétféle hibát követünk el. Az egyik hiba, δ_1 abból adódik, hogy a 2., 4., ..., $2S$ -edik deriváltakat numerikusan határozzuk meg. Legyen a $2r$ -edik deriválthoz tartozó hiba Δ_{2r} ($r = 1, 2, \dots, S$). Ezek értékét (rájuk vonatkozó becslést) a numerikus deriválás formulái mindig közlik. A *Függelék*-ben közölt formuláinknál mi is megadtuk őket. A deriváltak közelítő meghatározásából származó összes hiba nyilván

$$(7) \quad \delta_1 = \sum_{r=0}^S (-1)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \Delta_{2r}.$$

Ennek értéke a Δ_{2r} értékektől függ, és a numerikus deriválás rácsponthoz tartozó sűrítésével csökkenthető; itt nem foglalkozunk vele tovább, mert a Δ_{2r} hibák alakjára a *Függelék*-ben úgys visszatérünk.

A másik hiba, δ_2 , a függvénysor maradéktagjának elhanyagolásából ered; ezt legcélszerűbbnek mutatkozott a

$$\delta_2 = \sum_{r=S+1}^{\infty} (-r)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \frac{d^{2r}g}{dx^{2r}}$$

alakban vizsgálni, és tagonként becsülni. Ehhez szükségünk van $g(x)$ páros deriváltjainak kifejezésére. $g(x)$ alakja folytán tulajdonképp elég $\frac{d^{2r}}{dy^{2r}} \left[\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} \right]$ kifejezését meghatározni; ez azonban az

$$\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} = \frac{1}{2\sigma_k} \left[\frac{1}{\sigma_k + iy} + \frac{1}{\sigma_k - iy} \right]$$

reláció alapján könnyen megy, és végeredménye:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d^{2r}}{dy^{2r}} \left[\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} \right] &= \frac{(2r)! (-1)^r}{2\sigma_k} \left[\frac{(\sigma_k + iy)^{2r+1} + (\sigma_k - iy)^{2r+1}}{(\sigma_k^2 + y^2)^{2r+1}} \right] = \\ &= \frac{(2r)! (-1)^r}{\sigma_k (\sigma_k^2 + y^2)^{\frac{2r+1}{2}}} \cos \left[(2r+1) \arctg \frac{y}{\sigma_k} \right]. \end{aligned}$$

Ennek alapján egyszerű átalakítások után

$$(9) \quad \frac{d^{2r}g}{dx^{2r}} = \sum_{k=1}^N A_k \frac{(2r)! (-1)^r \cos [(2r+1) \arctg ((x-m_k)/\sigma_k)]}{\pi [\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}.$$

Következésképp:

$$\delta_2 = \sum_{r=S+1}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \frac{\cos [(2r+1) \arctg ((x-m_k)/\sigma_k)]}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}$$

és

$$(10) \quad |\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{r=S+1}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}.$$

Mivel feltevés szerint $\lambda < \sigma_1$, a második összeg geometriai sort tartalmaz. Ezt összegezve :

$$|\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda^{2S+2}}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2] [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]^{S+1/2}}.$$

Most $g(x)$ -et akarjuk behozni a jobboldalon. E célból szorozzuk és osszuk az összeg minden tagját a megfelelő indexű σ_k^{2S+1} értékkel; így a következőt kapjuk :

$$|\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda^{2S+2}}{\sigma_k^{2S+1} [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2]} \left[\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + (x - m_k)^2} \right]^{S+1/2}.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés mindig ≤ 1 , és így értékét csak növeljük, ha $S + \frac{1}{2}$ helyett első hatványon vesszük. Ekkor azonban az átalakítások után

$$|\delta_2| \leq \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2]} \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x + m_k)^2]} < \\ < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2 - \lambda^2} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]},$$

vagyis végül

$$(11) \quad |\delta_2| < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2 - \lambda^2} g(x),$$

amivel az x helytől függő hibabecslésre jutottunk.

Megjegyezzük, hogy ha a σ_k értékek közt azonosak is vannak, a hibabecslésben σ_1 helyett a σ_k értékek minimuma fog szerepelni.

Látjuk, hogy minél közelebb van λ a σ_1 -hez, annál nagyobb S értékkel tudjuk csak leszorítani a hibakorlátot. A sorszelettel előállított függvény a $\lambda = \sigma_1$ esetben sem fog *Dirac*- δ -t mutatni, de a σ_1 -nél kisebb értékekkel elérhető közelítés általában már jól mutatja a különvált komponenseket. Mivel λ ekkor még nem azonosítható σ_1 -gyel, az eljárás megbízhatóan csak az m_k paraméterek értékeit s így a komponensek számát szolgáltathatja. A gyakorlatban legtöbbször ez is elég. Egy-két λ -értéknél többel sem kell általában kísérletezni; legtöbbször egyetlen kísérletnél is elég jól különváltan mutatkoznak már a komponensek.

Itt foglalkozunk még röviden az (5) alatti hatványsorok konvergenciájának bizonyításával. Elég kimutatni, hogy maradéktagjaik zérushoz tartanak; ekkor előállítják a $g^*(x, \lambda)$, illetve $g^*(x, -\lambda)$ függvényeket.

A valamilyen $n = s + 1$ -től számított maradéktagokat itt előnyösebb

$$R_{s+1} = \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}$$

alakban írni, ahol $\lambda_1 = \lambda$ vagy $-\lambda$, aszerint, hogy melyik függvényről van szó; $|\lambda_1| = \lambda$. A $g^*(x, \lambda)$ alakja folytán itt is elég a

$$\frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{y}{y^2 + B_k^2} \right]$$

deriválttal foglalkozni ($B_k = x - m_k$). Felhasználva az

$$\frac{y}{y^2 + B_k^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{B_k - iy} - \frac{1}{B_k + iy} \right]$$

összefüggést, a $\frac{d^{2r}g}{dx^{2r}}$ kiszámításánál alkalmazott eljárással végül is

$$\frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{y}{y^2 + B_k^2} \right] = \frac{n! \sin[(n+1) \arctg(y/B_k) + n\pi/2]}{[y^2 + B_k^2]^{\frac{n+1}{2}}},$$

aminek a felhasználásával

$$R_{s+1} = \sum_{n=s+1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_1^n}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \frac{\sin[(n+1) \arctg((\sigma_k/(x-m_k)) + n\pi/2)]}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{n+1}{2}}},$$

illetve

$$|R_{s+1}| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ez azonban lényegében a (10) alatti egyenlőtlenséggel azonos, így az ottani számításokat megismételve, végül is

$$|R_{s+1}| < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^s \frac{\lambda}{\sigma_1 - \lambda} g(x)$$

(általános esetben itt is min σ_k szerepel σ_1 helyett).

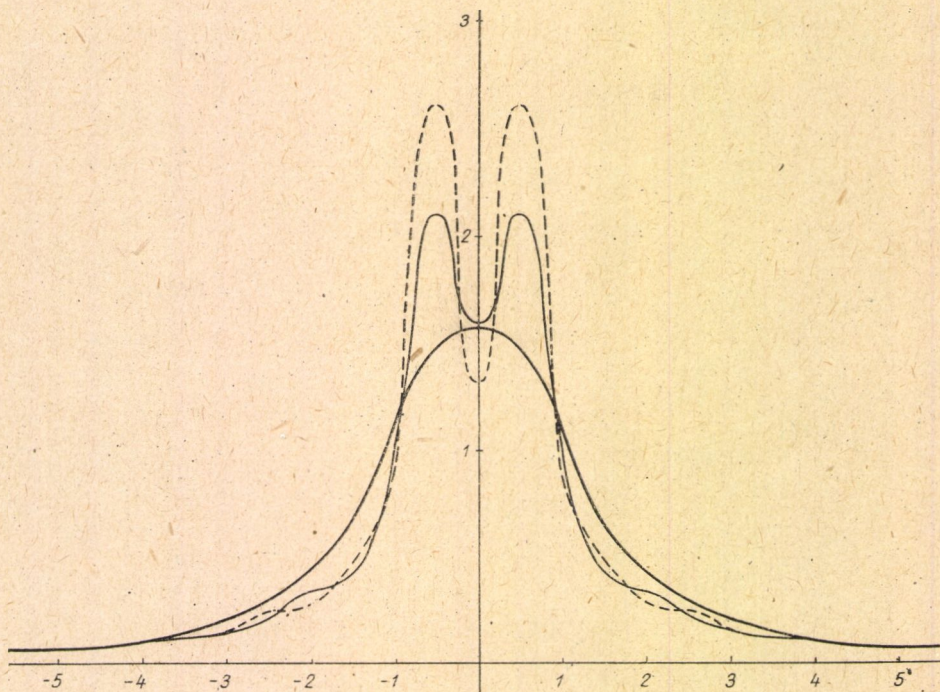
Mivel $g(x)$ korlátos és $\lambda < \sigma_1$ (illetve $\lambda < \min \sigma_k$), a jobboldal bármely x helyen zérushoz tart, ha $s \rightarrow \infty$. Ezzel a konvergenciát bebizonyítottuk.

A (6) függvénysor szeletével való közelítés általában még akkor is jó, ha a hibakorlátok már jóval felülmúlják $g(x)$ értékeit. Illusztrálásul bemutatjuk a fiktív

$$(12) \quad g(x) = \frac{1}{1 + (x - 0,5)^2} + \frac{1}{1 + (x + 0,5)^2}$$

keverék felbontását (lásd: 1. ábra).

Itt $A_1 = A_2 = \pi$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. A $g(x)$ függvény grafikonját az ábrán a vastag vonal mutatja, a $G^*(x, \lambda)$ függvény $\lambda = 3/4$ -del megalkotott közelítő görbét pedig a vékony vonal (a függvényt az $r = 5$ indexnél zártuk le). A pontos eredmény itt kiszámítható; görbét pontozva tüntettük fel. A differenciáhányadosokat a Függelék formulái alapján tizenegy $0,5$ -távolságú rácspontból számítottuk ki. A hibakorlátok esetünkben már sokszorosan felülmúlják



1. ábra

$g(x)$ ordináta-értékeit, a közelítés azonban még mindig elég jó és határozottan mutatja a komponenseket.

A dolgozatunkban tárgyaltak magfizikai stb. felhasználásáról [1]-ben már szóltunk.

Függelék

A közelítő számítások kézikönyveiben nem szokták közölni a nyolcadik és tizedik deriváltak numerikus kiszámítását. Ezt akarjuk itt pótolni.

Közljük tízig bezárólag a páros deriváltak numerikus formuláit, amelyeket 11, egyenként h távolságú rácspontból számítottunk. A formulák a középső pontban adják meg a derivált értékét.²⁾

²⁾ A számításokat részben Haraszi Tamásné egyetemi hallgató végezte el tanulmányi gyakorlata alatt.

A számítás alapgondolata a következő: a deriválandó $f(x)$ függvényt Taylor-sorba fejtjük az $x \pm h, x \pm 2h, \dots, x \pm 5h$ helyeken, egészen a tizenegyedik tagig bezárólag, s a maradéktagot is felírjuk. Ezzel lineáris egyenlet-rendszert kaptunk az egyes (x helyen vett) deriváltakra, és így ezek az $f(x + ph)$ ($p = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$) mennyiségeknek és a maradéktagoknak a lineáris kifejezései lesznek. A maradéktagokban szereplő deriváltakat felső korlátjaikkal fejezzük ki. Eredményeink a hagyományos formában:

$$f^{(2)}(x) = \frac{8\sigma_5 - 125\sigma_4 + 1000\sigma_3 - 6000\sigma_2 + 4000\sigma_1 - 73766\sigma_0}{25 \cdot 200 h^2} +$$

$$+ 4,5630 \cdot 10^{-4} h^{10} \partial_2 M_{12};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-82\sigma_5 + 1261\sigma_4 - 9738\sigma_3 + 52428\sigma_2 - 140196\sigma_1 + 192654\sigma_0}{15120 h^4} +$$

$$+ 1,4920 \cdot 10^{-3} h^8 \partial_4 M_{12};$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{13\sigma_5 - 190\sigma_4 + 1305\sigma_3 - 4680\sigma_2 + 9690\sigma_1 - 12276\sigma_0}{240 h^6} +$$

$$+ 2,7982 \cdot 10^{-2} h^8 \partial_6 M_{12};$$

$$f^{(8)}(x) = \frac{-\sigma_5 + 13\sigma_4 - 69\sigma_3 + 204\sigma_2 - 378\sigma_1 + 462\sigma_0}{3 h^8} +$$

$$+ 6,9560 \cdot 10^{-1} h^4 \partial_8 M_{12};$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{\sigma_5 - 10\sigma_4 + 45\sigma_3 - 120\sigma_2 + 210\sigma_1 - 252\sigma_0}{h^{10}} +$$

$$+ 1,8051 \cdot h^2 \partial_{10} M_{12};$$

$$\sigma_p = f(x + ph) - f(x - ph) \quad (p = 1, 2, \dots, 5);$$

$$\sigma_0 = f(x),$$

$$M_{12} = \max_{x \in I} |f^{(12)}(x)|, \text{ ahol } I \text{ az } [x - 5h, x + 5h] \text{ intervallum};$$

$$|\partial_i| \leq 1 \quad (i = 2, 4, \dots, 10)$$

M_{12} megállapításához Cauchy-sűrűségfüggvényeinek esetén jól felhasználhatók a (10) hibakorlát kiszámításánál levezetett egyenlőtlenségek; a végeredmény:

$$M_{12} < \frac{12! \max g(x)}{\min \sigma_1^{12}}$$

IRODALOM

[1] MEDGYESSY P.: „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetnek Közleményei* 3 (1954) 155–169.

[2] MEDGYESSY P.: „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének telbontása összetevőire.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165–177.

[3] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ ТИПА КОШИ

П. Меддеш

Резюме

В работе [1] автор занимался разложением на компоненты смеси (1) функций плотности типа Коши. В настоящей работе предложено приближенный метод решения той же проблемы. Этот метод пригоден в первой очереди для определения неизвестных параметров m_k — В основе метод совпадает «методом уменьшения дисперсии», описываемым в [1]: С произвольным параметром $\lambda < \sigma_1$ и (2) создается (4). Если $\lambda \rightarrow \sigma_1$ последняя функция вырождается в Диракову- δ функцию в точке $x = m_1$. Из этого факта величина m_1 может быть определена. После опущения Дираковой- δ функции мы можем повторять процедуру. Тогда m_2 станет определенным и т. д. — В практике процедура происходит следующим образом: С некоторыми монотонно возрастающими величинами λ составляем $G^*(x, \lambda)$ и обнаруживаем, на каком месте покажет ее график вершину, подобную Дираковой- δ функции. Если это явление констатируется, λ очевидно близка к σ_1 ; следовательно, из употребленной величины λ мы можем делать заключение на величину σ_1 . — Функция (2) тоже покажет появления Дираковой- δ ; мы употребляли (4) вместо (2) только из-за возможности представить его в форме (6) (с помощью (3) и (5), т. е. при помощи производных четного порядка анализируемой функции $g(x)$ и величины λ . Производные четного порядка функции $g(x)$ будут исчислены численно. Для исчисления 8-ой и 10-ой производной нам нужны формулы, которые опираются на по крайней мере 11 эквидистантных пунктах решетки; так как достижимые нами книги не содержат такие формулы, мы вычислили их. Они собраны в Приложении к настоящей статье. — В практике мы возьмем только частную сумму степени $r = S$ ряда $G^*(x, \lambda)$; ошибка δ_2 так полученного приближения оценивается (11). Оценка зависит от рассмотренного места x . Вычисление (11) естественно обосновано на соотношениях (8) и (9). При подобных условиях (7) оценивает ошибку, возникающую вследствие численного дифференцирования.

В качестве иллюстрации представляем разложение на компоненты смеси (12) (На рис. 1 —) — притом $\lambda = 3/4$, $S = 5$. Приближенное решение намечено с — — —. В нашем примере точное решение тоже могло быть вычислено (— — — —).

AN APPROXIMATE METHOD FOR THE DECOMPOSITION OF A COMPOUND OF CAUCHY FREQUENCY FUNCTIONS

Summary

P. MEDGYESSY

In [1] the decomposition of a compound (1) of Cauchy frequency functions has been investigated. In the present paper an approximate solution of the same problem is described. The basic idea agrees with the «variance reduction method» dealt with in [1]: With the arbitrary parameter $\lambda < \sigma_1$ and (2) we form (4). If $\lambda \rightarrow \sigma_1$ the latter function degenerates into a Dirac- δ at $x = m_1$. From this fact we can determine the value of m_1 . After having omitted the Dirac- δ the procedure may be repeated, and m_2 can be determined etc. — In practice the whole procedure happens as follows: by taking monotonically increasing λ -values we form $G^*(x, \lambda)$ and observe where its graph will show a Dirac- δ -like peak. If we observe this phenomenon, λ evidently is near to σ_1 . — The function (2) would also show the appearance of the Dirac- δ ; we use (4) instead of (2) only for the simple reason that, using (3) and (5), it can be presented in form (6), i. e. by aid of the derivatives of even order of the function $g(x)$ to be analysed and of λ only. The derivatives of even order of $g(x)$ will be computed numerically. For the computation of the 8-th and 10-th derivatives we need formulae working with at least 11 equidistant grid-points; since the available textbooks do not contain such formulae, they are collected in the Appendix of the present paper. — In practice we take only a partial sum of order $r = S$ of the series (6) of $G^*(x, \lambda)$; the error δ_2 of the approximation thus obtained is given by (11). The computation of (11) is essentially based on the relations (8) and (9). Under the same conditions the error arising from the numerical derivation is given by (7).

As an illustrative example (see: fig. 1.) we present the decompositions of the compound (12) (it is denoted on Fig. 1. by —), — Here $\lambda = 3/4$, $S = 5$. The approximate solution is shown on Fig. 1. by —. In our example the exact solution may also be computed (it is denoted in the Fig. by — — — —).

KIEGÉSZÍTÉS
AZ
»ÚJABB EREDMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGELOSZTLÁSFÜGGVÉNYEK
KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐ RE BONTÁSÁVAL KAPCSOLATBAN«
CÍMŰ DOLGOZATHOZ

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

A címben említett [1], valamint a [2] dolgozatunkban részletesen foglalkoztunk az

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}$$

alakú ($A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ konstansok) keverék-sűrűségfüggvény paramétereinek meghatározásával $f(x)$ grafikonja ismeretében (úgynevezett »Gauss-analízis«). Kimutattuk, hogy a problémát megoldottnak tekinthetjük, ha alkalmasan választott $\lambda^2 < \min \sigma_k^2$ paraméterrel elő tudjuk állítani az

$$(2) \quad f^*(x, \lambda^2) \equiv f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}$$

függvény grafikonját. Ez a gyakorlatban csak bizonyos közelítéssel történhetik; az egyes eljárásokat a [2] dolgozaton kívül az [1] dolgozat 1., 2. és 3. §-ában ismertettük. Utóbbiban mindenütt közöltük az eljárásnál elkövetett hiba korlátját, az ezeket szolgáltató terjedelmes levezetéseket azonban mellőztük.

Mivel ezek a levezetések nem egyszerűek, viszont a végeredményekre sokszor hivatkozunk, szükségesnek tartjuk ismertetni a szóbanforgó levezetéseket. Ez az egyetlen célja ennek a kiegészítésnek.

1. §. A Fourier-sorfejtésen alapuló eljárás hibája

Az $f^*(x)$ meghatározására szolgáló, az [1] dolgozat 1. §-ában ismertetett eljárás lényege az volt, hogy $f(x)$ és $f^*(x)$ elég nagy $(-l, l)$ alapintervallumon értelmezett és — típusuk folytán — őket előállító Fourier-cosinus-sorainak Q_n , illetve R_n együtthatói közt közelítőleg fennáll az

$$R_n \approx e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2}} Q_n \equiv S_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

összefüggés, és így a

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

trigonometrikus sor közelítőleg előállítja az $f^*(x)$ függvényt. A gyakorlatban eszerint úgy járunk el, hogy harmonikus analízátorral $f(x)$ grafikonjából meghatározzuk $f(x)$ adott $(-l, l)$ alapintervallumra vonatkozó \cos -sorának Q_n együtthatóit, majd az ezekből képezett S_n együtthatókkal előállítjuk $\Psi(x)$ valamilyen M indexszel záruló szeletét, $\Psi_M(x)$ -et. Nyilván ez is közelítés az $f^*(x)$ függvényre. Megbízható azonban csak akkor lesz, ha minden x helyre tudjuk, mennyit tér el $\Psi_M(x)$ a valóságos megoldástól, $f^*(x)$ -től (minden pontban lényeges $f^*(x)$ görbét pontosan ismerni!). Becslést keresünk tehát az $|f^*(x) - \Psi_M(x)| = D$ eltérésre (ahol az $f^*(x)$ függvényt már Fourier-cosinus-sorával felírva képzeljük). Ez így történik: Vezessük be az

$$\frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \equiv \varphi_k(x), \quad \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} \equiv \varphi_k(x, \lambda^2) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$$(\lambda^2 < \min \sigma_k^2)$$

és

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx &= Q_n^{(k)} \\ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx &= R_n^{(k)} \\ e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2}} Q_n^{(k)} &= S_n^{(k)} \\ |R_n^{(k)} - S_n^{(k)}| &= \delta_n^{(k)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots, N \\ n &= 0, 1, \dots, M \end{aligned}$$

jelöléseket, s legyen a $(0, l)$ intervallum oly nagy — illetve az origó az $f(x)$ görbéjéhez viszonyítva úgy megválasztva —, hogy $\frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2)$ már monoton csökkenjen a $(-\infty, 0)$, illetve a (l, ∞) intervallumokban (ha a $(0, l)$ intervallum $f(x)$ grafikonjának gyakorlatilag ≈ 0 részét feleli, ez mindig teljesül!). Ezekkel a jelölésekkel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x) & f^*(x) &= \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x, \lambda^2) \\ Q_n &= \sum_{k=1}^N Q_n^{(k)} & R_n &= \sum_{k=1}^N R_n^{(k)} \end{aligned}$$

és

$$(3) \quad Q_n \leq \sum_{k=1}^N A_k \left| \frac{1}{2} \delta_0^{(k)} + \sum_{n=1}^N \delta_n^{(k)} + \sum_{n=M+1}^{\infty} |R_n^{(k)}| \right|.$$

Az egyes tagokat egyenként becsüljük meg. Ehhez felhasználjuk a [2] dolgozat 4. §-ában közölt tételnek a következő speciális alakját:

$$(4) \quad \varphi_k(x, \lambda^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\lambda^2}{2} \right)^p \left[\frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \varphi_k(x) \right].$$

Ezek után vizsgáljuk a

$$(5) \quad \delta_n^{(k)} = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx - e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} \int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right|$$

kifejezést. Írjuk be az első integrálba a (4) függvényt, a másodikba mind $\exp(\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2)$ hatványsorát, mind pedig az

$$\int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

integrál helyett a p -szer megismételt parciális integrálással kapott

$$(6) \quad \sum_{r=1}^p \frac{(-1)^{r+1}}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2r}} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}} \varphi_k(x) \right]_{x=0}^{x=l} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2p}} \int_0^l \left\{ \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \varphi_k(x) \right\} \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

kifejezést. Egyszerűsítések után fejezzük ki $\varphi_k(x)$ deriváltjait az $e^{-x^2/2}$ függvénnyel generált H_m Hermite-polinomokkal, az egyszerűsítések közben fellépő

$$\sum_{n=r}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2} \right)^p \frac{1}{p!}$$

mennyiséget $[\exp(\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2)$ Maclaurin-sorának maradéktagját] pedig az

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2} e^x \left(\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2} - x \right)^{r-1} dx$$

integrál-alakkal. Most felcseréljük az integrálásokat és összegezéseket (ennek jogosultsága könnyen igazolható), a közben fellépő

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r H_{2r-1}(\xi)}{(r-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^r$$

sor pedig egy, az $e^{-x^2/2}$ függvényből leszarmaztatott Hermite-polinomokra vonatkozó összefüggés (lásd: [3], 371. oldal) alapján a

$$(7) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r H_{2r-1}(\xi)}{(r-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^r = -\frac{\xi t}{2} \frac{e^{-\frac{\xi^2 t}{2(1-t)}}}{(1-t)^{3/2}}$$

kifejezéssel helyettesítjük. Az ezek után fellépő integrálra alkalmazzuk a középértéktételt; mindezek után a

$$(8) \quad \delta_n^{(k)} = \frac{\lambda^2}{l} e^{\frac{\vartheta_n \lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} \left\{ \frac{(l-m_k) e^{-\frac{(l-m_k)^2}{2[\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]}}}{\sqrt{2\pi} [\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]^{3/2}} + \frac{m_k e^{-\frac{m_k^2}{2[\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]}}}{\sqrt{2\pi} [\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]^{3/2}} \right\}$$

$(0 < \vartheta_n < 1)$

végeredményt kapjuk.

Háttra van még az

$$(9) \quad |R_n^{(k)}| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right|$$

értékek becslése. Írjuk az integrált $\int_0^l = \int_0^{-\infty} - \int_{-\infty}^0 - \int_0^l$ alakba. Az első integrál értéke $\exp [-(\sigma_k^2 - \lambda^2)n^2\pi^2/2l^2]$; a másik kettőben pedig parciális integrálás után bontsuk fel az integrációs intervallumokat l/n hosszú szakaszokra. Mivel feltevés szerint $\frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2)$ már monoton csökken a $(-\infty, 0)$, illetve (l, ∞) intervallumokon, az egyes l/n hosszúságú szakaszokon vett integrálok Leibniz-sort alkotnak, s így pl.

$$\begin{aligned} \left| \int_l^{\infty} \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right| &< \left| \int_l^{l+\frac{l}{n}} \frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right| < \\ &< \frac{2l}{n\pi} \frac{l-m_k}{\sigma_k^2 - \lambda^2} \frac{e^{-\frac{(l-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}, \end{aligned}$$

és így tovább. Végül is

$$(10) \quad |R_n^{(k)}| < \frac{2}{l} e^{-\frac{(\sigma_k^2 - \lambda^2) n^2 \pi^2}{2l^2}} + \\ + \frac{4l}{n^2 \pi^2} \left| \frac{(l - m_k) e^{-\frac{(l - m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{(\sigma_k^2 - \lambda^2) \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} + \frac{m_k e^{-\frac{m_k^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{(\sigma_k^2 - \lambda^2) \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} \right|.$$

Írjuk be (3)-ba (8)-at és (10)-et; az egyes tagokat felülbecsülve, az összegeket integrálokkal majorálva, végül is a következő, csupa ismert mennyiséget tartalmazó becslést kapjuk:

$$(11) \quad D \leq \left[\frac{\lambda^2}{2l} + \frac{\lambda^2}{l} \int_1^{M+1} e^{-\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} dn + \frac{4l}{\pi^2 M} \right] \cdot \left[\frac{\max(l - m_k)}{\min \sigma_k^2} f(l) + \frac{\max m_k}{\min \sigma_k^2} f(0) \right] + \\ + \left| \frac{8}{\pi} \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}} \right| \left| 1 - \Phi \left(\frac{\pi M \sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}}{l} \right) \right|,$$

ahol

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du.$$

Mivel oly nagy és oly módon elhelyezett $(0, l)$ intervallumot szoktunk venni, hogy $f(0)$ és $f(l)$ gyakorlatilag 0-ok legyenek, D korlátjából csak a második tag marad meg. Ezzel igazoltuk az [1] dolgozat (8) formuláját.

Hiba még a $\lambda^2 = 0$ helyen is lesz; ez annak a következménye, hogy a $\Psi_M(x)$ függvényt használtuk $\Psi(x)$ helyett, s csak az utóbbi azonos a $\lambda^2 = 0$ helyen az $f^*(x)$ függvénnyel. $M \rightarrow \infty$ esetén különben mindenképp 0-hoz tart a hibakorlát.

2. §. A függvénytörös előállításán alapuló eljárás hibája

Az [1] dolgozat 2. §-ában említettük, hogy az $f^*(x)$ függvényt előállítja az

$$(12) \quad f^*(x) \equiv f^*(x, \lambda^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} f^{(2n)}(x)$$

függvénytörös; közelítő előállítását kapjuk, ha valamilyen $n = R$ -edik tagnál megállunk. Ilyen alakban (12) a gyakorlatban is alkalmazható, feltéve, hogy a deriváltakat ismerjük. Ezeket azonban csak numerikusan tudjuk meghatározni, s ez lerontja a közelítés jószágát. Az itt fellépő hibák a numerikus analízisből jól ismertek, s ezért itt sem foglalkozunk velük és könnyen becsülhető együttes hatásukkal, hanem inkább annak a hibának a becslésére közöljük a levezetést, amelyet az R -edik tagnál való megállás eredményez.

Ez a hiba nyilván

$$(13) \quad \delta = \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x).$$

Mivel korábbi jelölésünkkel $f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x)$, elegendő ha a

$$(14) \quad \delta^{(k)} = \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \varphi_k(x)$$

hibákkal foglalkozunk. Célszerűnek bizonyul a $\delta^{(k)}$ hibát tagonként becsülni; itt egyébként α -tól függő becslés kapható.

Használjuk fel a

$$(15) \quad \left| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \varphi_k(x) \right| < 1,09 \frac{\sqrt{(2n)!}}{\sigma_k^{2n}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}} \sqrt{2\pi} \sigma_k,$$

egyenlőtlenséget. Ez könnyen levezethető *Charlier* ([4] Ch. III.) formuláiból, amelyek szerint

$$(16) \quad |H_n(x)| < 1,09 \sqrt{n!} e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Helyettesítjük ezt (14)-be; a faktoriálisok átalakítása után:

$$|\delta^{(k)}| < 0,833 \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \sum_{n=R+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_k^2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Emeljük ki a maximális $1/\sqrt{n}$ tényezőt. A fennmaradó összeg egy λ^2/δ_k^2 hányadosú konvergens geometriai sor maradéktagja. Ennek értékét kiszámítva s δ -ra térve vissza, azt kapjuk, hogy

$$(17) \quad |\delta| < \frac{0,833}{\sqrt{R+1}} \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R+1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}} \sqrt{2\pi} \sigma_k.$$

Hogy az (1) alatti $f(x)$ függvényt is behozhassuk, alakítsuk át a (17)-ben szereplő összeget a Schwarz-féle egyenlőtlenségből lezármaztatott

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N a_k \right) \left(\sum_{k=1}^N a_k b_k^2 \right)} \quad (a_k > 0; 0 < b_1 < \dots < b_N)$$

egyenlőtlenség segítségével, a b_k együtthatóknak az exponenciális függvényeket feleltetve meg. Ezzel már behoztuk $f(x)$ komponenseit; a $\sum_{k=1}^N A_k/\sigma_k <$

$< (\min \sigma_k)^{-1} \sum_{k=1}^N A_k$ reláció segítségével végül is a

$$(18) \quad |\delta| < \frac{0,833}{\sqrt{2\pi(R+1)} \min \sigma_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R-1}} \frac{\sqrt{f(x)}}{1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezzel [1] (10) formuláját is bebizonyítottuk, sőt a konstans jobb az ottaninál [azt tudniillik [5] Part 2, (28)-ból vezettük le, (16) azonban jobb becslést ad].

3. §. A Hermite-sorfejtésen alapuló eljárás hibája

Az [1] dolgozat 3. §-ában és a [2] dolgozat 4. §-ában vázlatosan még egy harmadik eljárást is közöltünk $f^*(x)$ közelítő előállítására. Ezt most részletesen, a hibaecslésre is kitérve fogjuk ismertetni.

Mindenekelőtt megállapítható, hogy $0 < \sigma_k^2 < 1$ esetén $f(x)$, illetve $f^*(x)$ Csebisev—Hermite-sorfejtései, tehát

$$(19) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

illetve

$$(20) \quad f^*(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

ahol

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}; & \varphi^{(n)}(x) &= (-1)^n H_n(x) \varphi(x), \\ c_n &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) f(x) dx; & c_n^* &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) f^*(x) dx, \end{aligned}$$

előállítják a szóbanforgó függvényeket.

Ez *N. N. Lebegyev* egy kritériumának alkalmazásával látható be ([6], 100. oldal). A kritérium (kis átalakítással) így szól:

»Legyen $g(x)$ tetszőleges, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény, amely szakaszonként sima minden véges $(-a, a)$ intervallumon. Ha az

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{x^2/2} [g(x)]^2 dx$ integrál véges, a $g(x)$ -hez rendelt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^n(x) \quad \left(c_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) g(x) dx \right)$$

Csebisev—Hermite-sor konvergál $g(x)$ -hez, ennek minden folytonossági pontjában.

Könnyen igazolható, hogy ez a kritérium $0 < \sigma_k^2 < 1$ esetén teljesül $f(x)$ -re, illetve $f^*(x)$ -re; így tehát a sorok elő is állítják a szóbanforgó függvényeket.

A c_n és c_n^* értékek közti összefüggést és később felhasználandó explicit alakjukat a Hermite-polinomok generátorfüggvénye segítségével lehet legkönnyebben meghatározni, amelyet bármely komplex t -re

$$e^{-\frac{t^2}{2} + tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

ad meg. Szorozzuk meg mindkét oldalt $f^*(x)$ -szel, és integráljuk a $(-\infty, \infty)$ határok közt. A jobboldalt tagonként integrálhatjuk, ekkor azonban a c_n^* együtthatók fognak fellépni. A baloldal kiszámítható; végül is a következőt kapjuk:

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + tx} f^*(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2) + t m_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n^*}{n!} t^n.$$

A $\lambda^2 = 0$ helyen $f(x)$ esetére kapjuk meg az összefüggést:

$$\sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2) + t m_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} t^n.$$

Mivel azonban (22)-ben $\exp(-t^2 \lambda^2 / 2)$ -t kiemelhetjük, nyerjük:

$$e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n^*}{n!} t^n.$$

A baloldal első tényezőjét hatványsorával pótoljuk. Jogosult az együtthatók összehasonlítását alkalmazni; ebből következik a

$$c_n^* = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^r n! \lambda^{2r}}{r! (n-2r)! 2^r} c_{n-2r}.$$

összefüggés, amelyet az [1] dolgozat 3. §-ában, illetve [2] 4. §-ában már említettünk.

c_n^* (s így c_n is) explicite így határozható meg: (22) középső tagja nem más, mint ismét a Hermite-polinomok generátorfüggvénye, t és x helyett a $t\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}$, illetve $m_k / \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}$ helyeken véve (a gyök $0 < \sigma_k^2 < 1$ folytán mindig valós):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2) + t m_k} = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2 \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}^2}{2} + \frac{t \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2} m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}}} = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}}\right)}{n!} \{t \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}\}^n. \end{aligned}$$

Ezt a hatványsort ismét egybevethetjük (22) jobboldalával ; az együttható-összehasonlítás eredménye :

$$c_n^* = (-1)^n \sum_{k=1}^N A_k (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{n/2} H_n \left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}} \right) \quad (0 < \sigma_k^2 < 1).$$

Ebből c_n kifejezését $\lambda^2 = 0$ helyettesítéssel kapjuk.⁷

A gyakorlatban megfelelő léptékválasztással $0 < \sigma_k^2 < 1$ mindig elérhető. A mondottak ekkor azt jelentik : ha a c_n együtthatókat integrálkifejezéseik alapján $f(x)$ grafikonja segítségével meghatároztuk, a belőlük képzett c_n^* együtthatók segítségével $f^*(x)$ sorának egyes szeleteit, vagyis $f^*(x)$ közelítő kifejezését is előállíthatjuk.

Ennél az előállításnál hibát von maga után az, hogy a c_n együtthatókat grafikon alapján teljesen pontosan sohasem határozhatjuk meg. Az egyes c_n értékek hibái a meghatározásuknál követett (gépi, numerikus) eljárás szerint változnak, becslésük az egyes módszerek kézikönyveiben megtalálhatók. A c_n értékek hibái folytán a sorszelet képzésekor fellépő összes hiba könnyen becsülhető, s ezért csak azzal a Δ_S hibával foglalkozunk, amely abból ered, hogy $f^*(x)$ Csebisev—Hermite-sorából csak az első S tagot vesszük számításba.

A (23) egyenlet felhasználásával nyilván

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x) = \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) H_n \left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}} \right) (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

A (17) egyenletet felhasználva

$$|\Delta_S| \leq \frac{1,18 e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N A_k e^{\frac{m_k^2}{4(1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)}} \sum_{n=S+1}^{\infty} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{n/2}.$$

A fenti geometriai sort összegezve és az eredményben az A_k értékek kivételével a többi tényezőt maximumukkal becsülve, végül is a

$$(25) \quad |\Delta_S| \leq \frac{1,18}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{k=1}^N A_k \right) \frac{e^{\frac{\max m_k^2}{4(1 - \max \sigma_k^2 + \lambda^2)}} (1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2)^{\frac{S+1}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2}}$$

becslést kapjuk (vesd össze : [1], (14) képlet ; a konstans jobb, mint ott. Az eltérés okát a 2. § végén már közöltük).

Ezzel befejeztük a Gauss-analízis egyes közelítő módszereinél fellépő hibák becsléseinek levezetését.

- [1] MEDGYESSY P.: „Üjabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 151—165.
- [2] MEDGYESSY P.: „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.
- [3] G. SZEGŐ: *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXIII, New-York, 1939.
- [4] C. V. L. CHARLIER: *Application de la théorie des probabilités à l'astronomie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [5] E. HILLE: „A class of reciprocal functions.” *Annals of Mathematics (2-nd Series)* 27 (1926) 427—464.
- [6] Н. Н. ЛЕБЕДЕВ *Специальные функции и их приложения*. Гостехиздат, Москва, 1953.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

П. Меддеш

Резюме

Дополнение содержит доказательства формул ошибок некоторых приближенных методов, примененных при исполнении Гауссова анализа (см. [1]; формулы могут быть найдены в §§. 1., 2. и 3. работы [1]).

Первый метод был обоснован на соотношении

$$R_n \approx Q_n \exp [\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2] = S_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

имеющем место между коэффициентами Q_n и R_n ряда косинуса Фурье функции (1) и (2); определенного на довольно большом фундаментальном промежутке $(-l, l)$ (функция (1) должна быть разложена на компоненты; неизвестные параметры A_k, m_k, σ_k могут быть определены при помощи графика функции (2); $\lambda < \sigma_1$ произвольный параметр). На основе этого соотношения (2) может быть приближено частной суммой $\Psi(x) =$

$$= S_0/2 + \sum_{n=1}^M S_n \cos(n\pi x/l), \text{ Верхний оценок ошибки } D \text{ этой аппроксимации дается}$$

в (3). Оценивая члены (5) фигурирующие в (3), мы заменяем показательную функцию своим степенным рядом; потом, применяя (6) и (7) и выгаяя производные функции Гаусса через полиномы Эрмита, получаем (8) в качестве окончательного результата. — Оценивая (9) выражаем интеграл интегралами, взятыми между пределами $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 0)$ и (l, ∞) . Первый интеграл вычисляется непосредственно; последние две интегралы разделяются (после частного интегрирования) на интегралы, взятые на промежутках длиной l/n . Но эти представляют ряд Лейбница; употребляя этого факта мы можем оценить их через (10). Внося (8) и (10) в (3) и мажорируя суммы через интегралы получаем (11) для D .

Второй метод состоит в представлении $f^*(x)$ в виде ряда (12); она могла быть приближена через частной суммы степени $n = R$ упомянутого ряда. Тогда, кроме ошибки, возникающей при численном определении производных, мы делим и ошибку (13), оценка которой может быть заведена на оценку (14). Последний шаг исполняется с помощью (15) и (16); наконец мы получаем (17). Тоже сама функция $f(x)$ может быть внесена в (17); таким образом получается (18).

При третьем приближенном методе мы нашли соотношение (21) для коэффициентов разложений типа Чебышева — Эрмита (19) и (20) функций $f(x)$ и $f^*(x)$. Здесь $f^*(x)$ приближается снова через некоторой частной суммы ее разложения (коэффициенты будут определены через (21) которое имеет в основе коэффициенты c_n от $f(x)$). Применяя производящую функцию полиномов Эрмита, мы можем дать новый вывод формулы (21).

С тем же методом получается и явная форма (23) коэффициентов c_n^* . Если в разложении функции $f^*(x)$ остановимся у индекса $n = S$ то мы введем ошибку (24); оценивая эту ошибку с помощью (17) и (23), окончательно получается (25).

A SUPPLEMENT TO THE PAPER «SOME RECENT RESULTS CONCERNING THE DECOMPOSITION OF COMPOUND PROBABILITY DISTRIBUTIONS»

P. MEDGYESSY

Summary

This supplement contains the proofs of the error formulae of certain approximate methods which have been applied in carrying out Gauss analysis (see [1]; the formulae can be found in §§ 1, 2, 3 of [1]).

The first method is based on the relation $R_n \approx \exp \{ \lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2 \} Q_n \equiv S_n$ ($n = 0, 1, \dots$) between the coefficients Q_n and R_n of the Fourier cosine series expansion on a sufficiently large basic interval $(-l, l)$ of the functions (1) and (2), respectively. (The function (1) is to be decomposed; one can determine the unknown parameters A_k, m_k, σ_k from the graph of (2); $\lambda < \sigma_1$ is an arbitrary parameter.) By means of this relation, (2) can be approximated by the partial sum

$$\psi_M(x) = \frac{1}{2} S_0 + \sum_{n=1}^M S_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

The upper bound of the error D of this approximation is given by (3). Estimating the terms (5) which figure in (3) we substitute a power series for the exponential function; thereafter applying (6) and (7) and expressing the derivatives of the Gauss function by Hermite polynomials we get (8) obtained after some simplifications as final result. — In (3) there figures also (9). Estimating this expression we proceed by expressing the integral by those taken between the limits $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 0)$ and (l, ∞) , respectively. The first integral can be computed explicitly; the two last will be dissected, after partial integration, into integrals taken on intervals of length l/n . These integrals form a Leibniz-series; profiting by this circumstance we can estimate them by (10). Substituting (8) and (10) in (3) and majorizing the sums by integrals we obtain (11) for D .

The second method starts from the series (12) for $f^*(x)$. Approximating $f^*(x)$ by the partial sum of order $n = R$ of (12), besides the error arising from the numerical determination of the derivatives we commit the error (13) the estimation whereof may be reduced to that of (14). The latter procedure will be carried out by aid of (15) and (16), respectively; finally we obtain (17).

The third method is based on the relation (21) for the coefficients of the Chebyshev-Hermite expansions (19) and (20) of $f(x)$ and $f^*(x)$, respectively. Here we again approximate $f^*(x)$ by the partial sums of its expansion [the coefficients will be determined, starting from the coefficients c_n of $f(x)$, by (21)]. Using the generating function of the Hermite polynomials a new proof of (21) is given.

By the same method we also obtain the explicit form (23) of c_n^* . If we stop at the index $n = S$ in the expansion of $f^*(x)$, the error (24) is committed; estimating this by aid of (17) and (23) we finally obtain (25).

NOMOGRAMMOK KIVITELEZÉSE

HORVÁTH FERENC

Bevezetés

A nomográfia jelentősége napról-napra növekszik, mert a különböző tudományok művelői és a gyakorlati szakemberek számításaihoz mindinkább igénybeveszik segítségét, s ezzel számolási munkájukat jelentékenyen leegyszerűsíthetik. A növekvő érdeklődést mutatja az a számos megbízás is, amely Intézetünkhöz érkezett nomogrammok készítésére. Ezért Intézetünk megalakulása óta behatóan foglalkozik az alkalmazott matematikának ezzel az érdekes és a népgazdaság szempontjából nagyon fontos ágával, mind elméletileg, mind gyakorlatilag, nomogrammok kivitelezési technikáját illetően is. Azt a célt tűztük ki, hogy nomogrammjaink ne csak »elvileg« legyenek jók, hanem a pontossági követelményeket is messzemenően kielégítsék, és mintegy ellenpéldákat mutassunk azzal a nem éppen általános, de mégis tapasztalható véleménnyel szemben, hogy a nomogramm csak »tájékoztató«, a függvénykapcsolat szerkezetének szemléltetésére való, viszont nem szabad nagyon bízni benne, ha pontosabb számításra van szükség.

A függvénykapcsolat jellege, az egyes változókra előírt értékhatárok és pontossági követelmények szabják meg elsősorban azt, hogy milyen ábrázolási formát választunk egy adott függvénykapcsolathoz. Ennél a választásnál szóhoz jut az ízlés, a megszokás és más szubjektív tényezők és főleg az, hogy milyen kivitelezési technikánk van.

Ismeretes, hogy a pontosos nomogrammok sokszor előnyben kell részesítenünk, de csak akkor, ha van lehetőség a nomogramm rajzának precíz kivitelezésére, és ezt a rajzot nem-vetemedő lapra tudjuk másolni.

Intézetünkben a Numerikus és Grafikus Módszerek Osztályán hosszas kísérletezés után a kivitelezés technikájára most már viszonylag kialakult és bevált módszereink vannak, időszerűnek látjuk tehát ezek ismertetését.

Az a követelmény, hogy az elkészítendő nomogramm pontos legyen, minél kevesebb rajzmunkával járjon, tetszetős és sokszorosításra alkalmas legyen, szükségessé teszi technikai eljárások egész sorának alkalmazását. Ezeket az alábbiakban részletesen ismertetjük.

Már a nomogramm tervezésénél figyelemmel kell lenni a megengedhető terjedelemre. A gyakorlatban az A_3 -as (420×297 mm) szabvány nagyság felelt meg legjobban, ehhez a mérethez terveztük meg a kivitelezés során igénybevehető készülékeket.

Sűrű osztású hálózat pontos megrajzolása gyakorlatilag nem kis feladatot jelent. A szokásos rajzeszközökkel, pauss-papíron vagy kartonon bizonyos pontossági határon túl el sem készíthető. Kísérletileg igazolható, hogy például

0,5 × 0,5 m-es pauss-papíron csak a tus nedvességétől 1—2 mm-t is elérhet a vetemedés, ha sűrűn húzunk rá vonalakat. A levegő páratartalmának változásakor a pauss-papír 1—3 mm-t is vetemedhet, ezenfelül különböző irányokban a nyúlás, illetve zsugorodás más és más mértékű lehet. Karton-papírnál és pauss-vászonnál kisebb mértékben ugyan, de hasonló a helyzet. Mivel egy nomogramm rajza rendszerint több napig készül, a pontossági követelményeket ilyen vetemedés mellett egyetlen nomogramm-fajtánál sem lehet betartani. (A kevésbé vetemedő karton nem is jöhet mindig szóba, hiszen sokszor a rajzról másolatokat akarunk készíteni.) Gondolnunk kell az esetleges rajzhibák javítására is. A tushibák javítása éles késsel történik, és ilyenkor előfordul, hogy a papír átszakad.

A fentiekből láthatjuk, hogy a precíziós rajzmunkához olyan anyagot kell keresnünk, amely nem vetemedik, amelyre jól lehet rajzolni, amelyen a rajzhibák esetleg többször is javíthatók, végül: amelyről másolatokat is lehet készíteni. Ilyen anyag az üveglap, amelyet megfelelő emulzióval kell ellátni, hogy arra tussal vagy karctűvel rajzolni lehessen (1. §).

A kézi rajzoló eszközök használatát az elkövethető nagy hibák miatt lehetőség szerint minimálisra kell csökkentenünk. Ezért pontok felmérésére és egyenesek húzására derékszögű koordinátográfot vagy polárkoordinátográfot használunk. Különböző egyenes-tartójú függvényiskálákat külön számítás nélkül felrajzolhatunk közvetlenül a koordinátográfra szerelt készülék segítségével. Görbe-tartójú függvényiskálákat kénytelen-kelletlen kézi görbevonalzóval húzott tartón grafikus interpolációval készítünk, ez azonban nem tekinthető kielégítő megoldásnak. A mechanikus interpolációnak pantográf-, illetve affinográf alkalmazásával még csak kísérletezünk.

Majdnem minden nomogramm tervezésekor projektív transzformációra van szükség; ennek végrehajtása hosszadalmas numerikus számítással járhat, ami a készítendő nomogrammot nagymértékben megdrágítja. Ezért kísérletezünk perspektográf alkalmazásával, amely lehetővé tenné, hogy projektív transzformációkat mechanikusan, számítás nélkül végezzünk el (2. §).

A törekeny üveglemezre megrajzolt nomogramm a gyakorlatban nemigen használható. Ezért az üveglemezről pontos másolatot kell készítenünk (3. §). Adott esetben igen sok rajzolási munkát jelent, ha különböző nomogrammelemeket (skálákat, rácsokat) ismételten többször kell megrajzolni. E rajzolási munka jó részét megtakaríthatjuk, ha a külön elkészített nomogrammelemeket fototechnikai úton összemácsoljuk. Ezek az eljárások is kísérletezési stádiumban vannak.

Nomogrammok kivitelezése során még sok olyan probléma van, amely megoldásra vár. Ilyen például az a kérdés, hogyan lehetne speciális transzformációk elvégzésére mechanikus vagy optikai eszközöket készíteni. E problémákkal való foglalkozás nagyon fontos, mert bizonyos bonyolultabb függvénykapcsolatok grafikus ábrázolása elméletileg ugyan lehetséges, de gyakorlatban szinte lehetetlen vagy legalábbis nem kifizetődő az előre látható tömördek számolási- és rajzmunka miatt.

1. §. Emulzióval fedett síküvegek

Hosszú kísérletezés után kidolgozott eljárásunk jelenleg a következő:

a) *Tusrajz készítéséhez:* Az 5—6 mm vastagságú 480 × 360 mm nagyságú tükörüveg egyik oldalát fluorsavval lemaratjuk, hogy az emulzióréteget

megkösse. A gondosan megtisztított, zsírtalanított üveglemezt vetemedésmentes fából készített, szellőzőnyílásokkal ellátott szárítószekrényben nivelálólábakra helyezük és vízszintezzük. A szekrénybe helyezett villanyfűtőtest az üveglemezt 55–60 °C-ra előmelegíti. Nagy gondot kell fordítanunk arra, hogy a szekrény levegője pormentes legyen, ezért a szekrényt lezárjuk. Tapasztalat szerint fém szárítószekrény — rossz hővezetési viszonyai és az oxidáció miatt — nem megfelelő. Az üveglemez megfelelő előmelegítése után az ugyan-csak 55–60 °C-ra előmelegített emulzióoldatot az üveg felületére öntjük.

Az emulzió összetétele és elkészítése (480 × 360 mm felületre): légszáraz zselatinból 20 gr-ot duzzasztunk 200 cm³ vízben. Duzzadás után 20%-os lúgoldatot öntünk bele, és jól elkeverjük. Ezután az oldatba 20 cm³ alumínium-szulfát oldatot öntünk, amelynek összetétele: 500 cm³ víz, 25 g kristályos, vegytiszta alumíniumszulfát. Az oldatot 55–60 °C-ra felmelegítve jól elkeverjük és többször megsűrjük az üveglemezre való felöntés előtt. Az üveglemezre felöntött réteget néhány óráig szárítjuk. A zselatin minimális rugalmasságát szükség esetén például glicerinnel biztosíthatjuk. A lúg és alumíniumszulfát a zselatinban összekeveredve finom szemcséjű alumíniumhidroxid csapadékot ad.

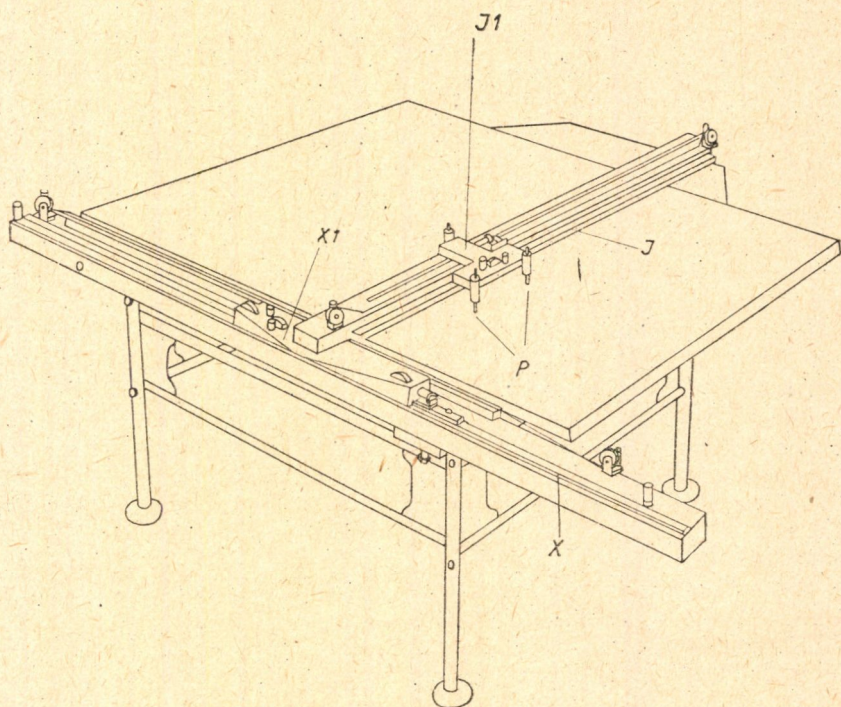
b) *Karctűvel készítendő rajzokhoz* az eljárás a következő: Az üveg anyaga olyan, mint előbb, most azonban az üveg maratására és előmelegítésére nincs szükség. A tisztasági követelményekre, a levegő pormentesítésére még fokozottabban kell ügyelnünk, mint előbb. Az üveg felületére a következő összetételű emulziót öntjük: három rész aszfalt (gilsonit), egy rész stearin szurok, 10–25 rész xilol (benzol, benzin, toluol). Az oldatot vákuumszűrővel megsűrjük. Az 1000 cm²-re szükséges mennyiség 50–85 cm³ a kívánt rétegvastagságtól és az optikai fedettségtől függően. Rövid ideig tartó száradás után tükörsima »mélyfekete« réteget kapunk az üveglemezen. A rétegbe nagyon finom osztás karcollható: mm-ként 15–18 vonal is, ami az eljárást kivetítés céljára készítendő skálák, hálózatok készítésére különösen alkalmazhatóvá teszi.

Ezúton fejezem ki köszönetemet dr. Boér Pál vegyész-szakértőnek, aki az emulziók összetételének megválasztásában, továbbá Súlyom Imre laboratóriumvezető munkatársamnak, aki az eljárások kidolgozásában, tökéleteseítésében és üzembiztossá tételében volt nagy segítségemre.

2. §. Rajzeszközök

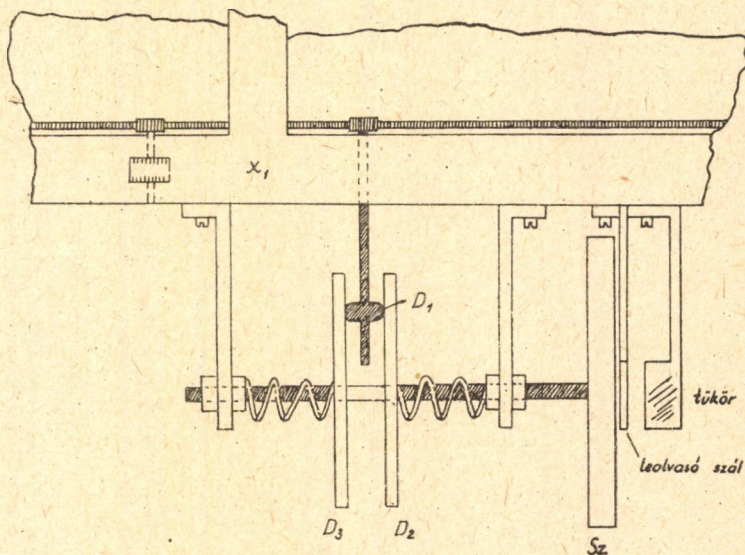
Egyszerűbb nomogrammok függvényiskáláinak felrajzolását szokás néha »átmetszéses« (»short cut«) eljárással végezni. Ezt egyrészt azért nem alkalmazhatjuk, mert egy skálapont szerkesztéséhez két-két összetartozó pontpár számítása és a megfelelő függvényiskálán való felvétele szükséges, másrészt különösen hegyes metszés esetén a kimetszett pont helyzete bizonytalanná válik. Bonyolult és nagy pontosságú nomogrammok készítésére éppen ezért egyáltalán nem alkalmazható. Ehelyett inkább pontosan kiszámítjuk az összes skálaosztásoknak valamely közös alapontra vonatkozó koordinátáit és koordinátográf segítségével mérjük fel.

A derékszögű koordinátográf (1. ábra) pontok felmérésére és a koordinátategyekkel párhuzamos egyenesek húzására alkalmas. Intézetünk koordinátográfja a Dennert—Pape hamburgi cég Aristo Nr. 1342. sz. gyártmánya. Minden alkatrész öntött acélkeretre van felszerelve vetemedések



1. ábra

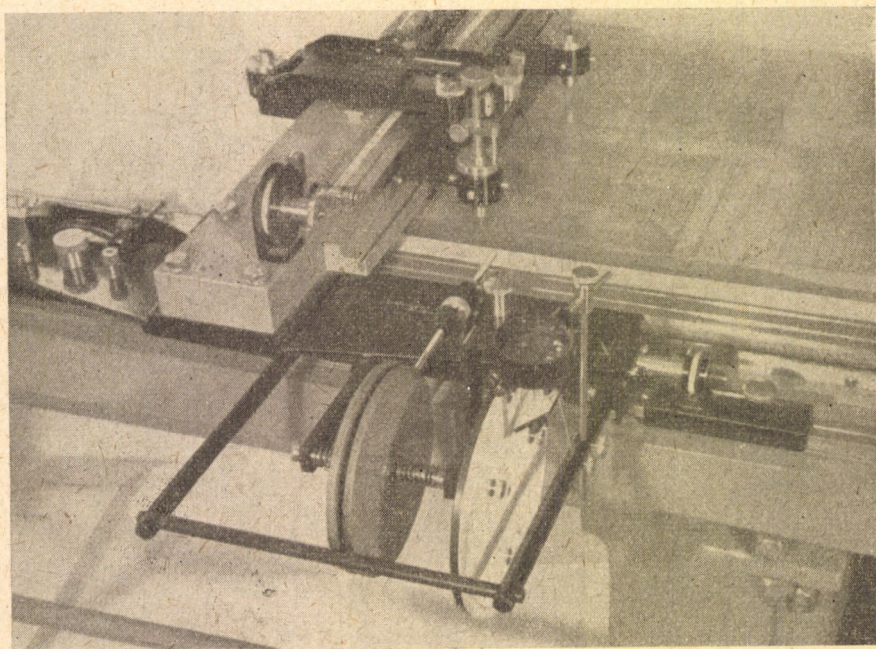
gördül. Mind az ordináta-, mind az abszcissa-sínhez rögzítve van egy-egy finom fogasléc. Ehhez fogaskerék útján illeszkednek a számbokba épített számdobok. A számdobok különböző léptékeknek megfelelő beosztásokkal vannak



2. ábra

elkerülése végett. A sík asztallaptól, amelyen a rajzolást végezzük, néhány cm magasságban késes keréken gördül az y_1 szán a y ordinátasín vájatában. Az y_1 szánhoz csatlakozik a P rajzolótű. Az ordinátasín mereven van csatolva az x_1 abszcisszaszánhoz, amely az x abszcisszasín vájatában késes keréken ellátva. Ezek a rajzolótűnek a koordinátairányokba való 0,1 mm-es elmozdulása még leolvasható és 0,02 mm még megbecsülhető. A készülék szavatolt pontossága 0,05 mm, ezt a gyakorlatban meg is kell követelnünk.

Gyakori eset, hogy nomogramok függvényiskáláit vagy hálózatokat úgy kell számítanunk, hogy a függvényértékeket valamilyen táblázatból keressük ki, egy állandót levonunk, és azután a rajz léptékének megfelelően egy állandóval még megszorozzuk. E munka elkerülésére a következő egyszerű kis készüléket szerelhetjük a koordinátográfra (2. ábra). Az abszcissa-



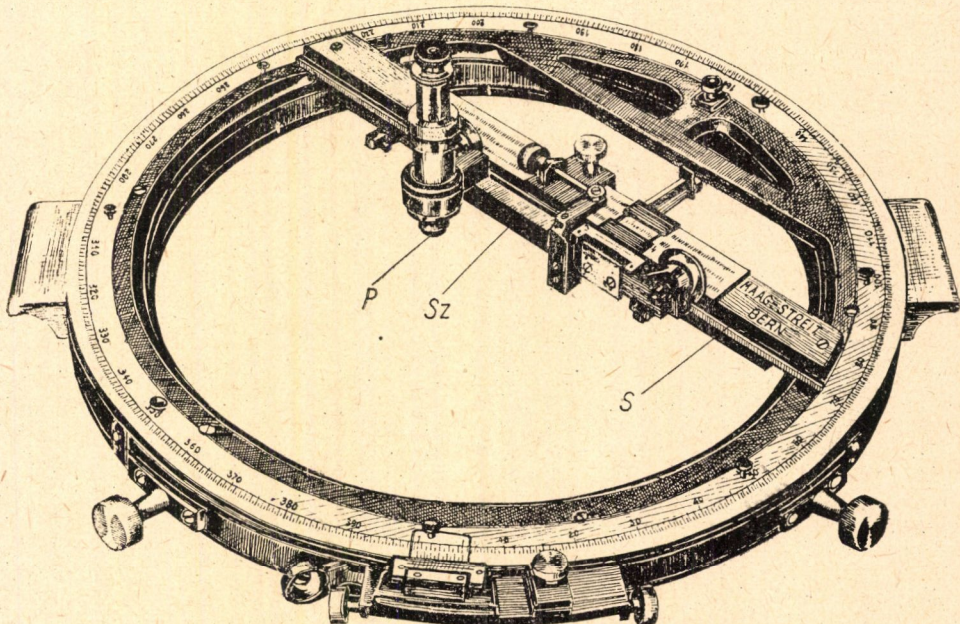
3. ábra

fogaslécra merőlegesen felszerelünk egy tengelyt, melynek egyik végén lévő fogaskerék a fogasléchez kapcsolódik, a másik végére pedig egy csúsztathatóan elhelyezett, legömbölyített élű D_1 tárcsát szerelünk. Ez a D_1 tárcsa egy ékpályán csúsztatható D_2 és a vele szemben elhelyezett szabadon csúsztatható D_3 tárcsát a D_2 és D_3 közös tengelyére szerelt nyomórugóknál fogva forgatja. A tengely végére nagyobb átmérőjű cserélhető Sz számdob-tárcsa van rögzítve, amelynek kerületére valamilyen skálát vihetünk fel, például az $y = \ln x$ függvény $1 \leq x \leq 10$ értékeinek megfelelő beosztást. A számdob-tárcsa állását pontosan meghatározhatjuk egy síktükörben. A számdob-tárcsa elfordulására a D_1 tárcsa arányosan fordul el, és a fogasléc közvetítésével ugyancsak az

elfordulással arányosan mozdul el az x_1 szán. Az arányossági tényezőt az szabja meg, hogy a D_1 tárcsát saját tengelyén mennyire toljuk be vagy húzzuk ki. A számdob-tárcsára a különböző beosztásokat polárkoordinátográffal mérhetjük fel. Intézetünk koordinátográfra szerelt készüléke a 3. ábrán látható.

A polárkoordinátográf (4. ábra) síkbeli polárkoordinátarendszerben adott pontok felmérésére, sugársorok és koncentrikus körök rajzolására alkalmas. Intézetünk polárkoordinátográffja a *Haag—Streit* berni cég 112-es listaszámú gyártmánya. Az alkatrészek öntött-acél körgyűrűkeretre vannak szerelve. A körgyűrűkeret egy sínen körbe gördülhet, a keret elfordulását 0,05 grad pontossággal olvashatjuk le. A körkeret egyik átmérőjében van felszerelve az S sín, ennek vágatában gördül az Sz szán. A szánhoz csatlakozik a P rajzoló tű. A rajzoló tű elmozdulása 0,1 mm pontossággal olvasható le.

Pantográffal ábrákat lehet felnagyítani, illetve kicsinyíteni. Intézetünk *Ott*-féle pantográffját *Ott*-féle affinográffá egészítettük ki [1], ily módon eseten-

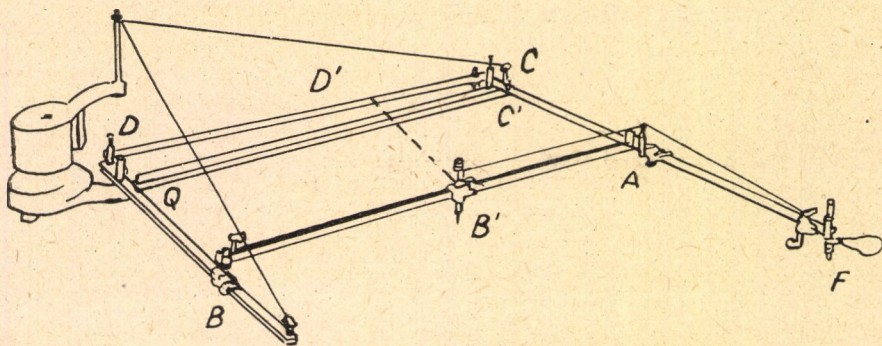


4. ábra

ként mint pantográf, illetve affinográf működhet. E készülékek vázlatát az 5. és 6. ábra mutatja. Az $ABCDP$ pontokat tartalmazó pantográf affinográffá való kiegészítése egy, az FC -hez folytatásaként mereven csatlakozó rúddal és egy, a CD -hez csatlakozó DP rúddal ($CF = QC = CP = 1055$ mm, $DP = 55$ mm), továbbá az S sínnel és a K_1, K_2 szánokkal történik. Az F pontba kísértőtűt, a B pontba rajzoló tűt helyezve, a szerkezet affinográfként működhet. Az AB karon a B rajzoló tűt és az AF karon az F kísértőtűt úgy kell beállítanunk, hogy BF merőleges legyen QP -re, tehát $AB = AF$ legyen. A készülékeinkkel elérhető zsugorítási arány határai 0,10 és 0,73.

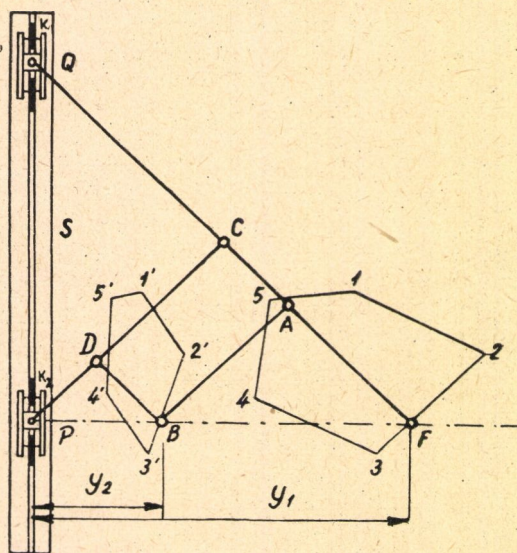
Az *Ott*-féle affinográf a leképezendő ábra méreteit csak egyik irányban változtatja meg. Két irányban különböző arányban torzító affinográf termé-

szetesen két közönséges affinográfából is összeépíthető, de ez a terjedelmet jelentékenyen megnöveli. Ezért tervbe vettük egy egyszerű mechanizmussal felépített, két irányban különböző arányban torzító affinográf építését is.



5. ábra

A nomogrammok gyakori projektív transzformációinál fellépő számítások elkerülése céljából kísérletezünk egy, a koordinátográfhoz illeszthető



6. ábra

perspektográf készítésével, amelynek segítségével a Descartes-féle rendszert mechanikusan képezhetjük le Moebius-rácsba. Ilyen alkalmazható készülék a Ritter-féle perspektográf [2].

Készülék alkalmazása esetén a rajzmunka megkezdése előtt célszerű három vonatkoztatási pontot vagy két egyenest az ábrázolandó rajz síkján felvenni, hogy a készülékkel való rajzolás közben rájuk időnként visszatérve a készüléket s így magát a rajzot is ellenőrizhessük.

A készülékek pontosságát csak az esetben tudjuk kihasználni, ha a készülékben a rajzolást végző vagy jelölő eszköz a célnak megfelelő. Éppen ezért az eszközöket a célnak megfelelően kell kiválasztani és állandóan ellenőrizni.

Rajzoló, illetőleg jelölő eszközök:

a) *Grafitpálca*, amivel közvetlenül nomogramm-rajzolást nem végzünk. Skálák hosszúságát és egyéb olyan jelöléseket húzunk meg vele, amelyek csak tájékoztató jellegűek.

b) *Rajztűvel* optikai fedésű, üvegre rétegezett emulzióba a készülékek segítségével karcolhatunk ábrákat, egyeneseket, illetve pontokat. Célszerű a rajztű hegyét valamilyen kemény fémből vagy kristályból készíteni (például ipari gyémántból), hogy a kopásnak jobban ellenálljon. A rajztű hegye finoman csiszolt forgáskúp, amelynek két szemköztes alkotója által bezárt szög kb. $30-60^\circ$ között van az emulzió vastagságának megfelelően. A bekarcolt vonal határozott kontúrját és a rajztű finomságát nagyítóval ellenőrizni kell. A tusrajzok készítésénél használatos emulzióra tompaszögű rajztűvel jelöljük fel a pontokat, ilyenkor a tű alá indigópapírt helyezünk.

c) *Tuskihúzó* a tusrajz készítésére alkalmas, üveglemezen rétegelt emulzió rajzeszköze, amellyel egyenesek és görbe vonalak húzhatók. Fontos követelmény, hogy a tuskihúzóval rajzolt vonal optikailag fedett és határozott körvonalú legyen, ezt nagyítóval ellenőriznünk kell. A jó kihúzó szárai egyenlő hosszúságúak, rajzolóéle ívben finoman csiszolt, így rajzolás közben a rajz síkját csak egy pontban érinti. Rajzolás közben nagyítóval a kihúzót is rendszeresen ellenőrizni kell. A vonalszélesség szabályozása szükségessé teszi olyan kihúzó alkalmazását, amelynek állítása nem okoz vonaleltolódást. Közöséges kihúzó szájnnyílásának állításakor ugyanis az egyik szár merevsége folytán általában csak az egyik szár távolodik el a középvonaltól, ami a középvonal eltolódását okozza. A középvonal eltolódása a vonalszélesség változásának a fele. E hibák elkerülésére minden készülékben csak úgynevezett centrális állítású tuskihúzót használhatunk, amelynek szájnnyílás-állítása a középvonal nem változik meg. Más rendszerű, például az úgynevezett »graphos« tuskihúzó, amelyet a derékszögű koordinátográfon konstans szélességű párhuzamos egyenessereg húzására alkalmazhatunk. Görbe vonalak készülékkel történő kihúzására alkalmazható a csőtoll. A kb. 0,1 mm belső átmérőjű csőtoll pontok jelölésére alkalmas.

A rajzolóeszközt a készülékekbe úgy kell beállítani, hogy a rajz síkjára merőleges legyen.

3. §. Nomogrammok másolása

Az üveglemez emulziójára felrajzolt nomogrammról másolatokat kell készítenünk. Ha a másolatnak a vetemedés nem árt, akkor síkfilmre másolunk. A síkfilm csak kis mértékben vetemedik (kb. 0,5–1%). A pozitív síkfilmről azután fénymásolat készíthető. Azokat a nomogrammokot viszont, amelyeknek a vetemedés árt, csak vetemedés- és törés-mentes anyagra másolhatjuk le.

1. *Másolás filmre.* Az általunk használt síkfilm Forte »Contaprint« film, amelynek mérete közel A_3 -as (400×300 mm). Az üveglemezről a nomogramm másolása szorító keretben történik. A leszorítást gondosan kell elvégezni, hogy a síkfilm teljes síkjában szorosan érintkezzék az ábra minden részével.

A film érzékenységétől függően a megvilágítási idő 4—10 sec, 3 méter távolságból 500 W. Tungstrafot (9000 Lumen) lámpával. Az előhívás Agfa 22 jelű hívóban történik. Ennek összetétele : metol : 0,8 g, nátriumsulfid (kristályos) : 80 g, hidrokchinon : 8 g, káliumkarbonát : 50 g, káliumbromid : 5 g, 1 liter vízben oldva. A tusrajzokról negatív másolatot kapunk, erről azután pozitív másolatokat készíthetünk. A negatív film helyettesítheti az üveglapot, az üveglapot lemoshatjuk és újra felhasználhatjuk. A síkfilmre másolandó, tussal készülő nomogrammok a kezelés szempontjából legmegfelelőbb helyzetben rajzoljuk fel az üveglemez emulziójára, és a függvényskalákat pozitív felirattal látjuk el. Fekete optikai fedésű emulzióba a nomogramm kívánt helyzetének tükröképét karcoljuk be, s a skalákat negatív felirattal látjuk el (tükrörírás).

2. *Másolás alumíniumbetétes papírra.* Az általunk használt vetemedésmentes anyag : Agfa »Korrektostat« fényérzékeny emulzióval ellátott alumíniumbetétes papír. Méretét az üveglemezhez sötétkamrában történő illesztése miatt 480×360 mm-re választottuk. A nomogramm másolása ugyanolyan módszerrel történik a vetemedésmentes felületre, mint a síkfilm esetében, a megvilágítási idő kb. 10 sec. Az előhívás ugyanígy történik. A másolatot a szem megnyugtatóbbnak és szebbnek látja, ha például a pontsoros nomogramm fekete alapon fehér vonalú, ezért ezt így is alkalmazzuk. A másolat »mélyfekete-fehér« kontrasztú rajzot ad.

Az eljárás kidolgozásáért ezúton is köszönetemet nyilvánítom *Sólyom Imre* munkatársamnak.

Az iparban meghonosodott egyéb másolási eljárásokat, például a cinkográfíát, bonyolultságuk és éppen ezért drága voltak miatt nem használjuk.

IRODALOM

- [1] F. A. WILLERS : *Mathematische Maschinen und Instrumente*. Akademie-Verlag, Berlin, 1951. (p. 98—100.)
 [2] F. KLEIN : *Vorlesungen über höhere Geometrie*. Berlin, Springer, 1926. (22. köt. 34. §.)

ОФОРМЛЕНИЕ НОМОГРАММ

Ф. Хорват

Резюме

Автор ознакомляет результатами в области оформления номограмм, достигнутыми Отделом численных и графических методов Института Прикладной Математики Академии Наук Венгрии. С целью точного изготовления номограмм и во избежание коробления они чертятся на покрытую эмульсией стеклянную пластинку с помощью прямоугольного или полярного координатографа. Метод изготовления пластинок излагается в § 1.

Встречающиеся чаще функции могут быть нанесены на носитель шкалы номограммы с помощью прикрепленного к прямоугольному координатографу вспомогательного устройства (черт. 2.) Устройство выполняет над данной функцией линейное преобразование.

Кривые шкалы номограммы можно вычертить с помощью пантографа или аффинографа вместо лекала. В интересах этого мы перестроили пантограф Отта, имеющийся в институте, с помощью применения дополнительных частей так, чтобы его можно было переделать в аффинограф (черт. 5).

§§ 2 и 3 трактуют копирование рисовальных приборов и номограмм.

TECHNIQUE OF NOMOGRAPHY

F. HORVÁTH

Summary

Author reviews the results achieved in the technique of nomography by the department for numerical and graphical methods of the Institute for Applied Mathematics of the Hungarian Academy of Sciences. For the sake of exactitude and so as to avoid cockling of the nomograms the nomograms are drawn by the aid of a rectangular or polar coordinatograph on a glass plate covered with emulsion. The method of preparing the glass plate is discussed in § 1.

Functions occurring frequently can be drawn on the scale holder of the nomogram with the aid of an auxiliary apparatus mounted on the rectangular coordinatograph (Fig. 2.). The apparatus effects a linear transformation on the given function.

The tracing of the curved scales of the nomograms can be expediently performed by the aid of a pantograph and an affinograph instead of a curve-piece. For this purpose the Ott-pantograph of the Institute can be transformed into an affinograph by inserting spare parts (Fig. 5.).

§ 2 and 3 deal with the tracing instruments and the copying of the nomograms.

A KOMPLEX POTENCIÁL EGYRÉTÚSÉGÉRŐL, I.

RÉNYI ALFRÉD és RÉNYI KATÓ

Bevezetés

Vizsgáljuk egy ideális, inkompresszibilis folyadék síkbeli stacionér áramlását. Jelentse $v = (v_x, v_y)$ az áramlás sebességvektorát a sík (x, y) koordinátájú pontjában. Jellemezzük a sík (x, y) pontját a $z = x + iy$ komplex számmal. Ismeretes, hogy ha az áramlás a z -sík T tartományában történik, és az áramlás örvény- és forrásmentes, akkor megadható egy olyan, a T tartományban reguláris $f(z) = \varphi + i\psi$ analitikus függvény — az áramlás *komplex potenciálja*, hogy

$$(1) \quad f'(z) = v_x - iv_y \quad (\text{azaz} \quad \overline{f'(z)} = v_x + iv_y),$$

vagyis, a Cauchy—Riemann egyenleteket figyelembevéve,

$$(2) \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

A $\psi = \text{const.}$ görbék az áramlás áramvonalai, másszóval egy $\psi = \text{const.}$ görbe minden pontjában a v vektor iránya megegyezik a görbe érintőjének irányával. A komplex potenciál természetesen mindig csak egy additív konstanstól eltekintve van meghatározva: az $f(z)$ és $f(z) + c$ komplex potenciálokhoz ugyanaz az áramlás tartozik.

A következőkben két típusú áramlástartomány esetét vizsgáljuk: félsíkszerű, illetve sávyszerű tartományok esetét. A z -sík T egyszeresen összefüggő tartományát, amelynek határa egynél több pontból áll és melynek minden határpontja *é* *le* *het*¹⁾, akkor nevezzük félsíkszerűnek, ha a végtelen távoli pont T -nek egyszeres határpontja, és akkor nevezzük sávyszerűnek, ha a végtelen távoli pont T -nek kétszeres határpontja.

Félsíkszerű tartományt egy, sávyszerű tartományt két »part« határol.

Egy félsíkszerű T tartományban folyó áramlás komplex potenciálját a szakirodalomban a következőképpen szokták meghatározni (lásd például: [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12]): vizsgálják azokat a $w = f(z)$ T -ben reguláris függvényeket, amelyek a T -tartományt egyrétűen képezik le a w -sík felső félsíkjára, oly módon, hogy a z -sík végtelen távoli pontjának a w -sík végtelen távoli pontja felel meg, és ezek közül választják ki egy

¹⁾ Lásd például [1], 41. oldal.

további feltétellel, például a sebességnek egy határpontban való előírásával a keresett függvényt. A vizsgált függvények T határát nyilván egyrétűen képezik le a w -sík valós tengelyére. Például, ha a T tartomány a $z = x + iy$ sík felső félsíkja, kivéve az $x = 0$, $0 < y \leq 1$ pontokat, az $f(z) = c\sqrt{z^2 + 1} + d$ függvények (ahol c és d valósak) felelnek meg az említett követelményeknek, ahol c az áramlás sebessége a végtelenben.

Az említett munkák a fenti eljárást csupán azzal indokolják, hogy a T tartomány határa az áramlásnak áramvonala kell, hogy legyen, tehát a határon kell, hogy $\psi = \psi_0$ legyen, ahol ψ_0 állandó, és mivel $f(z)$ úgyis csak egy additív állandótól eltekintve van meghatározva, feltehető, hogy $\psi = 0$; az adott tulajdonságokkal bíró komplex potenciál existenciáját a sebességnek egy határpontban való megadása által egy additív állandótól eltekintve egyértelműen meghatározott voltát a konformis leképezések elméletének Riemann-féle alaptételére való hivatkozással bizonyítják; nem indokolják azonban meg, hogy milyen alapon szorítkoznak eleve csak olyan $f(z)$ függvények vizsgálatára, melyek a T tartományban egyrétűek, sem pedig azt, hogy miért szorítkoznak csak olyan $f(z)$ függvények vizsgálatára, melyek T határát a teljes valós tengelyre és így magát a T tartományt a w -sík felső félsíkja képezik le. Még annak indokolása is hiányzik, hogy miért képezi le $f(z)$ a z -sík végtelen távoli pontját a w -sík végtelen távoli pontjára.

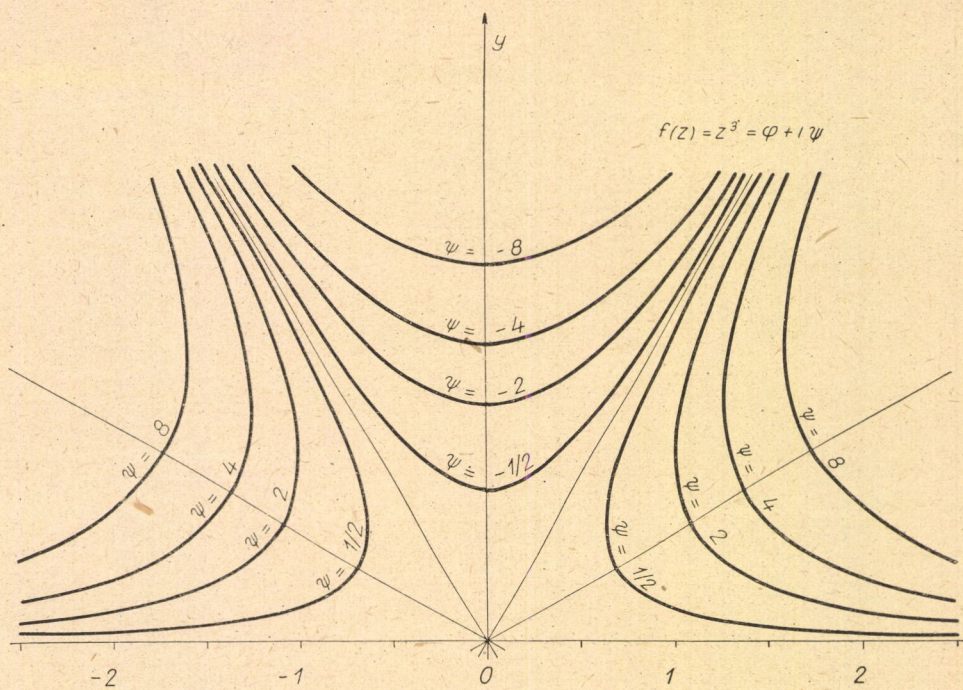
Márpedig az említett tulajdonságok feltevése nélkül a komplex potenciál egyértelműsége egyáltalán nincsen biztosítva. Például abban az egyszerű esetben, amikor T a z -sík felső félsíkja, amely esetben a szokásos tárgyalásmód mellett csak az $f(z) = cz + d$ függvények jönnek tekintetbe (c és d valósak)

az egyrétűség feltevése nélkül tekintetbe jön minden $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ alakú

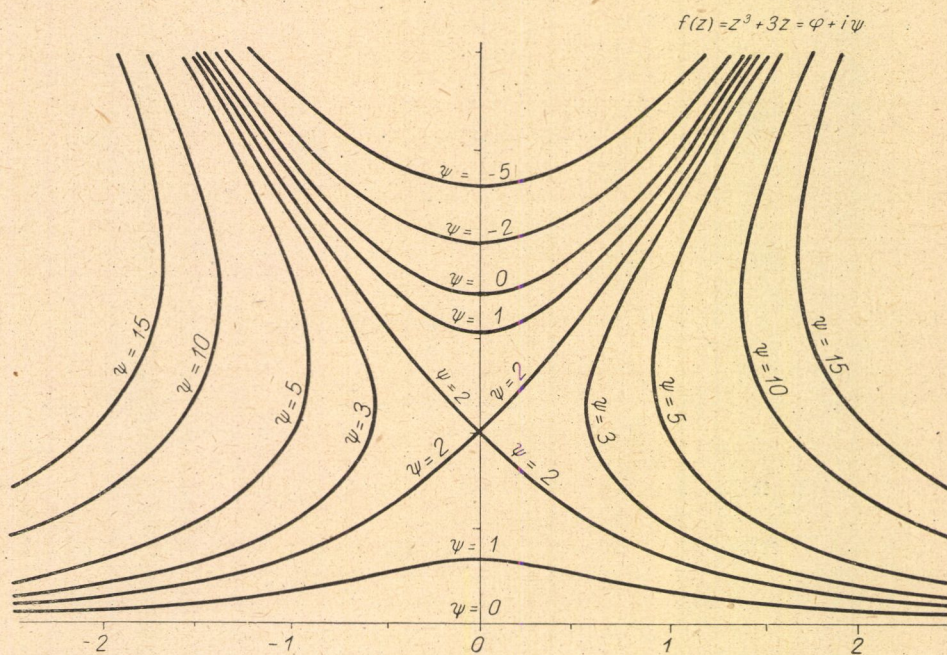
valós együtthatós hatványsorú egész függvény. E függvények között olyanok is vannak, amelyek a z -sík valós tengelyét a w -sík teljes valós tengelyére egyrétűen képezik le, például az $f(z) = z^3$ függvény; a z^3 komplex potenciál áramvonalrendszerét az 1. ábra szemlélteti. Az 1. ábrából látható, hogy valójában ez esetben az áramlástartomány határa, a valós tengely, nem áramvonal, mert a $z = 0$ pontban az áramlás elágazik. Ezzel szemben az $f(z) = z^3 + 3z$ komplex potenciálú áramlás esetében, melynek áramvonalait a 2. ábra mutatja, az áramlástartomány határa már valóban áramvonal, az elágazási pont a tartomány belsejébe tolódott. Ha viszont nem kívánjuk, hogy a z -sík valós tengelyét $f(z)$ egyrétűen képezze le a w -sík teljes valós tengelyére, az említett függvények között a $cz + d$ függvényeken kívül olyanok is vannak, melyek a z -sík felső félsíkjában egyrétűek, például az $f(z) = z^2$ függvény; ha azt a feltevést ejtjük el, hogy a végtelen távoli pont képe a végtelen távoli pont legyen, számításba jönnek például az $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ alakú függvények is

(a, b, c, d valósak, $ad - bc \neq 0$).

Sávszerű T tartományban történő áramlások tárgyalásánál a szakirodalomban szokásos eljárás abban áll, hogy vizsgálják azokat a T -ben reguláris $w = f(z)$ függvényeket, amelyek a T tartományt a w -síknak a valós tengely és egy azzal párhuzamos egyenes által meghatározott sávjára képezik le egyrétűen, mégpedig úgy, hogy a z -sík végtelen távoli pontja a w -sík végtelen távoli pontjába menjen át, és így T két partjának képei a w -síkon az említett vízszintes egyenesek legyenek. Ezt csak azzal indokolják, hogy a T tartomány



1. ábra



2. ábra

mindkét partja az áramlás áramvonala. és így azokon ψ állandó kell, hogy legyen. E kérdéssel kapcsolatban ugyanaz a hiányosság tapasztalható, mint a félsíkszerű tartományok esetében: nem indokolják meg, hogy miért kell, hogy a komplex potenciál T -ben egyrétű legyen, és a T tartomány határgörbét a w -sík egy-egy teljes vízszintes egyenesére képezze le: ilyen módon a komplex potenciál egyértelműsége ez esetben is nyitva marad. Hiszen például abban az esetben, ha T a $z = x + iy$ -sík $0 < y < \pi$ sávja, az említett tárgyalásmód mellett egyedül számításba jövő $w = cz + d$ függvényeken kívül tekintetbe jön például a $w = \operatorname{sh} z$ függvény, melynek áramvonalrendszere a 3. ábrán látható, amely a valós tengelyt és az $y = \pi$ egyenest egyrétűen képezi le a w -sík $\psi = 0$ egyenesére, azonban a $0 < y < \pi$ sávban nem egyrétű. Érdekes példa továbbá a $w = e^z$ függvény, amely az említett sávban egyrétű és amelyre az $y = 0$ és $y = \pi$ egyeneseken $\psi = 0$, azonban az $0 < y < \pi$ sávot a w -sík felső félsíkjára képezi le, az $y = 0$ és $y = \pi$ egyeneseket pedig nem teljes egyenesekre, hanem félegyenesekre, mégpedig a pozitív, illetve a negatív valós félegyenesekre képezi le. (Lásd a 4. ábrát, mely a szóbanforgó áramlás áramvonalait ábrázolja.)

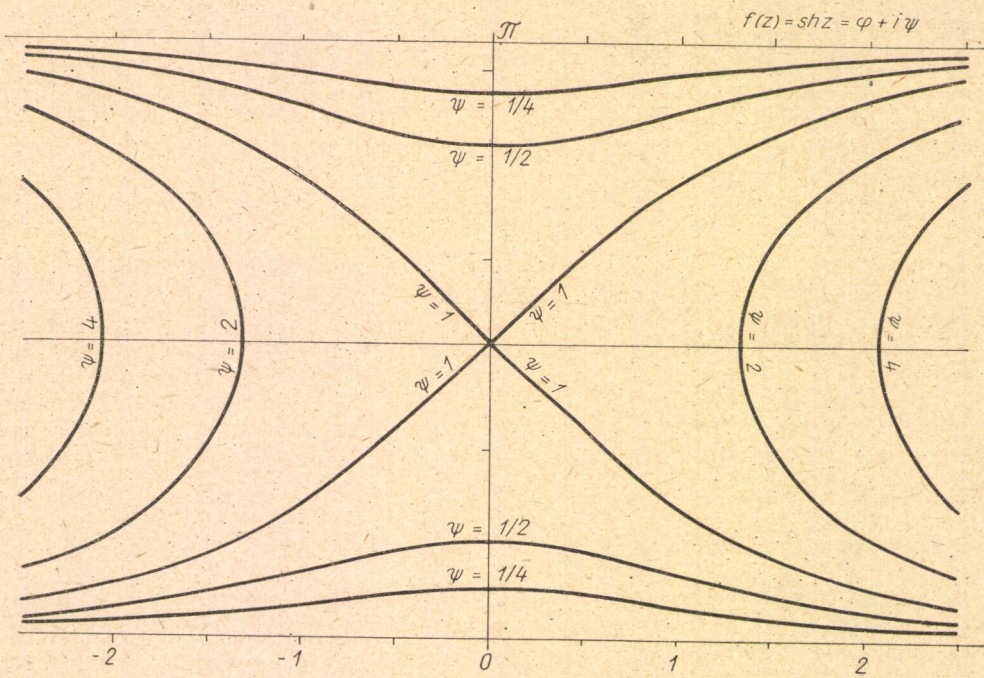
Dolgozatunk célja az említett kérdések tisztázása. Meg fogjuk mutatni hogy a komplex potenciál említett problematikus tulajdonságai félsíkszerű illetve sávyszerű tartományok esetében egy igen egyszerű és a gyakorlati alkalmazások során teljessülő hidrodinamikai feltevésből valóban levezethetők, és így a komplex potenciál unicitása bebizonyítható. Más, egyszerűen összefüggő tartományok esetében a helyzet lényegesen bonyolultabb, és a komplex potenciál egyrétűsége általában nem is áll fenn. Erre a kérdésre egy további dolgozatban kívánunk visszatérni.

Csupán egyetlen munkában találtuk meg a szóbanforgó tulajdonságok bizonyos, erős megszorítások melletti igazolását, mégpedig *M. A. Lavrentyev* és *B. V. Sabat* [11] könyvében (a 231–232. oldalakon). A félsíkszerű tartományokra e munkában a komplex potenciál unicitását azon feltevés mellett mutatják ki, hogy a T tartomány határgörbéjének a görbülete folytonosan differenciálható és az áramlás sebessége korlátos, a sávyszerű tartomány esetében azon kívül, hogy mindkét határvonal görbülete folytonosan differenciálható és a sebesség korlátos, még azt is felteszik, hogy a sáv szélessége, továbbá a görbületek és azok deriváltjai korlátosak. Ezek a feltevések azonban egyáltalán nem szükségesek és még a tankönyvekben iskolapéldákként bemutatott legegyszerűbb esetek jórésében sem teljesülnek.

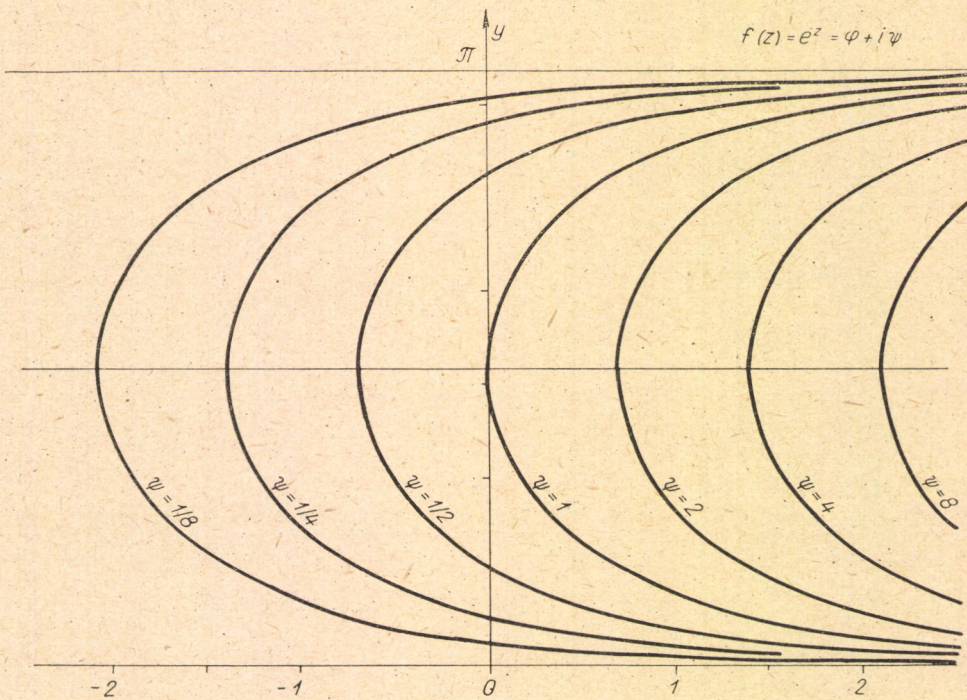
Így például a fentebb említett esetben, amikor T a $z = x + iy$ sík felső félsíkja az $x = 0$, $0 < y < 1$ pontok kivételével, a $z = 0$ és $z = i$ pontokba a határgörbe megtörik, továbbá a $z = i$ pont környezetében a sebesség nem korlátos; vagy például ha $z = re^{ia}$, és T a $0 < \alpha < \beta$ szögtér, ahol $\pi < \beta$; a komplex potenciál $w = cz^{1/\beta}$, és így a sebesség a végtelenben nem korlátos.

Dolgozatunkban sem a határgörbére (azon a természetes követelményen kívül, hogy a határ bármely pontja elérhető legyen), sem pedig a sebesség nagyságára vonatkozólag semmilyen megszorítást nem teszünk, és nem teszünk fel semmilyen más olyan feltevést sem, amely nem szükséges.

A feltétel, amely a komplex potenciál egyrétűségét mindkét tárgyalt esetben biztosítja, az, hogy az *átáramlás* a határ bármely pontja és egy tetszőleges belső pont között zérustól különbözzék. Mint ismeretes, a P és Q pontokat összekötő G görbén való *átáramlás*on a G görbén időegység alatt *átáramló*



3. ábra



4. ábra

folyadékmennyiséget nevezzük. Két pont között az átáramlás, mint az a hidrodinamikából jól ismeretes (lásd például [11], 231. oldal), a sebesség normális komponensének a két pontot összekötő görbeszakaszon vett, ívhossz szerinti integráljával arányos, és így a tárgyalt potenciáláramlás esetében nem függ az integrációs úttól, és nem más, mint a komplex potenciál imaginárius részének, ψ -nek (amelyet éppen ezért neveznek áramfüggvénynek) a két pontban vett értékének különbsége. Ha tehát a P belső pontot rögzítjük, és a Q pont akárhol helyezkedik el a T tartomány (egyik) határgörbéjén, az átáramlás (vízhozam) mindig ugyanaz lesz, mégpedig $\psi(P) - \psi(Q)$, és így beszélhetünk egy belső pont és az egyik határvonal közötti átáramlásról. Az, hogy az átáramlás 0, azt jelenti, hogy a szóbanforgó két pontot összekötő görbén időegység alatt ugyanannyi folyadék áramlik át az egyik irányba, mint amennyi visszafelé a másik irányba. Ez a helyzet például annál az áramlásnál, amelynek a komplex potenciálja e^z , a $0 < y < \pi$ sávban a két partot összekötő görbe esetében. A 4. ábráról látható, hogy minden áramvonal vagy egyszer sem vagy kétszer metszi a sáv két határát összekötő bármely görbét. Bizonyos értelemben mondhatjuk, hogy az áramlás akkor *valódi*, ha a határ és bármely belső pont között, továbbá sávyszerű tartomány esetén a két part között az átáramlás nem zérus: ebben az értelemben eredményünk úgy fogalmazható, hogy *félsíkban, illetve sávyszerű tartományban történő valódi áramlás esetében a komplex potenciál mindig egyrétű*. Természetesen a határ és egy belső pont közötti átáramlás, mint az a fentiekből kitűnik, csak akkor van egyáltalán értelmezve, ha a határ minden pontjában a komplex potenciál imaginárius részének a kerületi értéke létezik. Ebből következik, hogy minden valódi áramlásnál ennek a feltételnek teljesülnie kell. Ha már tudjuk, hogy a komplex potenciál a T félsíkyszerű tartományt egyrétűen képezi le a w -sík felső félsíkjára (illetve a T sávyszerű tartományt a w -síkon a $0 < \psi < a$ sávra) a határpontok elérhetőségéből $f(z)$ és így ψ folytonossága a határon már következik (lásd [1], 43. oldal). Mivel mi az egyrétűséget nem tesszük fel eleve, hanem arra az áramlás valódi voltából következtetünk, ψ kerületi értékeinek létezését a határon fel kell, hogy tegyük, illetve az áramlás valódi voltának definíciójába bele kell, hogy foglaljuk.

Az áramlás »valódi« voltának definíciója tehát a következőképpen hangzik: a T félsíkyszerű tartományban történő áramlást akkor nevezzük valódinak, ha T határának egy tetszőleges, végesben fekvő pontja és egy tetszőleges belső pont között az átáramlás létezik és 0-tól különbözik.

Az áramlás valódi voltának feltevése tehát magában foglalja azt a feltevést, hogy ψ -nek a határ minden végesben fekvő pontjában létezik a kerületi értéke. Mivel feltevés szerint T határa az áramlásnak áramvonala, kerületi értékének félsíkyszerű tartomány esetében a T tartomány határán egy ψ_0 állandóval kell egyenlőnek lennie, melyről feltehetjük, hogy $\psi_0 = 0$. Sávyszerű tartomány esetében az áramlást akkor nevezzük valódinak, ha az átáramlás bármely belső pont és bármely végesben fekvő határpont között létezik és 0-tól különböző, továbbá a két határgörbe között is 0-tól különböző az átáramlás, vagyis az áramlás teljes vízhozama nem zérus. Ebből következik, hogy sávyszerű tartomány esetében ψ kerületi értéke minden határpontban létezik és a ψ_0 , illetve ψ_1 állandók egyikével egyenlő, aszerint, hogy a szóbanforgó határpont melyik határgörbén fekszik, továbbá $\psi_1 \neq \psi_0$. Mint látni fogjuk, ebből már következik, hogy φ is folytonos a határ minden végesben fekvő pontjában.

Az 1. § a félsíkszerű, a 2. § a sávszerű tartomány esetével foglalkozik ; a 3. § kiegészítő megjegyzéseket tartalmaz. A komplex potenciál egyrétűségének az áramlás valódi volta alapján való kimutatásához, vagyis az 1. és 2. tételek bebizonyításához mindkét esetben bizonyos egyszerű komplex függvénytanai segédtételekre, az A. illetve B. tételekre lesz szükségünk. Mindkét típusú tartomány esetében megmutatjuk, hogy feltételeink nemcsak elégségesek, hanem szükségesek is. Ilyen módon tételeink a szóbanforgó kérdések teljes megoldását adják.

1. §. Félsíkszerű tartományban történő valódi áramlás komplex potenciáljának egyrétűsége

A T egyszeresen összefüggő tartományt, amelynek egynél több határpontja van és amelynek minden határpontja elérhető, mint már említettük, akkor nevezzük félsíkszerűnek, ha a végtelen távoli pont T -nek egyszeres határpontja. Egy T -ben reguláris $f(z) = \varphi + i\psi$ függvényről akkor mondjuk, hogy egy T -ben történő áramlás komplex potenciálja, ha T határán létezik ψ kerületi értéke, és egy ψ_0 állandóval egyenlő. A T tartományban történő áramlást akkor nevezzük valódi áramlásnak, ha T bármely határpontja és bármely belső pontja között az átáramlás értelmezhető és 0-tól különböző véges értékkel bír. Ha $w = f(z) = \varphi + i\psi$ a T félsíkszerű tartományban történő valódi áramlás komplex potenciálja, akkor tehát T minden határpontjában létezik ψ kerületi értéke és egyenlő egy ψ_0 konstanssal ; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\psi_0 = 0$; ez esetben az áramlás valódi voltából következik, hogy T bármely belső pontjában $\psi \neq 0$. Érvényes a következő

1. tétel: Legyen T egy félsíkszerű tartomány és $w = f(z) = \varphi + i\psi$ egy T -ben történő áramlás komplex potenciálja. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $f(z)$ a T tartományt a w -sík felső (vagy alsó) félsíkjára egyrétűen képezze le, az, hogy az áramlás T -ben valódi legyen.

Az 1. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő komplex függvénytanai segédtételekre :

A. tétel: Legyen $\zeta = F(w)$ olyan egész függvény, amely a valós tengelyen csupán valós értékeket vesz fel, másutt nem vesz fel valós értéket.²⁾ Akkor $F(w) = cw + d$, ahol c és d valós állandók és $c \neq 0$.

Először bebizonyítjuk az A. tételt, azután megmutatjuk, hogy következik az A. tételből az 1. tétel.

Az A. tétel bizonyítása: Tegyük fel először, hogy $F(w)$ transzcendens egész függvény ; ez esetben a Picard-féle tétel szerint vagy $F(w)$ -nek vagy $[F(w) - 1]$ -nek végtelen sok valós gyöke van ; ezek feltevésünk szerint csak a valós tengelyen fekszenek ; két ilyen gyök között azonban kell, hogy legyen $F'(w)$ -nek egy gyöke. $F'(w)$ egy gyökén keresztül azonban legalább két $\Im[F(w)] = \text{const.}$ görbe, a mi esetünkben tehát legalább két $\Im[F(w)] = 0$ görbe kell, hogy áthaladjon (lásd például [11], 183. oldal), és így kell, hogy legyenek olyan pontok a valós tengelyen kívül, ahol $F(w)$ valós, ellentétben

²⁾ Elegendő volna feltenni, hogy $F(w)$ a w -sík felső félsíkjában reguláris, a w -sík valós tengelyén folytonos és valós, és a w -sík felső félsíkjában nem vesz fel valós értéket ; ebből a tükrözési elv segítségével már következik, hogy $F(w)$ egész függvény, és a valós tengelyen kívül másutt valós értéket nem vesz fel.

feltevésünkkel. Ez az eset tehát nem lehetséges. Ha $F(w)$ legalább másodfokú racionális egész függvény, az $F(w) = 0$ egyenletnek legalább két gyöke kell, hogy legyen, melyek megint csak a valós tengelyek fekkhetnek, és ezek között kell, hogy $F'(w)$ -nek legyen egy gyöke; így tehát ez esetben is ellentmondásra jutunk. Ilyen módon csak az az eset lehetséges, hogy $F(w)$ elsőfokú polinom, vagyis $F(w) = cw + d$ alakú; feltevéseinkből következik, hogy akkor c és d valósak és $c \neq 0$. Ezzel az A. tételt bebizonyítottuk.³⁾

Az 1. tétel bizonyítása: Feltételünk szükségessége nyilvánvaló, hiszen ha $w = f(z) = \varphi + i\psi$ a T tartományt egyrétűen képezi le a w -sík felső félsíkjára, akkor T határán $\psi = 0$, T belsejében viszont $\psi > 0$. Ilyen módon az áramlás valódi volta szükséges ahhoz, hogy $w = f(z)$ a T tartományt egyrétűen képezze le a w -sík felső félsíkjára. Áttérünk most a feltétel elégségességének kimutatására.

Legyen $z = g(w)$ egy olyan függvény, amely egyrétűen képezi le a w -sík felső félsíkját a z -sík T tartományára úgy, hogy a $w = \infty$ pontnak a $z = \infty$ pont felel meg. Akkor a $\zeta = F(w) = f(g(w)) = U + iV$ függvény a w -sík felső félsíkjában reguláris, és a w -sík valós tengelyén $F(w)$ imaginárius része, V , folytonos és határértéke 0. Ennélfogva a V harmónikus függvényre alkalmazva a tükrözési elvet (lásd például [11], 190. oldal), következik, hogy V az egész síkon harmónikus, tehát $F(w)$ az egész síkon reguláris függvény, azaz $F(w)$ egész függvény. Ebből egyébként — figyelembevételével, hogy $g(w)$ a valós tengelyen folytonos, — következik, hogy $f(z)$ a T tartomány határán folytonos, ezt a tényt azonban nem használjuk fel. Az $F(w)$ egész függvény nyilvánvalóan kielégíti az A. tétel feltevéseit, tehát $F(w) = cw + d$, és így $f(z) = ch(z) + d$, ahol c és d valósak és $w = h(z)$ a $z = g(w)$ függvény inverze, és így $h(z)$, és ezért $f(z)$ is a T tartományt egyrétűen képezi le a w -sík felső, illetve alsó félsíkjára, aszerint, hogy $c > 0$ vagy $c < 0$, vagyis aszerint, hogy T egy belső pontja és T határa között az átáramlás pozitív vagy negatív; ezzel az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

2. §. Sávyszerű tartományban történő áramlás komplex potenciáljának egyrétűsége

A T egyszeresen összefüggő tartományt, amelynek egynél több határpontja van és határpontjai mind elérhetők, mint mondtuk, akkor nevezzük sávyszerűnek, ha a végtelen távoli pont T -nek kétszeres határpontja. Egy $w = f(z) = \varphi + i\psi$ alakú, T -ben reguláris függvényt akkor nevezünk egy T -beli áramlás komplex potenciáljának, ha ψ kerületi értékei T két határgörbéjén a ψ_0 , illetve ψ_1 állandóval egyenlők. A T sávyszerű tartományban történő áramlást akkor nevezük valódinak, ha T határának bármely pontja és bármely belső pontja között az átáramlás értelmezhető és 0-tól különböző értékkel bír, továbbá a T két partja közötti átáramlás is 0-tól különböző. A T tartomány két partja közötti átáramlást az áramlás *hozamának* nevezzük. Ha a T sávyszerű tartományban folyó áramlás valódi és hozama a , továbbá $w = f(z) = \varphi + i\psi$ az áramlás komplex potenciálja, akkor tehát T két partján ψ kerületi értékei léteznek és ψ_0 -al, illetve $(\psi_0 + a)$ -val egyenlők. Feltehetjük, hogy $\psi_0 = 0$; ez esetben T belsejében ψ értéke 0-tól és a -tól különböző. Érvényes a következő

³⁾ Az A. tétel ismert és elemibb eszközökkel is bebizonyítható; lásd például: [15]

2. tétel: A T sávyszerű tartományban történő áramlás $w = f(z)$ komplex potenciálja akkor és csak akkor képezi le a T tartományt egyrétűen a w -sík $0 < \psi < \alpha$ sávjára, ha az áramlás T -ben valódi és hozama α -val egyenlő.

A 2. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételekre:

B. tétel: Legyen $w = U + iV$ és $F(w)$ olyan, a $0 < V < \alpha$ sávban reguláris függvény, melynél a $V = 0$, illetve $V = \alpha$ egyeneseken az $\operatorname{Im} [F(w)]$ függvénynek létezik a kerületi értéke, és a $V = 0$, illetve $V = \alpha$ egyeneseken $\operatorname{Im} [F(w)] = 0$, illetve $\operatorname{Im} [F(w)] = \alpha$, továbbá a $0 < V < \alpha$ sávban $\operatorname{Im} [F(w)] \neq 0$ és $\operatorname{Im} [F(w)] \neq \alpha$. Akkor $F(w) = w + d$, ahol d valós állandó.

A B. tétel bizonyítása: Tekintsük a $G(w) = F(w) - w$ függvényt. $G(w)$ a $V = 0$ és a $V = \alpha$ egyeneseken valós értékeket vesz fel és folytonos, a $0 < V < \alpha$ sávban pedig $- \alpha \leq \operatorname{Im} [G(w)] \leq + \alpha$. A tükrözési elvnek a $V = 0$ és $V = \alpha$ egyenesekre történő iterált alkalmazásával következik, hogy $\operatorname{Im} [G(w)]$ az egész síkon harmónikus, tehát $G(w)$ egész függvény, melynek imaginárius része korlátos. Ennélfogva a Liouville-tétel harmónikus függvényekre vonatkozó következménye értelmében (lásd például [11], 182. oldal) $G(w)$ egy állandóval, mégpedig feltevéseink szerint egy valós állandóval egyenlő.

A 2. tétel bizonyítása: A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégséesség bizonyítása céljából válasszunk egy olyan $z = g(w)$ függvényt, amely a $w = U + iV$ sík $0 < V < \alpha$ sávját egyrétűen képezi le T -re oly módon, hogy a $w = \infty$ pont a $z = \infty$ pontba és így a $V = 0$ egyenes T egyik partjába, a $V = \alpha$ egyenes T másik partjába menjen át. Akkor az $F(w) = f(g(w))$ függvény kielégíti a B. tétel feltételeit. Ennélfogva $F(w) = w + d$, tehát $f(z) = h(z) + d$, ahol d valós állandó és $w = h(z)$ a $z = g(w)$ függvény inverze, tehát $w = f(z)$ a T tartományt egyrétűen képezi le a $0 < V < \alpha$ sávra. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

3. §. Kiegészítő megjegyzések

Az 1. és 2. tételek sem a T tartomány határára (azon túlmenően, hogy T határpontjai elérhetőek), sem a komplex potenciálnak a határon való viselkedésére (azon túlmenően, hogy a part, illetve mindkét part az áramlás áramvonala legyen) nem tesznek megszorításokat. Ha feltesszük a félsík-szerű tartomány esetében, hogy $w = f(z)$ a T tartomány határát egyrétűen képezi le a teljes valós tengelyre, egy valamivel egyszerűbb bizonyítási módszer is alkalmazható. Ismeretes, hogy ha egy T egyszerűen összefüggő tartományban reguláris függvény T határán folytonos és a határt egyrétűen képezi le egy Γ Jordan-görbére, akkor a függvény T -ben is egyrétű. Ha a határ képe tartalmazza a végtelen távoli pontot, ez már nem igaz: erre példa a z^3 függvény a felső félsíkban vagy például a $z^3 + 3z$ függvény, amelynél még az is teljesül, hogy a határon $f'(z) \neq 0$. A szóbanforgó állítás azonban igaz azon kiegészítő megszorítás mellett, hogy a függvény a tartomány belsejében nem vesz fel olyan értéket, amelyet a határon felvesz. Ezt a következőképpen láthatjuk be: a $w = f(z)$ függvény legyen reguláris a T egyszerűen összefüggő tartományban, T határán legyen folytonos, és képezze le T határát egyrétűen a w -sík T^* félsík-szerű vagy sávyszerű tartományának határára. Tegyük fel, hogy ha z a T tartomány belső pontja, $f(z)$ nem fekszik T^* határán, azonban van olyan z_0 pont T -ben, hogy $f(z_0)$ T^* belsejében fekszik.

A Riemann-tétel szerint T egyrétűen leképezhető a ζ -sík egységgörére. Ha egy ezt a leképezést létesítő leképező függvény $\zeta = \gamma(z)$ és ennek inverz függvénye $z = g(\zeta)$, akkor a $w = f(g(\zeta))$ függvény az egységgörben reguláris, és az egységgör területét egyrétűen képezi le T^* határára. Mármint tekintsünk egy $\tau = h(w)$ függvényt, amely egyrétűen képezi le a w -sík T^* tartományát a τ -sík egységgörére, akkor a $\tau = h(f(g(\zeta)))$ függvény reguláris a ζ -sík egységgörében; ugyanis feltevésünk szerint $f(g(\zeta))$ az egységgörben felvett értékei mind T^* -ban fekszenek; ugyanis $f(g(\zeta))$ értéke, ha $|\zeta| < 1$, feltevésünk szerint nem lehet T^* határán; és ha $f(g(\zeta))$ -nak volna olyan értéke, például $f(g(\zeta_1))$, amely nem tartozik T^* -hoz, akkor — mivel feltevésünk szerint van olyan ζ_0 , amelyre $f(g(\zeta_0))$ T^* -hoz tartozik, a ζ_0 és ζ_1 pontokat összekötő egyenes szakaszon volna olyan ζ_2 pont, amelyre feltevésünkkel szemben $f(g(\zeta_2))$ T^* határához tartoznék. Azon feltevés nélkül, hogy $f(z)$ nem tartozhat T^* határához, ha z T -hez tartozik, $h(f(g(\zeta)))$ általában nem lesz az egységgörben reguláris; például, ha T a z -sík felső félsíkja, $f(z) = z^3$, T^* a w -sík felső félsíkja, $\zeta = \frac{z-i}{z+i}$ és $\tau = \frac{w-i}{w+i}$, akkor

$$\tau = -\frac{1 + 3\zeta^2}{\zeta(3 + \zeta^2)}, \text{ és így a } h(f(g(\zeta))) \text{ függvénynek a } \zeta = 0 \text{ pont első-}$$

rendű pólusa. Mivel továbbá, ha τ egyszer körbefut az egységgörön, ζ is egyszer körbefut az egységgörön, tehát egy jól ismert tétel szerint $h(f(g(\zeta)))$ az egységgörnek önmagára való egyrétű, tehát lineáris leképezését létesíti. Ez esetben egy további lineáris leképezéssel elérhető, hogy $\tau = \zeta$ legyen, vagyis $f(z) = H(\gamma(z))$, ahol $H(w) = \zeta$ lineáris függvény, amely az egységgört önmagára képezi le. Mivel $\gamma(z)$ egyrétűen képezi le a T tartományt az egységgörre, H pedig egyrétű az egységgörben, következik, hogy $f(z)$ is egyrétű T -ben, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzendő, hogy az a feltétel, hogy T -ben $f(z)$ nem vesz fel olyan értéket, amelyet a határon felvesz, maga után vonja, hogy ha a T^* tartomány lezártjának kiegészítő halmaza T^{**} , akkor $f(z)$ nem vesz fel sem T -ben, sem T határán T^{**} -ba tartozó értéket. Ha tehát $w_0 \in T^{**}$, amikor is tehát w_0 T^{**} -nak (amely nyílt halmaz) belső pontja, akkor $f(z)$ nem vesz fel a w_0 pont egy megfelelő kis $|w - w_0| \leq r$ környezetébe tartozó értéket. A I. Markusevics [12] könyvében fellelhető az a megjegyzés (lásd: 369. oldal), hogy egy ilyen w_0 érték létezéséből és abból, hogy $f(z)$ T határát egyrétűen képezi le T^* határára, következik, hogy $f(z)$ T -ben egyrétű. A fentebb bizonyított állítás valamivel többet mond ki, mint Markusevics említett megjegyzése, ugyanis lehetséges az az eset is, hogy T^{**} üres; ez az eset például, ha T a felső félsík, és $f(z) = z^2$. Persze, ez az eset visszavezethető Markusevics említett megjegyzésére, úgy, hogy a T^* tartományt leképezzük egy olyan tartományra, amelynek a »külseje« már nem üres.

Az előbbi megjegyzésünk sávyszerű tartomány esetében is alkalmazható, ha tudjuk, hogy $f(z)$ T mindkét határgörbét $\psi = 0$, illetve $\psi = a$ teljes egyenesekre képezi le ($a \neq 0$). Az $a = 0$ eset nem jön számításba, mert kimutatható, hogy ez esetben az áramlásnak T -ben van egy nyugvópontja, ahol tehát $f'(z) = 0$, és így a leképezés nem egyrétű. Ez következik egy Titchmarsh-tól származó tételből ([13], 122. oldal), amely szerint, ha a T -ben reguláris $f(z)$ függvény T határát a k -szor befutott egységgörre képezi le, akkor az $f'(z)$ függvénynek T -ben pontosan $k - 1$ gyöke van. Nekünk

е тételre csak a $k = 2$ esetben vanszükségünk, amely esetben е тétel *Brouwer* fixponttételéből is következik. de belátható a szóbanforgó függvény *Blaschke*-faktorokkal való előállítás ([14], 222. oldal) útján is.

Az említett eset áll fenn például abban az esetben. ha $f(z) = \operatorname{sh} z$, $0 < y < \pi$.

Mint láttuk, a komplex potenciál egyrétűségéhez nem elegendő, ha T határán $f(z)$ egyrétű. Ha azonban a sebességnek a végtelenben való viselkedésére bizonyos megszorítást teszünk, a komplex potenciál egyrétűsége a határon való egyrétűségből már következik. Igaz ugyanis a következő állítás (lásd például *Markusevics* [12], 369—371. oldal):

Ha a T félsíkyszerű tartományt határoló görbének a végtelenben mindkét irányban léteznek az aszimptotái, és azok egymással $\alpha\pi$ szöget zárnak be, $0 < \alpha \leq 2$, továbbá a $w = f(z)$ komplex potenciál T határát egyrétűen képezi le, a w -sík teljes valós tengelyére és $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z^{\frac{3}{\alpha}} = 0$, akkor $f(z)$ a T tartományt egyrétűen képezi le a w -sík felső félsíkjára.

IRODALOM

- [1] Г. М. ГОЛУЗИН : *Геометрическая теория функции комплексного переменного*. Гостехиздат, Москва, 1952.
- [2] H. LAMB : *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932. (6. ed.)
- [3] A. BETZ : *Konforme Abbildung*. Springer, Berlin, 1948.
- [4] N. J. KOTSCHEIN—I. A. KIBEL—N. W. ROSE : *Theoretische Hydromechanik I*. Akademie Verlag, Berlin, 1954.
- [5] И. И. АГРОСКИН Г. Т. ДМИТРИЕВ—Ф. И. ПИКАЛОВ : *Гидравлика*. Гостехиздат, Москва, 1954.
- [6] BUDÓ Á. : *Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
- [7] B. A. FUKSZ—B. V. SABAT : *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
- [8] SASVÁRI G. : *Hidrodinamika*. Athenaeum, Budapest, 1925.
- [9] GRUBER J.—BLANKÓ M. : *Folyadékok mechanikája*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [10] И. И. ПРИВАЛОВ : *Введение в теорию функции комплексного переменного*. Гостехиздат, Москва, 1948.
- [11] М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ—Б. В. ШАБАТ : *Методы теории функции комплексного переменного*. Гостехиздат, Москва, 1950.
- [12] А. И. МАРКУШДВИЧ : *Теория аналитических функций*. Гостехиздат, Москва, 1950.
- [13] E. C. TITCHMARSH : *The theory of functions*. (2. ed.) Oxford University Press, London, 1952.
- [14] S. SAKS—A. ZYGMUND : *Analytic functions*. („Monografie Matematyczne” Tom XXVIII.) Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa—Wrocław, 1952.
- [15] M. TIDEMAN : »Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions«. *Nordisk Matematisk Tidskrift* 2 (1954) 95—96.

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА I.

А. Реньи и К. Реньи

Резюме

Рассмотрим плоское стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $v = (v_x, v_y)$ означает вектор скорости течения в точке (x, y) плоскости. Охарактеризуем точку (x, y) плоскости комплексным числом $z = x + iy$. Известно, что если безвихревое и свободное от источников течение происходит в области T плоскости z , то можно задать такую регулярную в области T аналитическую функцию $f(z) = \varphi + i\psi$, комплексный потенциал течения —, для которой $f'(z) = v_x - iv_y$. Кривые $\psi = \text{const}$ являются линиями тока, иными словами в каждой точке кривой $\psi = \text{const}$ направление

вектора ϵ совпадает с направлением касательной к кривой. Разумеется, комплексный потенциал всегда определен только с точностью до постоянного слагаемого.

В дальнейшем мы рассмотрим области течения двух типов: области типа полуплоскости и типа полосы. Мы говорим, что односвязная область T плоскости z , граница которой состоит из более чем одной точки и все граничные точки которой достижимые, является областью типа полуплоскости, если бесконечно удаленная точка является простой точкой границы T , и что она является областью типа полосы, если бесконечно удаленная точка является двукратной точкой ее границы.

Комплексный потенциал течения, происходящего в области типа полуплоскости T , в литературе обычно определяется следующим образом (см. например [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [12]): рассматриваются те регулярные в T функции $w = f(z)$, которые отображают однолистно область T на верхнюю полуплоскость плоскости w , причем бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует бесконечно удаленная точка плоскости w , и из этих функций выделяется с помощью дальнейшего условия, например, заданием скорости в одной граничной точке, комплексный потенциал течения. Рассматриваемые функции конечно отображают однолистно границу T на вещественную ось плоскости w .

Упомянутые работы обосновывают описанный метод лишь тем, что граница области T должна быть линией тока, следовательно на границе должно иметь место $\psi = \psi_0$, где ψ_0 постоянное и так как $f(z)$ определяется только с точностью до постоянного слагаемого, то можно положить $\psi_0 = 0$; существование комплексного потенциала, обладающего данным свойством, и его однозначную определенность через задание скорости в одной граничной точке доказывается ссылкой на основную теорему теории конформных отображений; однако не мотивируются ни то, почему заранее ограничиваются рассмотрением таких функций $f(z)$, которые являются однолиственными в области T , ни то почему ограничиваются рассмотрением таких функций, которые отображают границу T на всю вещественную ось и следовательно самое область T на верхнюю полуплоскость плоскости w . Необосновано также, почему $f(z)$ отображает бесконечно удаленную точку плоскости z на бесконечно удаленную точку плоскости w .

Без предположения упомянутых свойств однозначная определенность комплексного потенциала вовсе не обеспечена. Например в том простом случае, когда T — верхняя полуплоскость плоскости z , когда, значит, при обычном способе исследование принимаются во внимание только функции $f(z) = cz$ (c вещественно), без предположения

однолиственности подходящими являются все целые функции вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ с вещественными коэффициентами, среди которых есть и такие, которые отображают однолистно вещественную ось плоскости z на вещественную ось плоскости w , напр. функция

$f(z) = z^3$; если же мы не потребуем, чтобы $f(z)$ отобразил вещественную ось плоскости z на всю вещественную ось плоскости однолистно, то среди упомянутых функций найдутся и кроме $f(z) = cz$ такие, которые являются однолиственными в верхней полуплоскости плоскости z , например, функция $f(z) = z^2$; если мы откинем предположение о том, что образом бесконечно удаленной точки является бесконечно удаленная точка, то подходят функции вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d вещественные, $ad - bc \neq 0$).

При рассмотрении течений, происходящих в областях типа полосы, обычный в литературе метод, состоит в том, что рассматриваются те регулярные в T функции, которые отображают область T однолистно на полосу плоскости w , лежащую между вещественной осью и параллельной с ней прямой, причем бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в бесконечно удаленную точку плоскости w и таким образом кривые, образующие границу области T , переводятся в пару горизонтальных прямых. Это оправдывается только тем, что обе граничные кривые области T являются линиями тока, и поэтому на них ψ должна быть постоянной. В связи с этим вопросом мы видим те же пробелы, что и в случае областей типа полуплоскости: упомянутые работы не обосновывают, почему комплексный потенциал должен быть однолистным в T и почему должен он граничные кривые области T отобразить в полные горизонтальные прямые плоскости w ; таким образом вопрос об однозначной определенности комплексного потенциала в этом случае тоже остается открытым. Ведь, например, в том случае когда T полоса $0 < y < \pi$ плоскости $z = x + iy$, кроме функций $f(z) = x + iy$ применяемых во внимание при обычной трактовке, подходит например, функция $f(z) = \operatorname{sh} z$, которая, хотя и отображает однолистно вещественную ось и прямую $y = \pi$ на прямую $\psi = 0$ плоскости w , однако, не является однолистной в полосе $0 < y < \pi$, далее функция e^z , которая хотя и является

однолистной в этой полосе, но отображает полосу $0 < y < \pi$ на верхнюю полуплоскость плоскости w , а прямые $y = 0$ и $y = \pi$ на положительную, соответственно отрицательную вещественную полуось.

Целью нашей статьи является выяснение вышеупомянутых вопросов. Мы покажем, что все проблематические свойства комплексного потенциала в случае областей типа полуплоскости или полосы могут быть в самом деле выведены из простых и ясных гидродинамических предположений, действительно выполняющихся в практических приложениях; итак, однолистность, соответственно однозначная определенность комплексного потенциала могут быть доказаны. В случае других односвязных областей положение гораздо сложнее и однозначная определенность комплексного потенциала вообще говоря не имеет места. К этому вопросу мы намерены вернуться в другой статье.

Мы нашли доказательство упомянутых свойств, только в одном месте, именно в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [11], но там же только при сильных ограничениях. В этой работе единственность комплексного потенциала в областях типа полуплоскости доказана при том предположении, что кривизна границы области T непрерывно дифференцируема во всех своих точках, подразумевая и бесконечно удаленную точку и что скорость течения ограничена. В случае области типа полосы кроме того, что кривизна обеих граничных кривых непрерывно дифференцируема и скорость ограничена, они предполагают еще, что ширина полосы, далее кривизны и их производные ограничены. Однако, эти предположения не являются необходимыми и не выполняются даже в большей части простейших случаев, приводимых учениками в качестве упражнений.

В нашей работе мы не делаем никаких ограничений ни относительно гладкости границы (за исключением естественного требования, чтобы любая точка границы была достижимой), ни относительно величины скорости. Для формулировки условия, обеспечивающего однолистность, нам придется пользоваться понятием расхода. Количество жидкости, протекающего за единицу времени через кривую, соединяющую две точки мы называем расходом между этими точками. Известно, что расход между двумя точками пропорционально интегралу нормальной составляющей скорости, по длине дуги, взятому по кривой, соединяющей обе точки и, значит, в случае рассматриваемого потенциального течения это не что иное, как разность значений мнимой части ψ комплексного потенциала в данных точках. В некотором смысле можно сказать, что течение является истинным тогда, если расход между границей и любой внутренней точкой не равно нулю. Естественно, что расход между границей и какой-либо внутренней точкой имеет смысл только в том случае, если в каждой точке границы существует граничное значение мнимой части комплексного потенциала. Отсюда следует, что это условие должно выполняться при всяком истинном течении. Поэтому мы должны предположить существование граничных значений ψ , вернее мы должны включить это в определение истинности течения.

В § 1. говорится об областях типа полуплоскости, в § 2. об областях типа полосы. Для доказательства однолистности комплексного потенциала на основе истинности течения, т. е. для доказательства теоремы 1., соответственно 2., нам понадобятся в обоих случаях некоторые вспомогательные теоремы теории функций комплексного переменного — теорема А, соответственно В. Мы покажем для областей обоих типов, что наши условия не только достаточны а также необходимы. Таким образом, нижеследующие теоремы дают полное решение вопроса.

Течение, происходящее в области T типа полуплоскости мы назовем истинным, если расход между любой конечной точкой границы T и любой внутренней точкой может быть определен и обладает отличным от 0 конечным значением. Имеет место следующая

Теорема 1.: Пусть T — область типа полуплоскости и $w = f(z)$ — комплексный потенциал некоторого течения, происходящего в T . Для того, чтобы $f(z)$ отобразил область T однолистно на верхнюю (или нижнюю) полуплоскость плоскости w необходимо и достаточно, чтобы течение было истинным в T .

Для доказательства теоремы 1. нужна следующая простая теорема теории функций комплексного переменного:

Теорема А: Пусть $F(w)$ целая функция, принимающая на вещественной оси только вещественные значения и не принимающая вещественных значений внутри верхней полуплоскости. Тогда $F(w) = cw + d$, где c и d — вещественные постоянные и $c \neq 0$.

Течение, происходящее в области T типа полосы, мы называем истинным, если расход между любой точкой границы T и любой внутренней точкой может быть определен и обладает отличным от 0 значением, и если расход между обоими берегами тоже отличается от 0. Имеет место следующая.

Теорема 2.: Комплексный потенциал $w = f(z) = \varphi + i\psi$ течения, происходящего в области T типа полосы, тогда и только тогда отображает однолистно область T на полосу $0 < \psi < a$ плоскости w , если течение истинное в T и его расход равен a .

Для доказательства теоремы 2. нужна следующая вспомогательная теорема :

Теорема В.: Пусть $w = U + iV$ и $F(w)$ такая регулярная в полосе $0 < V < a$ функция, для которой на прямых $V = 0$ и $V = a$ существуют граничные значения именно на $V = 0$ и $V = a$ имеет место $\psi = 0$ соответственно $\psi = a$ и в полосе $0 < V < a$ везде $\psi \neq 0$ и $\psi \neq a$. Тогда $F(w) = w + d$, где d — вещественное постоянное.

ÜBER DIE SCHLICHTHEIT DES KOMPLEXEN POTENTIALS, I.

A. RÉNYI und K. RÉNYI

Zusammenfassung

Man betrachte die ebene stationäre Strömung einer idealen Flüssigkeit. Es bezeichne $v = (v_x, v_y)$ den Geschwindigkeitsvektor im Punkte (x, y) der Ebene. Man charakterisiere den Punkt (x, y) durch die komplexe Zahl $z = x + iy$. Ist die Strömung in einem Gebiet T der z -Ebene wirbel- und quellenfrei, so existiert eine in T reguläre analytische Funktion $f(z) = \varphi + i\psi$, das komplexe Potential der Strömung, für welche $f'(z) = v_x - iv_y$ ist. Die Kurven $\psi = \text{const.}$ sind die Stromlinien der Strömung; die Richtung von v ist also in jedem Punkte einer solchen Kurve gleich der Richtung der Tangente der Kurve.

Im folgenden betrachten wir zwei verschiedene Typen von Gebieten: »halb-ebenenartige« und »streifenartige« Gebiete. Wir nennen ein einfach zusammenhängendes, von mehr als einen Randpunkt besitzendes Gebiet »halb-ebenenartig« wenn es lauter erreichbare Randpunkte besitzt und der unendlich ferne Punkt ein einfacher Randpunkt des Gebietes ist; wir nennen es »streifenartig« falls der unendlich ferne Punkt ein zweifacher Randpunkt des Gebietes ist. Ein streifenartiges Gebiet wird von einem »Ufer«, das streifenartige Gebiet von zwei »Ufern« begrenzt.

In der Fachliteratur (vgl. z. B. die Arbeiten [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12]) pflegt man das komplexe Potential einer Strömung in einem halb-ebenenartigen Gebiet T folgendermassen zu bestimmen: Man nimmt diejenigen in T regulären analytischen Funktionen, $w = f(z)$, die das Gebiet T schlicht auf die obere Halbebene der w -Ebene derart abbilden, dass der unendlich ferne Punkt der z -Ebene demjenigen der w -Ebene entspricht. Durch eine weitere Bedingung, z. B. durch Vorschreiben der Geschwindigkeit in einem Randpunkt, wird das komplexe Potential festgelegt. Die durch diese Bedingung festgelegten Funktionen bilden natürlich den Rand von T eindeutig auf die reelle Achse der w -Ebene ab. In den obenerwähnten Arbeiten wird dieses Verfahren nur dadurch begründet, dass das Ufer von T eine Stromlinie der Strömung sein muss, für das Ufer gilt also $\psi = \psi_0$ mit konstantem ψ_0 , welches, da $f(z)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, gleich 0 genommen werden darf. Die Existenz und Unizität der Funktion, die die erwähnte Eigenschaft hat, beweist man mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes; es wird aber nicht begründet, warum man von vornherein nur solche Funktionen in Betracht zieht, die in T schlicht sind, ferner das Ufer von T auf die volle reelle Achse und damit auch T auf die obere Halbebene der w -Ebene abbilden; es bleibt auch unbegründet, warum dem unendlich fernen Punkt der z -Ebene derjenige der w -Ebene entspricht. Ohne die Annahme obiger Eigenschaften ist jedoch die Eindeutigkeit des Potentials noch nicht gesichert. Falls T die obere Halbebene der z -Ebene ist, kommen bei der üblichen Behandlung nur die Funktionen $f(z) = cz$ (c reell) in Betracht. Lässt man aber die Forderung der Schlichtheit fallen, so kommt jede ganze Funktion, deren Potenzreihe um $z = 0$ reellen Koeffizienten hat, in Betracht. Unter diesen Funktionen kommen auch solche vor, die die reelle Achse der z -Ebene auf die volle reelle Achse der w -Ebene schlicht abbilden (z. B. $f(z) = z^2$). Wenn wir nicht fordern, dass die reelle Achse der z -Ebene auf die volle reelle Achse der w -Ebene abgebildet werde, so gibt es ausser $f(z) = cz$ auch solche Funktionen die in der oberen Halbebene schlicht sind (z. B. $f(z) = z^2$); lässt man die Forderung fallen, dass dem unendlich fernen Punkt der z -Ebene derjenige der w -Ebene entspricht, so kommen auch die Funktionen $\frac{az+b}{cz+d}$ mit reellen a, b, c, d ($ad - bc \neq 0$) in Betracht.

Im Falle »streifenartiger« Bereiche besteht das übliche Verfahren darin, dass man diejenigen analytischen Funktionen $f(z)$ betrachtet, die T auf einen Streifen abbilden, der durch die reelle Achse und eine parallele Gerade begrenzt wird; so dass

dem unendlich fernen Punkt der z -Ebene derjenige der w -Ebene entspricht. Dieses Verfahren wird auch nur dadurch begründet, dass die Ufer von T Stromlinien der Strömung sein müssen. Hier tritt derselbe Mangel auf, wie im Falle eines »halbebenenartigen« Gebiets. Die Frage nach der Eindeutigkeit des Potentials bleibt daher auch in diesem Falle offen. Ist z. B. T der Streifen $0 < y < a$, so kommt neben den Funktionen $f(z) = cz + d$ (c reell) z. B. die Funktion $y = \operatorname{sh} z$ in Betracht, die zwar die Geraden $y = 0$ und $y = a$ auf die reelle Achse der w -Ebene schlicht abbildet, aber im Streifen $0 < y < a$ nicht mehr schlicht ist; oder die Funktion e^z welche zwar im oben erwähnten Streifen schlicht ist, aber den Streifen $0 < y < a$ auf $\psi > 0$ abbildet.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist die Klarlegung obiger Fragen. Wir zeigen, dass sich die problematischen Eigenschaften des komplexen Potentials im Falle halbebenenartiger und streifenartiger Gebiete aus einfachen hydrodynamischen Voraussetzungen, die in den praktischen Fällen erfüllt sind, ableiten lassen; die Schlichtheit des komplexen Potentials lässt sich also in diesen Fällen wirklich nachweisen. Wesentlich verwickelter ist die Sachlage im Falle von Bereichen anderer Art; wir beabsichtigen diese Frage in einer späteren Abhandlung zu behandeln.

In der Fachliteratur haben wir den Nachweis der obenerwähnten Eigenschaften an einer einzigen Stelle gefunden, nämlich im Buche von *Lawrentieff* und *Schabat* [11]; aber nur unter starken Einschränkungen, die sogar im grössten Teil der in den Lehrbüchern behandelten einfachen Beispielen nicht erfüllt sind. Wir benötigen (ausser der Voraussetzung, dass jeder Randpunkt erreichbar sei) keine Beschränkungen über die Glättigkeit der Randkurve und auch keine über den Betrag der Geschwindigkeit (im Buch von *Lawrentieff*—*Schabat* werden derartige Voraussetzungen gemacht).

Im § 1. wird der Fall des halbebenenartigen Gebietes, im § 2. der des streifenartigen Gebietes behandelt. In beiden Fällen werden einfache funktionentheoretische Hilfsmittel benutzt, die als Satz A. und Satz B. formuliert werden. In beiden Fällen zeigen wir, dass unsere Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig sind; damit geben unsere Sätze in den beiden obenerwähnten Fällen die vollständige Lösung des Problems.

Zur Formulierung der Bedingung durch die die Schlichtheit des komplexen Potentials gesichert werden kann, benötigen wir den Begriff des Durchflusses. Unter Durchfluss zwischen zwei Punkten versteht man bekanntlich die Flüssigkeitsmenge, die durch eine die zwei Punkte verbindende Kurve in der Zeiteinheit durchströmt. Der Durchfluss zwischen zwei Punkten, wie es wohl bekannt ist, ist proportional mit dem nach der Bogenlänge genommenen Integral der normalen Komponente der Geschwindigkeit längs einer die zwei Punkte verbindender Kurve; sie ist gleich dem Zuwachs von ψ zwischen den zwei Punkten. Im Falle halbebenenartigen Gebieten nennen wir die Strömung »echt«, wenn der Durchfluss zwischen einem beliebigen Randpunkt und einem beliebigen inneren Punkt von Null verschieden ist. Der Durchfluss zwischen einem inneren Punkt und einem Randpunkt ist natürlich nur dann definiert, wenn der Randwert des Imaginärteiles existiert; die Existenz der Randwerte des Imaginärteiles von ψ muss daher vorausgesetzt werden.

Es gilt der

Satz 1. Es sei T ein halbebenenartiges Gebiet und $f(z)$ das komplexe Potential einer Strömung in T . Notwendig und hinreichend dafür, dass T durch $w = f(z)$ schlicht auf die obere Halbebene der w -Ebene abgebildet werde, ist, dass die Strömung in T echt sei.

Zum Beweis benötigen wir den

Satz A. Es sei $F(w)$ eine ganze Funktion, die für reelles w lauter reelle Werte annimmt, und für $\operatorname{Re} w \neq 0$ keinen reellen Wert annimmt. Dann ist $F(w) = cw + d$ mit reellen c und d .

Wir nennen eine Strömung in einem streifenartigen Gebiete echt, wenn der Durchfluss zwischen einem beliebigen inneren Punkt und zwischen einem beliebigen Randpunkt nicht Null ist und auch der Durchfluss zwischen den beiden Ufern von Null verschieden ist. Es gilt der

Satz 2. Das komplexe Potential $w = f(z)$ einer Strömung in einem streifenartigen Gebiet T bildet dann und nur dann T schlicht auf ein Streifen $0 < \psi < a$ ab, wenn die Strömung in T echt ist.

Zum Beweis benötigen wir den

Satz B. Es sei $w = U + iV$ und $F(w)$ eine im Streifen $0 < V < a$ reguläre analytische Funktion, deren Imaginärteil ψ für $V = 0$ den Randwert 0, für $V = a$ den Randwert a hat und im Streifen $0 < V < a$ von Null und von a verschieden ist. Dann ist $F(w) = w + d$ mit reellen d .

HŐVEZETÉSI ÉS DIFFÚZIÓS FELADATOK ÖSSZETETT PEREMFELTÉTELEKKEL, I.

FREUD GÉZA

Bevezetés

A matematikai irodalomban részletesen tárgyalják a hővezetés differenciálegyenletének megoldását bizonyos egyszerű peremfeltételek mellett. Ezek a peremfeltételek három jellemző típusba sorolhatók: 1. A test határán előírjuk a hőmérsékletet; 2. A test határán előírjuk az időegység alatt átáramló hőmennyiséget; 3. A test érintkezik egy másik közeggel, melynek hőmérsékletét előírjuk, és a határon a lineáris hőközlési törvény érvényes. A felsorolt esetek rendre olyan peremfeltételhez vezetnek, hogy (u -val jelölve a test hőmérsékletét) a peremen

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}$$

előírt értékeket vesznek fel. (Lásd például *A. Sommerfeld* [3], 63–68. oldalak.) Az itt felsorolt esetek azonban nem alkalmasak valamennyi, a gyakorlatban is megvalósuló hővezetési feladat megoldására. Gyakran találkozunk olyan hővezetési feladattal, ahol az érintkező test hőmérséklete nem ismert, hanem egy további közönséges differenciálegyenlet segítségével határozható meg. A dolgozat végén bebizonyítjuk, hogy az így kapott kezdeti és peremfeltételek mellett a feladat megoldása egyértelmű és korrekt kitűzésű. A jelen dolgozat célja, hogy egy ilyen esetekben használható számítási módszert ismertessen. Módszerünk egy szemléletes fizikai megfontoláson alapszik. Tekintsünk egy vékony rudat, melyben hosszirányban vizsgáljuk a hővezetést, és egyik végén »valahogyan« egy másik testtel áll kapcsolatban. Ha az időt t -vel, a rúd hosszirányú koordinátáját pedig x -szel jelöljük, úgy — mint ismeretes — a V hőmérséklet a

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. A rúd vége legyen az $x = 0$ koordinátájú pont. A peremfeltétel ebben a pontban a tárgyalt esetekben mindig egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amely ismeretlenként tartalmazza a csatlakozó test hőmérsékletét, mint az idő függvényét, továbbá $V(0, t)$ -t és $V_x(0, t)$ -t. Mármint, akármilyen alakú is ez a közönséges diffe-

renciálegyenlet-rendszer, a rúdvégnek a rúdra gyakorolt hatása csak egyféle lehet: minden időpillanatban egy bizonyos (pozitív vagy negatív) hőmennyiség megy át a csatlakozó testből a rúdba. Ez a folyamat, feltételezve, hogy a $t = 0$ időpillanatban az egész rúd hőmérséklete állandó, és ezt az állandó értéket választjuk a hőmérsékleti skála zéruspontjának, az alábbi analitikus kifejezéssel írható le:

$$(2) \quad V(x, t) = \int_0^t F(x, t - \tau) W(\tau) d\tau,$$

ahol

$$(3) \quad F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}}$$

és $W(\tau) d\tau$ arányos a $(\tau, \tau + d\tau)$ időintervallumban a rúdba átáramló hőmennyiséggel. A (2) és (3) útján felírt $V(x, t)$ függvény kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét homogén kezdeti feltételekkel. (2)-ből $V(0, t)$ és $V_x(0, t)$ is (amelyek a peremfeltételként kapott közönséges differenciálegyenlet-rendszerben szerepelnek) az egyváltozós, egyelőre ismeretlen $W(t)$ függvény-nel fejezhetők ki. A peremfeltétel ennek következtében egy integro-differenciálegyenlet-rendszert szolgáltat az ismeretlen $W(t)$ függvényre, továbbá az érintkező test ismeretlen hőmérsékletére. Ezzel feladatunk (mint látni fogjuk) egyszerűbb lett, mert egy ismeretlen kétváltozós függvény — tudniillik $V(x, t)$ — helyett most már csak egy ismeretlen egyváltozós függvény — tudniillik $W(t)$ — lép fel. A kapott integro-differenciálegyenlet-rendszer konvolúció-típusú: integráljel alatt kizárólag a $W(t)$ függvény és egy ismert függvény konvolúciója lép fel. Egyenletrendszerünknek ez a speciális alakja lehetővé teszi, hogy azt számos fontos esetben Laplace-transzformáció segítségével megoldjuk. Ilyen módon számos fontos esetben explicit a akban, táblázatosított függvények segítségével elő tudjuk állítani $W(t)$ -t és a rúddal érintkező test hőmérsékletét is. A gyakorlatilag fontos esetekben rendszerint éppen az utóbbira van szükségünk, és ezeket fogjuk kiszámítani; magának $V(x, t)$ -nek a meghatározására egy további (rendszerint már csak numerikusan elvégezhető) integrálásra lesz szükség. Több esetben a végképletben a Gauss-féle hibaintegrál lép fel, amelyre (komplex argumentum esetén is) hozzáférhető táblázatok állnak rendelkezésre. (Lásd például: *K. A. Karpov* [1].)

A továbbiakban több olyan feladatot ismertetünk, melynél a megoldás-függvény a vázolt módon képletszerűen előállítható. A feladatok egy része külső megbízások során merült fel; másik része logikusan csatlakozik az előbbiekhöz, és azokkal együtt bizonyos egységet képez.

A közölt mintára természetesen ennél általánosabb feladatok is megoldhatók.

Összefoglaljuk azon feltételeinket, amelyek valamennyi megoldott feladatnál közegek: A hővezető közeg homogén, izotróp, fahője nem függ a hőmérséklettől; két test határán lineáris hőátadási törvény érvényes.

Miután célunk elsősorban ezen számítási módszer ismertetése (és a dolgozat így is hosszabbra nyúlt, mint szerzője szerette volna), egyes olyan kérdéseket, hogy például a c) feladatban fellépő $g(p)$ függvénynek van-e

inverz Laplace-transzformáltja, és azt a Riemann—Mellin-féle megfordítási képlet előállítja-e, nem részletezünk. Az olvasó a tankönyvirodalom alapján ezen kiegészítéseket nehézség nélkül elvégezheti.

1. §. Hővezetési feladatok egyik irányban végtelen rúdra

a) Első példaként tekintsük az alábbi feladatot : Egy, egyik irányban végtelen hosszú vékony homogén rúd egyik végéhez egy kis kiterjedésű, de számottevő hőkapacitású test csatlakozik. A $t = 0$ kezdőpillanatban a rúd hőmérséklete a helytől független állandó ; a test hőmérséklete a $t = 0$ időpontban nem egyezik meg a rúd hőmérsékletével. Meghatározandó a rúd és a test hőmérséklete a helykoordináta és a t idő, illetve csak a t idő függvényében, ha a rendszer a környezettel nincsen termikus kapcsolatban.

Jelöljük $U(t)$ -vel a test hőmérsékletét, $V(x, t)$ -vel a rúd x koordinátájú pontjának hőmérsékletét. A rúd vége legyen az $x = 0$ pont, maga a rúd az $x > 0$ félegyenes. A hőmérsékleti skála zéruspontját vegyük egyenlőnek a rúd kezdeti hőmérsékletével.

A lineáris hőátadási törvény következtében a peremfeltétel a rúd végén :

$$(4) \quad V_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)].$$

A test által az időegység alatt a rúdnak átadott hőmennyiség arányos $[-U'(t)]$ -vel, arányos továbbá az $U(t) - V(0, t)$ hőmérsékletkülönbséggel ; tehát

$$(5) \quad U'(t) = -B[U(t) - V(0, t)].$$

A kezdeti feltételek :

$$(6) \quad V(x, 0) = 0$$

és

$$(7) \quad U(0) = U_0.$$

Tekintettel (6)-ra, a megoldásfüggvényt a (2) alakban kereshetjük. Jelöljük (most és a továbbiakban is) $U(t)$ és $V(x, t)$ t -szerinti Laplace-transzformáltjait $u(p)$ -vel és $v(x, p)$ -vel ; $V(x, t)$ -t állítsuk elő a (2) alakban, és $W(t)$ Laplace-transzformáltja legyen $w(p)$. A (3) képlettel definiált $F(x, t)$ függvény Laplace-transzformáltja :

$$f(x, p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha x \sqrt{p}},$$

tehát, tekintettel (2)-re, a konvolúciótétel értelmében

$$(8) \quad v(x, p) = f(x, p) w(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha x \sqrt{p}} w(p),$$

és $V_x(x, t)$ Laplace-transzformáltja :

$$v_x(x, p) = -\alpha \sqrt{\pi} e^{-\alpha x \sqrt{p}} w(p).$$

A (4) és (5) egyenletek Laplace-transzformáltjai lineáris egyenletrendszert szolgáltatnak $u(p)$ -re és $w(p)$ -re:

$$Cu(p) - \left(a\sqrt{\pi} + C \sqrt{\frac{\pi}{p}} \right) w(p) = 0$$

$$(p + B)\sqrt{p}u(p) - B\sqrt{\pi}w(p) = U_0\sqrt{p}.$$

Innen

$$u(p) = U_0 \frac{a\sqrt{p} + C}{\sqrt{p}(ap + C\sqrt{p} + Ba)}$$

A fenti függvények visszatranszformálásához az alábbi tételt használhatjuk fel:

Ha $F(t)$ Laplace-transzformáltja egyenlő $f(p)$ -vel, akkor a

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} F(s) ds$$

függvény Laplace-transzformáltja:

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} f(\sqrt{p})$$

(lásd például *K. W. Wagner* [4], a 60–61. oldalakon).

Ennek felhasználásával elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(9) \quad U(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_0 \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ \left(p_1 + \frac{C}{a} \right) e^{p_1^2 t} \text{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) - \right. \\ \left. - \left(p_2 + \frac{C}{a} \right) e^{p_2^2 t} \text{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

ahol p_1 és p_2 az $ap^2 + Cp + Ba = 0$ egyenlet gyökei, melyekről feltesszük, hogy egymástól különbözőek. A (9) képletben szereplő Erf-függvény a Gauss-féle hibaintegrál:

$$\text{Erf}(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Továbbá

$$(10) \quad W(t) = \frac{2U_0 C}{a\pi(p_1 - p_2)} \left\{ p_1 e^{p_1^2 t} \text{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) - p_2 e^{p_2^2 t} \text{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\}.$$

Ez utóbbi képletből a rúd $V(x, t)$ hőmérséklete a hely és idő függvényében a (2) és (3) felhasználásával számítható.

b) Második példaként tárgyaljuk az alábbi: Tekintsük az előbbi elrendezést, de a rúd végével érintkező test hőmérséklete a $t = 0$ időpillanatban egyenlő a rúd kezdeti hőmérsékletével, viszont ez a test nem hőszigetelt, hanem másodpercenként Q kalóriát vesz át a környezetétől. Feladatunk ugyanúgy tárgyalható, mint az előbbi, azzal a különbséggel, hogy (5) helyett az

$$(5^*) \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t)$$

peremfeltétellel¹⁾ érvényes, és (7) helyébe a

$$(7^*) \quad U(0) = 0$$

kezdeti feltétel lép. Azt kapjuk, hogy

$$u(p) = \frac{g(p)}{\sqrt{p}} \frac{C + a\sqrt{p}}{Aap + AC\sqrt{p} + Ba},$$

ahol $g(p)$ a $Q(t)$ Laplace-transzformáltja. Amennyiben $g(p)$ racionális törtfüggvény, tehát ha például

$$Q(t) = \sum a_k e^{-\gamma_k t},$$

akkor a Laplace-transzformáció megfordításával $U(t)$ explicite megadható; speciálisan, ha Q időtől független állandó, akkor a visszatranszformálás eredménye:

$$(11) \quad U(t) = \frac{Q}{Aa} \left\{ \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \frac{2\alpha_3}{\sqrt{\pi}} e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \frac{2\alpha_4}{\sqrt{\pi}} e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

ahol p_1 és p_2 az

$$Aap^2 + ACp + Ba = 0$$

egyenlet gyökei, melyekről feltesszük, hogy nem esnek egybe, és

$$\alpha_1 = \frac{Aa}{B} - \frac{C^2}{a} \frac{A^2}{B^2}, \quad \alpha_2 = \frac{AC}{B},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{C}{p_1^2} \right), \quad \alpha_4 = \frac{1}{p_2 - p_1} \left(\frac{a}{p_2} + \frac{C}{p_2^2} \right).$$

A rúd hőmérsékletét a hely és idő függvényében ismét (2) és (3)-ból számíthatjuk, ahol most

$$(12) \quad W(t) = QC \frac{A}{aB} + \frac{QC}{a(p_1 - p_2)} \left\{ -\frac{2}{p_1 \sqrt{\pi}} e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{\pi}) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{p_2 \sqrt{\pi}} e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\}.$$

c) $Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}$ esetén, ha a kezdeti és peremfeltételek megegyeznek a b) alattival, akkor a következő eredményeket kapjuk:

$$U(t) = \frac{Q_0}{Aa} \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma} \sqrt{t}} e^{x^2} dx + \alpha_2 \right\} e^{-\gamma t} +$$

$$+ \frac{2Q_0}{\sqrt{\pi} Aa} \left\{ \alpha_3 e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \alpha_4 e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

¹⁾ Természetesen B értéke is más most, mint az (5) képletben.

$$W(t) = \frac{CQ_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\beta_1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma}\sqrt{t}} e^{x^2} dx + \beta_2 \right\} e^{-\gamma t} + \\ + \frac{2CQ_0}{\pi} [\beta_3 e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \beta_4 e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t})],$$

ahol

$$\alpha_1 = \frac{\frac{BC}{A}}{N}, \quad \alpha_2 = \frac{-\frac{C^2}{a} - a\left(\gamma - \frac{B}{A}\right)}{N}, \\ \alpha_3 = \frac{(\gamma + p_2)^2 (C + ap_1)}{(p_1 - p_2) N}, \quad \alpha_4 = \frac{(\gamma + p_1)^2 (C + ap_2)}{(p_2 - p_1) N}, \\ \beta_1 = \frac{\gamma \frac{C}{A}}{N}, \quad \beta_2 = \frac{\frac{B}{A} - \gamma}{N}, \\ \beta_3 = \frac{p_1(\gamma + p_2^2)}{(p_1 - p_2) N}, \quad \beta_4 = \frac{p_2(\gamma + p_1^2)}{(p_2 - p_1) N}.$$

Itt

$$N = \left(\gamma - \frac{B}{A}\right)^2 + \gamma \frac{C^2}{a^2},$$

és p_1 , illetve p_2 az

$$Aap^2 + ACp + Ba = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

2. §. Hővezetési feladatok véges rúdra

Az előző fejezetben ismertetett eljárás bizonyos módosítással véges rúdra vonatkozó problémák megoldására is alkalmazható. A rúd hossza legyen l , két végének koordinátái legyenek $x = 0$ és $x = l$. A rúd $x = l$ végén az alábbi peremfeltételek egyike teljesüljön:

A) A rúd vége hőszigetelt: $U_x(l, t) = 0$.

B) A rúd végét állandó hőmérsékleten tartjuk, amely egyenlő a rúd kezdeti hőmérsékletével: $U(l, t) = 0$.

A rúd $x = 0$ peremén ismét egy másik testhez csatlakozik. Eljárásunk módosítása abban áll, hogy (2) és (3) helyett a rúd hőmérsékletét

$$(13) \quad V(x, t) = \int_0^t F^*(x, t - \tau) W(\tau) d\tau$$

alakban keressük, ahol

$$(14) \quad F^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \pm e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4t}} \right].$$

A fenti képletben az A) peremfeltétel teljesülése esetén a $+$ előjelet, a B) peremfeltétel esetén viszont a $-$ előjelet kell vennünk. A $V(x, t)$ -re így kapott kifejezés a $W(t)$ függvény tetszőleges választása mellett kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét a $(0, l)$ intervallumban, eleget tesz a $V(x, 0) = 0$ kezdeti feltételnek, és ezen felül kielégíti a rúd $x = l$ végén előírt peremfeltételt is. A rúd $x = 0$ végén előírt peremfeltétel (ugyanúgy, mint az előző fejezetben) egy konvolúció-típusú integrálegyenletet szolgáltat az egyelőre ismeretlen $W(t)$ függvény meghatározására, amely integrálegyenlet ismét Laplace-transzformációval megoldható.

C) Az l hosszúságú rúd $x = 0$ végéhez (ugyanúgy, mint az a) feladatnál) kis kiterjedésű, de számottevő hőkapacitású test csatlakozik, melynek hőmérséklete a $t = 0$ időpontban: $U(0) = U_0$, a rúd hőmérséklete a $t = 0$ pillanatban: $V(x, 0) = 0$, és a rúd $x = l$ vége hőszigetelt.

Az $x = 0$ rúdvégre, ugyanúgy, mint az a) példában, a (4) és (5) peremfeltételeket kapjuk. Az

$$F^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} + e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4t}} \right]$$

függvény t -szerinti Laplace-transzformáltja $0 < x < l$ esetén:

$$f^*(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} (e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}),$$

tehát a konvolúció-tétel felhasználásával

$$v(x, p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} (e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}) w(p)$$

és

$$v'_x(x, p) = a\sqrt{\pi} (-e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}) w(p).$$

A (4) és (5) peremfeltételek Laplace-transzformálásából az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$(p + B) u(p) - B \sqrt{\frac{\pi}{p}} (1 + e^{-2al\sqrt{p}}) w(p) = U_0$$

$$C \sqrt{\frac{p}{\pi}} u(p) - [C(1 + e^{-2al\sqrt{p}}) + a\sqrt{p} (1 - e^{-2al\sqrt{p}})] w(p) = 0.$$

Egyenletrendszerünket megoldva:

$$(15) \quad u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}),$$

ahol

$$(16) \quad g(p) = \frac{aU_0 p(-1 + e^{-2alp}) - CU_0(1 + e^{-2alp})}{ap^2(-1 + e^{-2alp}) - Cp(1 + e^{-2alp}) + Ba(-1 + e^{-2alp})}.$$

Mindenekelőtt a $g(p)$ inverz Laplace-transzformáltját, $G(t)$ -t akarjuk kiszámítani. A Riemann–Mellin-féle megfordítási képlet szerint

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p) dp,$$

ahol a c valós számot úgy kell választanunk, hogy a $g(p)$ függvény a $\operatorname{Re} p > c$ félsíkban reguláris legyen. Ezen integrált a reziduúmtétel segítségével határozzuk meg. A $p = i\varphi$ új változót bevezetve, (16) jobboldalán a nevező eltűnik, ha

$$(17) \quad \operatorname{tg} a\varphi = \frac{C\varphi}{a(\varphi^2 - B)}.$$

Be lehet bizonyítani, hogy a (17) egyenlet valamennyi gyöke valós és $g(p)$ számlálója és nevezője nem tűnik el ugyanazon a helyen. $G(t)$ -nek a reziduúmtétel segítségével való meghatározását ennél az egy példánál részletezzük. Legyen n egész szám, legyen

$$P = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a},$$

és tekintsük az

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{(T)} e^{-t} g(p) dp$$

integrált, ahol $t > 0$, és az integrálást arra a pozitív irányítású T téglalapra végezzük, amelynek csúcsai $\eta - iP$, $\eta + iP$, $(i-1)P$, $-(i+1)P$. Bebizonyítjuk, hogy az integrálnak a két vízszintes szakaszra és az $[(i-1)P, -(i+1)P]$ függőleges szakaszra eső része $P \rightarrow \infty$ esetén zérushoz tart. A (16) képletben $p = \pm iP + y$ -t véve (y valós) kapjuk, hogy

$$g(\pm iP + ay) = \frac{aU_0 p + CU_0 \operatorname{th} y}{ap^2 + Ba + Cp \operatorname{th} y}$$

Miután $|\operatorname{th} y| \leq 1$, ebből következik, hogy a két vízszintes egyenes mentén y -ban egyenletesen

$$g(iP + ay) = O\left(\frac{1}{P}\right),$$

tehát, tekintettel arra, hogy $t > 0$, kapjuk:

$$(19) \quad \left| \int_{(i-1)P}^{iP+\eta} e^{pt} g(p) dp \right| < \int_{iP-\eta}^{iP+\eta} e^{\eta t} O\left(\frac{1}{P}\right) |dp| + O\left(\frac{1}{P}\right) \int_{-P}^{\eta} e^{yt} dy =$$

$$= O\left(\frac{1}{P}\right) \left[2\eta e^{\eta t} + \frac{1}{t} e^{-\eta t} \right] \rightarrow 0,$$

és ugyanígy becsülhetjük az integrált a $[-(i+1)P, -iP + \eta]$ szakaszon. A függőleges szakaszon való becsléshez felhasználjuk, hogy K -t elég nagyra választva, $g(p)$ a $\operatorname{Re} p < -K$ félsíkon korlátos. Legyen most $P > K$; akkor

$$(20) \quad \left| \int_{-(i+1)P}^{(i-1)P} e^{pt} g(p) dp \right| \leq 2P O(1) e^{-Pt} \rightarrow 0.$$

(18)-ban az integrandusnak szingularitása van a $p = 0$ helyen, továbbá a $\pm i\varphi_k$ ($k = 1, 2, \dots, r$) helyeken, ahol $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ a (17) egyenlet P -nél kisebb pozitív gyökei. Az ábrából leolvasható, hogy az összes gyök egyszeres multiplicitású. Az integrandus reziduuma a $p = 0$ helyen

$$r_0 = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l},$$

és a $p = \pm i\varphi_k$ helyen [figyelembe véve a (17) egyenletet]

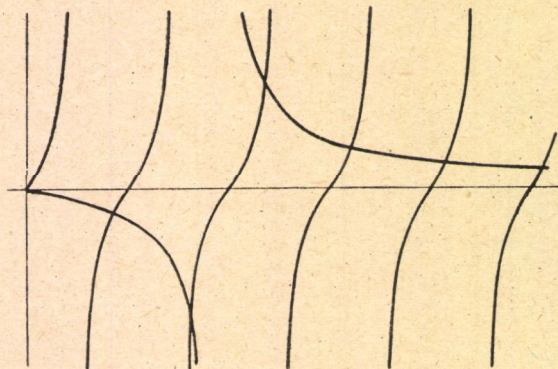
$$r_{\pm i\varphi_k} = \frac{BCU_0 e^{\pm i\varphi_k t}}{a^2 l \varphi_k^4 + (C + C^2 l - 2Ba^2 l) \varphi_k^2 + BC + \frac{B^2}{A^2} a^2 l}.$$

A reziduúmtételből tehát azt kapjuk, hogy

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iP}^{\eta + iP} e^{pt} g(p) dp - \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} - 2BCU_0 \sum_{k=1}^r \frac{\cos \varphi_k t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \right\} = 0,$$

ahol

$$(21) \quad \alpha_1 = a^2 l, \quad \alpha_2 = C + C^2 l - 2Ba^2 l, \quad \alpha_3 = BC + \frac{B^2}{A^2} a^2 l.$$



1. ábra

Végeredményképpen tehát

$$(22) \quad G(t) = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} + 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi_k t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3}.$$

Az előbbi ábrából leolvasható, hogy elég nagy k -ra

$$(23) \quad \left(k - \frac{3}{2}\right)\pi < al \varphi_k < \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

tehát a (22) jobboldalán álló sor konvergens. A (15) és (22) képletek alapján a Laplace-transzformáció elméletéből ismert képlet szerint

$$(24) \quad U(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} G(s) ds = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} + 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\varphi_k^2 t}}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$w(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h(\sqrt{p}),$$

ahol

$$h(p) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} CU_0 p e^{2alp}}{ap^2(e^{2alp} - 1) + Cp(e^{2alp} + 1) + Ba(e^{2alp} - 1)};$$

ebből reziduúmtétellel elvégezve a Laplace-transzformáció megfordítását

$$(25) \quad H(t) = \frac{CU_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \left[\frac{C}{a} \varphi_k^2 \cos \varphi_k t + (\varphi_k^2 - B\varphi_k) \sin \varphi_k t \right],$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jelentése (21)-ből olvasható le. A (19) és (20) becslést $g(p)$ helyett a $h(p)$ függvénnyel elvégezve, kapjuk, hogy a (25) jobboldalán álló sor $t > 0$ esetén konvergens.

Bebizonyítjuk, hogy a (25) jobboldalán álló sor részletösszegei minden véges intervallumon összességükben korlátosak. A cosinusos tagok összegére ez a képletből leolvasható, mert az együtthatók abszolút konvergens sort alkotnak. A sinusos tagok részletösszegeit pontosabban kell becsülnünk. Először is, (17) és (23)-ból

$$\varphi_k = (k-1) \frac{\pi}{al} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

tehát

$$\frac{\varphi_k^2 - B\varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} = \frac{al}{\alpha_1 \pi (k-1)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

és így

$$\sin \varphi_k t = \sin (k-1) \frac{\pi t}{al} + O\left(\frac{t}{k}\right),$$

tehát

$$\frac{\varphi_k^3 - B\varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \sin \varphi_k t = \frac{al}{\alpha_1 \pi} \frac{\sin(k-1) \frac{\pi t}{al}}{k-1} + O\left(\frac{t}{k^2}\right).$$

Miután a $\Sigma \frac{1}{k^2}$ sor abszolút konvergencia és a $\sum \frac{\sin(k-1)x}{k-1}$ sor részletösszegei korlátosak, következik most már, hogy

$$\sum_k \frac{\varphi_k^3 - B\varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \sin \varphi_k t = O(1 + |t|).$$

Ebből látható, hogy a

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} H(s) ds$$

összefüggésben az integrálás tagonként végezhető el. Az egyes tagokban az alábbi alakú integrálok is szerepelnek:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} \sin \varphi_k s ds = 2\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin(2\varphi_k \sqrt{t} \xi) d\xi.$$

Az $\alpha = 2\varphi_k \sqrt{t}$ jelölést bevezetve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \alpha \xi d\xi &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty e^{-\xi^2 + i\alpha \xi} d\xi - \int_0^\infty e^{-\xi^2 - i\alpha \xi} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{2i} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left[\int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{-y^2} dy - \int_{+\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{-y^2} dy \right] = \frac{1}{2i} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-y^2} dy = \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$(26) \quad E(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$$

előlést, végül kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} \sin \varphi_k s ds = 2\sqrt{t} e^{-\frac{\varphi_k^2 t}{4}} E(\varphi_k \sqrt{t}).$$

Ezt felhasználva, kapjuk, hogy

$$(27) \quad W(t) = \frac{CU_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varphi_k^2 t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \left[\frac{C}{a} \varphi_k^2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\varphi_k^3 - B\varphi_k) E(\varphi_k \sqrt{t}) \right].$$

d) Az előbbivel teljesen analóg módon tárgyalható az a feladat, amely c)-től csak annyiban különbözik, hogy a rúd $x = l$ vége nem hőszigetelt, hanem hőmérsékletét állandóan a kezdeti értéken tartjuk. Ekkor $F^*(x, t)$ kifejezésben a (14) képletben az alsó előjelet kell vennünk. A számítás eredménye ekkor

$$U(t) = 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\varphi}_k^2 t}}{\alpha_1 \bar{\varphi}_k^4 + \alpha_2 \bar{\varphi}_k^2 + \alpha_3},$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ismét a (21) képletekkel adott állandók, ezzel szemben a φ_k ($k = 1, 2, \dots$) értékek nem a (17), hanem a

$$(17^*) \quad \operatorname{tg} \bar{\varphi} = -\frac{a}{C} \frac{\bar{\varphi} - B}{\bar{\varphi}}$$

egyenlet gyökei. $W(t)$ -re ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint (27), de φ_k helyébe $\bar{\varphi}_k$ -t kell írunk.

e) Tekintsük azt az esetet, amikor a rúddal érintkező testtel másodpercenként $Q(t)$ hőmennyiséget közlünk, és a rúd másik vége hőszigetelt. Ebben az esetben a hővezetés differenciálegyenletét az alábbi peremfeltételek mellett kell megoldanunk:

$$V(x, 0) = 0, \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t), \\ V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)], \quad V'_x(l, t) = 0.$$

Feltételezhetjük, hogy $U(0) = 0$, az általánosabb $U(0) = U_0 \neq 0$ eset egyszerűen úgy tárgyalható, hogy az itt kapott megoldásra a c) feladat eredményét szuperponáljuk. A rúd hőmérsékletét a (13) alakba írjuk, ahol (14)-ben a + előjelet kell vennünk. Ezzel teljesítettük a $V(x, 0) = 0$ kezdeti feltételt és a $V'_x(l, t) = 0$ peremfeltételt. A rúd másik végén fennálló peremfeltételeket Laplace-transzformáljuk, és az így kapott lineáris egyenletrendszert $u(p)$ -re és $w(p)$ -re megoldjuk. Az eredmény:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}), \quad w(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h(\sqrt{p}),$$

ahol

$$g(p) = \frac{C(1 + e^{-2alp}) + ap(1 - e^{-2alp})}{Aap(1 - e^{-2alp}) + ACp(1 + e^{-2alp}) + Ba(1 - e^{-2alp})q(p^2)}$$

és

$$h(p) = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}} p q(p^2)}{Aa(1 - e^{-2alp}) + AC(1 + e^{-2alp}) + Ba(1 - e^{-2alp})}.$$

Itt $q(p)$ jelenti a $Q(t)$ Laplace-transzformáltját.

A $g(p)$ és $h(p)$ inverz Laplace-transzformáltja a reziduúmtétellel számítható, ha $Q(t) = e^{-\gamma t}$, $q(p) = \frac{1}{p + \gamma}$, és ebből $U(t)$ és $W(t)$ a már ismertett módon nyerhető. Ennek segítségével az általános eset is megoldottnak tekinthető, hiszen tetszőleges folytonos $Q(t)$ függvényt bármely előírt pontossággal közelíthetünk

$$\sum_k a_k e^{-\gamma_k t}$$

alakú összegekkel és a feladat (mint a dolgozat utolsó fejezetében látni fogjuk) korrektté kitzűzésű.

Ha $\gamma = 0$, akkor a számítás eredménye :

$$U(t) = k_1 + 2k_2 t + \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = k_3 + \frac{2k_4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] W(\tau) d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökei :

$$\operatorname{tg} a l \varphi = \frac{AC\varphi}{aA\varphi^2 - Ba},$$

továbbá

$$k_1 = \frac{Ba^4 l^2 (Cl + 3)}{3(AC + Ba^2 l)^2}, \quad k_2 = \frac{C}{2(AC + Ba^2 l)}, \quad k_3 = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}} al}{2(AC + Ba^2 l)},$$

$$k_4 = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}}}{2(AC + Ba^2 l)}$$

$$p_k = \frac{2a_1}{a_2 \varphi_k^6 + a_3 \varphi_k^4 + a_4 \varphi_k^2}, \quad r_k = \frac{b_1 \varphi_k}{b_3 \varphi_k^5 + b_4 \varphi_k^3 + b_5 \varphi_k},$$

$$s_k = \frac{b_2 \left(\varphi_k^2 - \frac{B}{A} \right)}{b_3 \varphi_k^5 + b_4 \varphi_k^3 + b_5 \varphi_k}.$$

$$a_1 = \frac{BC}{A}, \quad a_2 = -a^2 Al, \quad a_3 = -AC + 2Ba^2 l - AC l^2, \quad a_4 = -BC - \frac{B^2 a^2 l}{A},$$

$$b_1 = C, \quad b_2 = a, \quad b_3 = a_2, \quad b_4 = a_3, \quad b_5 = a_4.$$

Ha viszont $\gamma > 0$, akkor

$$U(t) = K + \sum_{\varphi_k > 0} q_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\varphi_k > 0} r_k E(\varphi_k \sqrt{t}) e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] \sum_{\varphi_k > 0} r_k E(\varphi_k \sqrt{\tau}) e^{-\varphi_k^2 \tau} d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökei:

$$\operatorname{tg} al \varphi = \frac{CA(\varphi^3 - \gamma\varphi)}{a[A\varphi^4 - (B + \gamma A)\varphi^2 + B\gamma]}.$$

A többi jelölés:

$$q_k = 2 \frac{C - a\varphi_k \operatorname{tg} al \varphi_k}{a_1 \varphi_k^4 + a_2 \varphi_k^2 + a_3 + \operatorname{tg} al \varphi_k (a_4 \varphi_k^3 + a_5 \varphi_k)},$$

$$r_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-\varphi_k}{\cos al \varphi_k (a_1 \varphi_k^4 + a_2 \varphi_k^2 + a_3) + \sin al \varphi_k (a_4 \varphi_k^3 + a_5 \varphi_k)},$$

$$K = \frac{C}{(AC + Ba^2 l) \gamma},$$

$$a_1 = a^2 Al, \quad a_2 = -3AC - a^2 l(B + \gamma A),$$

$$a_3 = (AC + Ba^2 l) \gamma, \quad a_4 = Aa(4 + Cl),$$

$$a_5 = -aA \gamma \left(\frac{2B}{A\gamma} + 2 + Cl \right).$$

f) A rúddal érintkező testtel ismét másodpercenként $Q(t)$ hőmennyiséget közlünk, és a rúd $x = l$ végét (amely az előző példában hőszigetelt volt) állandóan a kezdeti hőmérsékleten tartjuk. A peremfeltételek tehát:

$$V(x, 0) = 0, \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t),$$

$$V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)], \quad V(l, t) = 0.$$

Ismét feltételezhetjük, hogy $U(0) = 0$, és az általánosabb $U(0) = U_0 \neq 0$ esetet úgy kaphatjuk, hogy az így nyert eredményre a d) feladat eredményét szuperponáljuk. A megoldás csak annyiban tér el az előzőtől, hogy (14)-ben a — előjelet kell vennünk. Az eredmények $\gamma = 0$ esetén:

$$U(t) = k_1 + \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = k_2 + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{a^2 (2-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] \times \\ \times \left\{ k_2 + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{\tau}) \right] e^{-\varphi_k^2 \tau} \right\} d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökeit jelentik:

$$\operatorname{tg} a\varphi = \frac{a}{C} \frac{\frac{B}{A} - \varphi^2}{\varphi}.$$

Továbbá

$$k_1 = \frac{Cl + 1}{B}, \quad k_2 = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2Ba},$$

p_k , r_k és s_k ugyanazokat a mennyiségeket jelentik, mint az e -ben $\gamma = 0$ esetén:

$$p_k = \frac{2a_1}{a_2\varphi_k^6 + a_3\varphi_k^4 + a_4\varphi_k^2},$$

$$r_k = \frac{b_1\varphi_k}{b_3\varphi_k^5 + b_4\varphi_k^3 + b_5\varphi_k},$$

$$s_k = \frac{b_2\left(\varphi_k^2 - \frac{B}{A}\right)}{b_3\varphi_k^5 + b_4\varphi_k^3 + b_5\varphi_k},$$

$$a_1 = \frac{BC}{A}, \quad a_2 = -a^2Al, \quad a_3 = -AC + 2a^2Bl - AC^2l, \quad a_4 = -BC - \frac{a^2B^2l}{A},$$

$$b_1 = C, \quad b_2 = a, \quad b_3 = a_2, \quad b_4 = a_3, \quad b_5 = a_4.$$

$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$ esetén a következő eredményeket kapjuk:

$$U(t) = \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = \sum_{\varphi_k > 0} \left[q_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} r_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

ahol

$$p_k = 2Q_0 \frac{C \sin a\varphi_k + a\varphi_k \cos a\varphi_k}{\sin a\varphi_k (a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos a\varphi_k (-a_4\varphi_k^2 + a_5\varphi_k)},$$

$$q_k = \frac{\frac{Q_0 C}{\sqrt{\pi}} \varphi_k \cos al\varphi_k}{\sin al\varphi_k(a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos al\varphi_k(-a_4\varphi_k^3 + a_5\varphi_k)},$$

$$r_k = \frac{\frac{Q_0 C}{\sqrt{\pi}} \varphi_k \sin al\varphi_k}{\sin al\varphi_k(a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos al\varphi_k(-a_4\varphi_k^3 + a_5\varphi_k)}.$$

Itt

$$a_1 = a^2 Al, \quad a_2 = 3AC + a^2 l(B + \gamma A), \quad a_3 = \gamma(ABC + a^2 lB),$$

$$a_4 = aA(4 + Cl), \quad a_5 = 2a(B + \gamma A) + CAa\gamma.$$

φ_k karakterisztikus egyenlete :

$$\operatorname{tg} al\varphi = \frac{a}{C} \cdot \frac{\varphi^4 - \left(\frac{B}{A} + \gamma\right)\varphi^2 + \frac{B}{A}\gamma}{(-\varphi^2 + \gamma)\varphi}.$$

g) Mint véges rúdra vonatkozó, az eddigiekénél általánosabb feladatot tárgyaljuk az alábbi: A rúd $x = 0$ végéhez csatlakozó test kezdeti hőmérséklete, U_0 , eltér a rúd kezdeti hőmérsékletétől, és azonkívül ezzel a testtel másodpercenként $\dot{Q}(t)$ hőmennyiséget közlünk. A rúd $x = l$ vége hőátadással csatlakozik egy másik testhez, amelynek $Z(t)$ hőmérséklete az idő függvényében adott. Meghatározandó a rúd és a test hőmérséklete a hely és idő, illetve csak az idő függvényében, ha a rúd kezdeti hőmérséklete állandó (melyet a hőmérsékleti skála megfelelő választásával zérusnak vehetünk). A feladat matematikai fogalmazása : megoldandó a

$$(28) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenlet a

$$(29) \quad V(x, 0) = 0, \quad U(0) = U_0$$

kezdeti feltétellel és az

$$(30) \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = \dot{Q}(t),$$

$$(31) \quad V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)],$$

$$(32) \quad V'_x(l, t) = -D[V(l, t) - Z(t)]$$

peremfeltételekkel.

A feladat bonyolultabb, mint az előző négy, mert most nem tudunk olyan (13)-hoz hasonló egyszerű alakot találni $V(x, t)$ -re, hogy az egyidőben evidenciába helyezze a parciális differenciálegyenlet, a kezdeti feltétel és az $x = l$ rúdvégen fennálló peremfeltétel teljesülését. Ezért visszatérünk a bevezetésben ismertetett fizikai megfontolásra. A másik rúdvég hatása is csak abban nyilvánulhat meg, hogy azon át minden pillanatban bizonyos

(egyelőre ismeretlen) hőmennyiség áramlik a rúd. Ezt figyelembe véve, a rúd hőmérsékletét

$$(33) \quad V(x, t) = \int_0^t F(x, t - \tau_1) W_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t F(l - x, t - \tau_2) W_2(\tau_2) d\tau_2$$

alakban keressük, ahol $F(x, t)$ a (3) képlettel definiált függvény. $W_1(t)$, illetve $W_2(t)$ a rúd $x = 0$, illetve $x = l$ végén az időegység alatt a rúd belépő hőmennyiséggel arányosak. Feltételünk következtében a (28) parciális differenciálegyenlet és a (29) kezdeti feltétel a W_1 és W_2 függvények tetszőleges választása mellett is teljesül. A (30), (31) és (32) peremfeltételek konvolúció-típusú integrodifferenciálegyenletrendszerrel szolgáltatnak az ismeretlen $U(t)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ függvényekre, melyet Laplace-transzformálva, és ezen függvények Laplace-transzformáltjait rendre $u(p)$ -vel, $w_1(p)$ -vel, $w_2(p)$ -vel jelölve, ezen utóbbi függvények meghatározására lineáris egyenletrendszerrel kapunk:

$$\begin{aligned} (Ap + B) u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} B[w_1(p) + e^{-a\sqrt{Vp}} w_2(p)] &= q(p) + AU_0, \\ \frac{C}{\sqrt{\pi}} u(p) - \left(a + C \sqrt{\frac{1}{p}}\right) [w_1(p) - e^{-a'\sqrt{Vp}} w_2(p)] &= 0, \\ -e^{-a\sqrt{Vp}} \left(a - D \sqrt{\frac{1}{p}}\right) w_1(p) + \left(a + D \sqrt{\frac{1}{p}}\right) w_2(p) &= D \frac{1}{\sqrt{\pi}} z(p). \end{aligned}$$

Innen $u(p)$ -t, $w_1(p)$ -t és $w_2(p)$ -t kifejezhetjük, és — az előzőek mintájára — az

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}), \quad w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_1(\sqrt{p}), \quad w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_2(\sqrt{p})$$

jelöléseket bevezetve, $U(t)$, $W_1(t)$ és $W_2(t)$ meghatározása a már ismertetett módon, a reziduúmtétel felhasználásával történhet.

Azon célból, hogy az inverz Laplace-transzformációt explicite elvégezhessük, a $Q(t)$ és $Z(t)$ függvényeket exponenciális tagok összegével approximáljuk, a következő alakban:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\gamma_k t}, \quad Z(t) = \sum_{k=1}^m b_k e^{-\delta_k t}.$$

A feladat megoldását csak öt speciális esetben kell elvégeznünk, mert a fenti alakú $Q(t)$, illetve $Z(t)$ függvények esetén a feladat megoldása ezen öt speciális eset lineáris szuperpozíciójaként állítható elő. Ez az öt speciális eset a következő:

$$\begin{aligned} g_1) \quad U(0) &= 1, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_2) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 1, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_3) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv 1; \\ g_4) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv e^{-\gamma t}, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_5) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Az alábbiakban közöljük ezen speciális esetek megoldásait. Az öt esetben használt közös jelölések a következők: a φ_k értékek a közös

$$\operatorname{tg} a\varphi = \frac{aA(D+C)\varphi^2 - aBD}{Aa^2\varphi^3 - (ACD + a^2B)\varphi}$$

karakterisztikus egyenlet gyökeit jelentik, és bevezetjük a

$$C_k = \cos a\varphi_k, \quad S_k = \sin a\varphi_k$$

rövid jelöléseket. Az első három esetben az $U(t)$, $W_1(t)$ és $W_2(t)$ függvényeket előállító sorban az összegezés az összes pozitív φ_k karakterisztikus gyökökre van kiterjesztve, a g_4 esetben ezeken kívül még a $\varphi = +\sqrt{\gamma}$ értékre, a g_5 esetben pedig még a $\varphi = +\sqrt{\delta}$ értékekre is.

A megoldások a következők:

g_1) Az $U(0) = 1$, $Q(t) \equiv 0$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = \sum \left[b_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{(DC - a^2\varphi_k^2) S_k + a\varphi_k(D+C)(1+C_k)}{N_k},$$

$$c_k = \frac{(DC - a^2\varphi_k^2)(C_k - 1) - a\varphi_k(D+C)S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{D\varphi_k C_k - a\varphi_k^2 S_k}{N_k}, \quad q_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-a\varphi_k^2 C_k - D\varphi_k S_k}{N_k},$$

$$r_k = \frac{D\varphi_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{a\varphi_k^2}{N_k}, \quad N_k = (a_1\varphi_k^3 + a_2\varphi_k)C_k + (a_3\varphi_k^2 + a_4)S_k,$$

$$a_1 = -a^3 A l, \quad a_2 = 2aA(C+D) + al(a^2B + ACD),$$

$$a_3 = -a^2A(lD + lC + 3), \quad a_4 = a^2B(1 + Dl) + ACD.$$

g_2) Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv 1$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = K + \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = K_1 + \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = K_2 + \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$K = \frac{D + C + DCl}{BD}, \quad K_1 = \frac{C}{2aB\sqrt{\pi}}, \quad K_2 = -\frac{C}{2aB\sqrt{\pi}},$$

$$b_k = 2 \frac{a(D + C) \varphi_k C_k + (DC - a^2 \varphi_k^2) S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{DC_k - a\varphi_k S_k}{M_k}, \quad q_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-a\varphi_k C_k - DS_k}{M_k},$$

$$r_k = -\frac{CD}{M_k}, \quad s_k = -\frac{aC}{M_k},$$

$$N_k = (a_1 \varphi_k^5 + a_2 \varphi_k^3 + a_3 \varphi_k) C_k + (a_4 \varphi_k^4 + a_5 \varphi_k^2) S_k,$$

$$M_k = (d_1 \varphi_k^4 + d_2 \varphi_k^2 + d_3) C_k + (d_4 \varphi_k^3 + d_5 \varphi_k) S_k,$$

$$a_1 = a^3 Al, \quad a_2 = -al(a^2 B + ACD) - 4aA(C + D), \quad a_3 = 2aBD,$$

$$a_4 = a^2[5A + Al(C + D)], \quad a_5 = -(3a^2 B + 3ACD + a^2 Bdl),$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -(a_2 Bl + ACDl) - 3A(C + D), \quad d_3 = aBD,$$

$$d_4 = a^2[4A + Al(C + D)], \quad d_5 = -(2a^2 B + 2ACD + a^2 Bdl).$$

$$g_3) \quad Az \quad U(0) = 0, \quad Q(t) \equiv 0, \quad Z(t) \equiv 1 \text{ eset:}$$

$$U(t) = 1 + \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{2aBD\varphi_k}{N_k}, \quad p_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{AC\varphi_k^2}{M_k}, \quad q_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{aA\varphi_k^3 - aB\varphi_k}{M_k},$$

$$r_k = D \frac{-AC\varphi_k^2 C_k + (aA\varphi_k^3 - aB\varphi_k) S_k}{M_k},$$

$$s_k = D \frac{(-aA\varphi_k^3 + aB\varphi_k) C_k + AC\varphi_k^2 S_k}{M_k},$$

$$N_k = (a_1 \varphi_k^5 + a_2 \varphi_k^3 + a_3 \varphi_k) C_k + (a_4 \varphi_k^4 + a_5 \varphi_k^2) S_k,$$

$$M_k = (d_1 \varphi_k^4 + d_2 \varphi_k^2 + d_3) C_k + (d_4 \varphi_k^3 + d_5 \varphi_k) S_k,$$

$$a_1 = a^3 Al, \quad a_2 = -(a^3 Bl + aACDl) - 4aA(C + D), \quad a_3 = 2aBD,$$

$$a_4 = a^2[5A + Al(C + D)], \quad a_5 = -(3a^2 B + 3ACD + a^2 Bdl),$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -(a^2 Bl + ACDl) - 3A(C + D), \quad d_3 = aBD,$$

$$d_4 = a^2[4A + Al(C + D)], \quad d_5 = -(2a^2 B + 2ACD + a^2 Bdl).$$

$g_4)$ Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv e^{-\gamma t}$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = \sum \left[b_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k - \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{a_2 \varphi_k + a_5 \varphi_k C_k + (a_4 \varphi_k^2 - a_6) S_k}{N_k},$$

$$c_k = \frac{-a_1 \varphi_k^2 + a_3 + (a_6 - a_4 \varphi_k^2) C_k + S_k - a_5 \varphi_k}{N_k},$$

$$r_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{a \varphi_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{D}{N_k},$$

$$N_k = (d_1 \varphi_k^5 + d_2 \varphi_k^3 + d_3 \varphi_k) C_k + (d_4 \varphi_k^4 + d_5 \varphi_k^2 + d_6) S_k,$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = a(D + C), \quad a_3 = DC, \quad a_4 = -a_1^2, \quad a_5 = a(C + D),$$

$$a_6 = -DC,$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -4aA(C + D) - al(Ba^2 + ACD + \gamma a^2 A),$$

$$d_3 = 2[BaD + \gamma aA(D + C)] + \gamma al(Ba^2 + ACD),$$

$$d_4 = a^2 A[5 + l(D + C)],$$

$$d_5 = -3(Ba^2 + AGD + \gamma a^2 A) - a^2 l[BD + \gamma A(D + C)],$$

$$d_6 = \gamma(Ba^2 + ACD) + \gamma a^2 lBD.$$

$g_5)$ Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv 0$, $Z(t) \equiv e^{-\delta t}$ eset:

$$U(t) = \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t}$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{2D}{C} \frac{(Aa\varphi_k^4 - Ba\varphi_k^2) C_k + A\varphi_k^3 S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{AC\varphi_k^4}{N_k},$$

$$q_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{(Aa\varphi_k^2 - Ba) \varphi_k^3}{N_k},$$

$$r_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{\varphi_k^2 C_k - \varphi_k^2 (Aa\varphi_k^2 - Ba) S_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{-AC\varphi_k^4 S_k - \varphi_k^3 (Aa\varphi_k^2 - Ba) C_k}{N_k},$$

$$\begin{aligned}
N_k &= (-a_1 \varphi_k^6 + a_2 \varphi_k^4 - a_3 \varphi_k^2 + a_4) C_k - (a_5 \varphi_k^5 - a_6 \varphi_k^3 + a_7 \varphi_k) S_k, \\
a_1 &= a^3 A l, \quad a_2 = 5a A (C + D) + a l (A a^2 \delta + A C D + B a^2), \\
a_3 &= 3(A C a \delta + A D a \delta + B D a) + a l \delta (A C D + B a^2), \quad a_4 = B D a \delta, \\
a_5 &= 6a^2 A + a^2 A l (C + D), \\
a_6 &= 4(a^2 A \delta + A C D + B a^2) + a l (A C a \delta + A D a \delta + B D a).
\end{aligned}$$

3. §. Egy hengerszimmetrikus feladat

h) Egy külső megbízás során merült fel az alábbi feladat: Egy körkeresztmetszetű, végtelen hosszúnak tekinthető vezetőben áram folyik, melyet a $t = 0$ időpillanatban kapcsolunk be. Az elektromos transziens jelenség időállandója olyan kicsiny a hővezetési folyamat időállandójához képest, hogy úgy tekinthetjük, mintha az áram a $t = 0$ időpillanatban elérte volna stacionárius értékét. A vezetőt végtelenig terjedő homogén hővezető közeg veszi körül, amely hőátadással csatlakozik a vezetőhöz. Meghatározandó a vezető, illetve a közeg hőmérséklete az idő, illetve a hely és idő függvényében, ha a $t = 0$ időpillanatban a vezető és a környező közeg ugyanazon állandó hőmérsékleten van (amelyet a továbbiakban a hőmérsékleti skála nullapontjának veszünk fel). A vezető hővezetési tényezője sokkal nagyobb, mint a közeg hővezetési együtthatója úgy, hogy a vezető a keresztmetszetén belül a hőmérsékletet minden időpillanatban a helytől függetlennek tekinthetjük. A vezető hőmérséklete legyen $U(t)$; a közeg azon pontjának hőmérséklete, amely a vezető tengelyétől r távolságra helyezkedik el, legyen $V(r, t)$.

A keresett $V(r, t)$ függvény kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét, tehát figyelembe véve a feladat hengerszimmetriáját, a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk, a

$$V(r, 0) = U(0) = 0$$

kezdeti feltételekkel és az

$$A U'(t) + B[U(t) - V(r_0, t)] = Q$$

$$V_r(r_0, t) = -C[U(t) - V(r_0, t)]$$

peremfeltételekkel. Itt r_0 jelenti a vezető sugarát és Q jelenti a vezető hosszegységében az időegység alatt hővé alakult elektromos teljesítményt. A megoldásfüggvényt a

$$V(r, t) = \int_0^t \Phi(r, t - \tau) d\tau$$

konvolúció alakjában keressük, ahol

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{a^2 r^2}{4t}}.$$

Feltevésünk következtében a $V(r, t)$ függvény a $W(t)$ tetszőleges választása esetén is kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét és az előírt homogén kezdeti feltételt. A peremfeltételek az ismeretlen $U(t)$ és $W(t)$ függvényekre ismét egy konvolúció-típusú integrálegyenletrendszert szolgáltatnak. Lényeges körülmény, hogy a szereplő két magfüggvény Laplace-transzformáltja ismert:

$$\varphi(a, p) = K_0(ar_0\sqrt{p})$$

és

$$\varphi_r(a, p) = a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p}).$$

A peremfeltételeket Laplace-transzformálva, $u(p)$ -re és $w(p)$ -re lineáris egyenletrendszert nyerünk, amelyből

$$u(p) = \frac{Q}{p} \frac{CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})}{(Ap + B)[CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})] - BCK_0(ar_0\sqrt{p})}$$

és

$$w(p) = \frac{Q}{p} \frac{C}{(Ap + B)[CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})] - BCK_0(ar_0\sqrt{p})}.$$

Itt K_0 és K_1 a módosított nulladrendű, illetve elsőrendű Bessel-függvények. A konkrét feladatnál úgy jártunk el, hogy ebből $U(t)$ -t és $W(t)$ -t a Riemann–Mellin-féle képlettel kifejeztük, és az integrálást a $\mathcal{R}_e p = 0$ egyenes mentén numerikusan elvégeztük; ezen egyenes mentén $\sqrt{i}x$ argumentumú Bessel-függvények lépnek fel az integrandusban, és ezek értéke nálunk is hozzáférhető táblázatokból nyerhető.

Természetesen az előbbiekhöz hasonló módon tárgyalható az az eset is, amikor az időegység alatt hővé átalakuló teljesítmény

$$Q(t) = \sum a_k e^{-\gamma_k t}$$

alakú, illetve, amikor a vezető kezdeti hőmérséklete különbözik a közeg állandó kezdeti hőmérsékletétől.

4. §. A tárgyalt hővezetési feladatokkal analóg diffúziós feladatok

Mint ismeretes, a diffúzió differenciálegyenlete ugyanaz, mint a hővezetés differenciálegyenlete. Ezért várható, hogy az előzőekben megoldott feladatokat diffúziós problémákként is értelmezhetjük. Ez valóban így is van, és ez azon múlik, hogy a tárgyalt összetett peremfeltételnek a diffúzió elméletében is jól megfogható fizikai értelme van. Az alábbiakban felsoroljuk, milyen diffúziós interpretációt adhatunk az egyes megoldott problémáknak (a betűzés az 1., 2., 3. fejezetben megoldott analóg hővezetési feladatra utal).

a) Egy tartályban c koncentrációjú oldatot helyezünk el; a tartály egy membránon át közlekedik egy végtelen hosszú csővel, amelyben a $t = 0$ időpillanatban tiszta oldószer található. A tartályban található oldatot állandóan keverjük úgy, hogy az oldat a tartályban minden időpontban koncentrációra nézve homogén. Meghatározandó a tartályban és a cső mentén a koncentráció az idő, illetve a hely és az idő függvényében.

b) Az elrendezés ugyanaz, mint az előbb; a $t = 0$ időpillanatban a tartályban is tiszta oldószer van, de a tartályba inntól kezdve adott adagolás szerint folyamatosan oldódó anyagot töltünk.

c) Ez abban különbözik az a) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a cső másik végén le van zárva.

d) Ez abban különbözik az a) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a másik vége egy igen nagy térfogatú tartályba torkollik, melybe tiszta oldószert öntünk.

e) Ez abban különbözik a b) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a cső másik végén le van zárva.

f) Ez abban különbözik a b) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és másik vége egy igen nagy térfogatú tartályba torkollik, melybe tiszta oldószert öntünk.

g) Az l hosszúságú cső mindkét végét membránnal zárjuk; az egyik csatlakozó tartályban a kezdőpillanatban adott koncentrációjú oldat van, és állandó keverés mellett adott módon folyamatosan oldódó anyagot töltünk hozzá; a cső másik végéhez csatlakozó tartályban az oldat koncentrációját előírt módon változtatjuk az idő függvényében. Meghatározandó a koncentráció az első tartályban és a csőben az idő, illetve a hely és idő függvényében, feltéve, ha a csőben a kezdőpillanatban tiszta oldószer foglal helyet.

h) Egy igen nagy kiterjedésű vízszintes fenekű tartályba oldószert töltünk. A tartály közepén egy kis átmérőjű, hengeralakú homogén membrán helyezünk el, tengelyével függőlegesen úgy, hogy a benne levő oldat csak membrándiffúzió útján közlekedhet a tartályban levő többi oldószerezrel, illetve oldattal. A $t = 0$ időpillanattól kezdve a membránnal elzárt térfogatban időben egyenletesen oldódó anyagot töltünk, és azt elkeverjük. Kiszámítandó az oldat koncentrációja a membránon belül, illetve a membránon kívül, az idő, illetve a hely és az idő függvényében.

Pál Sándor [2] egyik munkájában a c) feladatot tárgyalja a jelen dolgozatnál speciálisabb peremfeltételek mellett. Megoldási módszere abban áll, hogy a keresett függvény Sturm–Liouville-sorának együtthatóit számítja. Eredménye alakra is azonos azzal, amit itt ismertettünk.

5. §. Tyihonov tételének kiterjesztése

Ha a $V(x, t)$ függvény a $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$ tartományban folytonos és eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, akkor Tyihonov tétele szerint ezen a zárt téglalapon $V(x, t)$ maximumát és minimumát a tartomány »háromoldalú határának« legalább egy-egy pontjában felveszi. A tartomány háromoldalú határán az alábbi három egyenesszakasz egyesítését értjük:

$$1^\circ \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$2^\circ \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$3^\circ \quad x = l, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Szükségünk lesz ennek azon egyszerű módosítására, hogy ha az $x = l$ peremen $V_x(l, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, akkor $V(x, t)$ maximumát és minimumát már az $x = 0$ peremen, vagy a $t = 0$ kezdőpillanatban felveszi. Ez egyszerűen abból következik, hogy a $V(x, t)$ függvényt az $x = l$ peremen túl szimmetrikusan

folytatva: $V(l + \xi, t) = V(l - \xi, t)$, az most már a $0 \leq x \leq 2l$, $0 \leq t \leq T$ zárt tartományban is eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, és a tartomány jobboldali peremén ugyanakkora értékeket vesz fel, mint a tartomány baloldali peremén.

Tétel: A c), d), e) és f) feladatokban legyen $U_0 > 0$, illetve $Q(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ és $Q(0) > 0$. Akkor minden $x \in [0, l]$ -re és $0 \leq t \leq T$ -re $V(x, t) \geq 0$.

Bizonyítás: Figyelembe véve a kezdeti- és peremfeltételeket, Tyihonov tételéből, illetve az imént bizonyított általánosításából következik, hogyha egy $t^* < T$ -re $V(x, t^*) < 0$, akkor egy $0 \leq t_1 \leq t^*$ értékre $V(0, t_1) < 0$.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $Q(t) > 0$, $0 \leq t \leq T$. Tekintettel arra, hogy $U(0) > 0$ és $V(0, 0) = 0$, tehát elég kis t -re $V_x(0, t) < 0$, ebből következik, hogy elég kis t -re $V(0, t) > 0$. (A hővezetés differenciálegyenletének adott $V_x(0, t)$ esetén érvényes megoldási képletét kell felhasználnunk.) A $V(0, t)$ függvény legalább egyszer jelet vált a $[0, T]$ intervallumban; a legkisebb jelváltási helye legyen t_2 ; tehát $V(0, t_2) = 0$, $V(0, t) \geq 0$, ha $0 \leq t \leq t_2$. Akkor Tyihonov tétele (illetve a fentebb bizonyított élesítése) szerint $V(x, t) \geq 0$, ha $0 \leq t \leq t_2$ és $0 \leq x \leq l$, tehát $V_x(0, t_2) \geq 0$. Így $0 \leq V_x(0, t_2) = -C[U(t_2) - V(0, t_2)] = -CU(t_2)$ miatt $U(t_2) \leq 0$; ennek felhasználásával

$$0 \leq Q(t_2) = AU'(t_2) + B[U(t_2) - V(0, t_2)] \leq AU'(t_2),$$

tehát $U'(t) \geq 0$. Abból, hogy $U(t) \leq 0$ és $U'(t_2) \geq 0$, következik, hogy az $U(t)$ függvénynek van egy $t_3 < t_2$ jelváltási helye. Ugyanis a feltétel szerint vagy $U_0 > 0$, vagy $Q(0) > 0$ következtében $U(0) = 0$ esetén $U'(0) > 0$. Tehát $U(t_3) = 0$, $U'(t_3) \leq 0$. Akkor viszont

$$0 < Q(t_3) = AU'(t_3) + B[U(t_3) - V(0, t_3)] \leq -BV(0, t_3).$$

Tekintettel arra, hogy $t_3 < t_2$, ez ellentmondásban van azzal, hogy t_2 -t a $V(0, t)$ függvény legkisebb jelváltási helyének választottuk. Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy $V(0, t)$ nem válthat jelet, tehát nem-negatív, és ebből Tyihonov tétele szerint következik, hogy $V(x, t)$ is nem-negatív. Az az eset, amikor $Q(t) > 0$ helyett az ennél gyengébb $Q(t) \geq 0$ feltétel teljesül, visszavezethető az előbbire azáltal, hogy $U(t)$ és $V(x, t)$ helyett az $\bar{U}(t) = U(t) + \varepsilon U_0(t)$ és $\bar{V}(x, t) = V(x, t) + \varepsilon V_0(x, t)$ függvényt tekintjük, ahol a $V(l, t) = 0$ peremfeltétel esetén például

$$U_0(t) \equiv \frac{1}{C} + l > 0, \quad V_0(x, t) \equiv l - x \geq 0, \quad Q_0(t) \equiv \frac{B}{C} > 0,$$

és a $V_x(l, t) = 0$ peremfeltétel esetén például

$$U_0(t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \left(\operatorname{ch} l + \frac{1}{C} \operatorname{sh} l \right) > 0, \quad V_0(x, t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \operatorname{ch}(l - x) > 0,$$

és

$$Q_0(t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \left[\frac{A}{a^2} \operatorname{ch} l + \left(\frac{A}{Ca^2} + \frac{B}{C} \right) \operatorname{sh} l \right] > 0.$$

A fenti tétel fontos következménye, hogy az e) és f) hővezetési feladatok a $Q(t)$ függvényre nézve korrekt kitűzésűek. Ugyanis, ha $|Q_1(t) - Q_2(t)| < \varepsilon$,

úgy a $Q_2(t)$ függvényhez tartozó $U_2(t)$, $V_2(x, t)$ megoldásrendszere fennállnak az

$$U_1(t) - U(t) \leq U_2(t) \leq U_1(t) + U(t)$$

$$V_1(x, t) - V(x, t) \leq V_2(x, t) \leq V_1(x, t) + V(x, t)$$

egyenlőtlenségek, ahol $[U_1(t), V_1(x, t)]$ a $Q_1(t)$ -hez tartozó megoldásrendszer, $[U(t), V(x, t)]$ pedig a $Q(t) \equiv 1$ -hez tartozó megoldásrendszer, amelyet az előző példák során explicit alakban kiszámítottunk.

A nagy türelmet igénylő részletszámításokat *Adler György* és *Csukás Andrásné* munkatársaim, továbbá *Révai Katalin* műegyetemi tanársegéd²⁾ végezték. *Czipszer János* kartársam az egész kéziratot gondosan átnézte, és számos értékes megjegyzést tett. A dolgozat második fejezetében tárgyalt feladatokra *Pál Sándor* kartársam irányította rá a figyelmemet. Értékes segítségükért mindannyiuknak ezúton is köszönetet mondok.

IRODALOM

- [1] К. А. КАРПОБ: *Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области*. Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1954.
 [2] PÁL S.: „Cukoripari diffúziós problémákról.” *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950. (p. 693—726).
 [3] A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. (Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI.) 3. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
 [4] K. W. WAGNER: *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*. Verlag Barth, Leipzig, 1950.

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И ДИФФУЗИИ СО СЛОЖНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, I.

Г. Фрейд

Резюме

Мы будем исследовать линейное уравнение теплопроводности (1) с однородным начальным условием (6), если на конце стержня выполняются краевые условия (4) и (5). Через $U(t)$ обозначим другую искомую функцию, которая должна удовлетворить начальному условию $U(0) = U_0$.

Физически это означает, что один конец стержня связан термически с точечным телом конечной теплоемкости. $U(t)$ —это температура точечного тела, а $V(x, t)$ —стержня. Мы рассматриваем следующие случаи (распадающие в свою очередь на дальнейшие подслучай):

- A) в одном направлении бесконечный стержень;
- B) другой конец стержня теплово изолирован, т. е. $V_x(l, t) = 0$;
- C) на другом конце стержня поддерживается постоянная температура;
- D) другой конец стержня термически связан с тепловым резервуаром известной температуры $Z(t)$. Поэтому при $x = l$ должно иметь место краевое условие (32).

Метод решения состоит в том, что мы ищем неизвестную функцию $V(x, t)$ в виде такого свертывания двух функций, которое заведомо удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и однородным начальным условиям, а в случаях A), B) и C) также и краевым условиям на другом конце стержня. Таким образом мы приходим к интегральным уравнениям типа свертывания, разрешаемым с помощью преобразования Лапласа. Этот метод применяется также при решении одной задачи теплопроводности с цилиндрической симметрией.

В последней части мы даем распространение теоремы *Тихонова* о теплопроводности на рассмотренные задачи. С помощью этой теоремы доказывается, что решения однозначны и краевые условия поставлены корректно.

²⁾ Közlekedési Műszaki Egyetem, Szolnok, Matematikai Tanszék.

ÜBER WÄRMELEITUNGS- UND DIFFUSIONSPROBLEME MIT ZUSAMMENGESETZTEN RANDBEDINGUNGEN, I.

G. FREUD

Zusammenfassung

Es werden Lösungen der linearen Wärmeleitungsgleichung (1) mit der homogenen Anfangsbedingung (6) untersucht, wo am Ende des wärmeleitenden Stabes die Randbedingungen (4) und (5*) erfüllt sind. $U(t)$ ist eine weitere unbekannte Funktion, deren Anfangswert, $U(0) = U_0$, angegeben werden muss. Physikalisch bedeuten diese Randbedingungen, dass der wärmeleitende Stab an einem Ende mit einem punktförmigen Körper von endlicher Wärmekapazität in Wärmeaustausch steht. $U(t)$ bedeutet die Temperatur des punktförmigen Körpers und $V(x, t)$ die Temperatur des Stabes.

Folgende Fälle werden (auf weitere Unterfälle geteilt) behandelt:

- A) einseitig unendlich langer Stab;
- B) das andere Ende des Stabes ist thermisch isoliert, d. h. $V_x(l, t) = 0$;
- C) das andere Ende des Stabes wird dauernd auf der Anfangstemperatur des Stabes gehalten, d. h. $V(l, t) = 0$;
- D) das andere Ende des Stabes steht in Wärmekontakt mit einem Wärmebehälter vorgeschriebener Temperatur, also besteht dort die Randbedingung (32).

[$Z(t)$ = Temperatur des Wärmebehälters].

Die Lösungsmethode besteht darin, dass $V(x, t)$ in Faltungsform angesetzt wird, welche das Erfülltsein der partieller Differentialgleichung und der homogenen Anfangsbedingung, und im Falle A), B), und C) sogar das Erfüllsein der Randbedingung am anderen Stabende, in Evidenz setzt. Somit entstehen Integralgleichungen vom Faltungstypus, welche mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Dieselbe Methode wird zur Lösung eines Wärmeleitungsproblems mit zylindrischer Symmetrie angewandt.

Im letzten Teil wird eine Ausdehnung des Satzes von *Tihonow* bezüglich der Wärmeleitung auf die behandelten Probleme angegeben. Hieraus wird gefolgert, dass die Lösung eindeutig ist, und die Randbedingungen sachgemäss gestellt sind.

HŐVEZETÉS VÉGTELEN RÚDBAN, I.

CZIPSZER JÁNOS

Bevezetés

Ismeretes, hogy a

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

egydimenziós hővezetési differenciálegyenlet megoldását a

$$G: \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

tartományban a

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow +0 \\ \xi = x}} u(\xi, \tau) = f(x)$$

kezdeti feltétel mellett az

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

úgynevezett Poisson-integrál szolgáltatja, ha az $f(x)$ függvény bizonyos megszorításoknak tesz eleget.

Felmerül mármost a kérdés, hogy általában az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

Poisson-integrál vagy az általánosabb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrál az $f(x)$ -re, illetve az $\alpha(x)$ -re vonatkozó milyen feltevések mellett megoldása az (1) differenciálegyenletnek esetleg a G tartománynál szűkebb, valamilyen $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ sávban, és fordítva :

milyen feltevések mellett lehet az (1) differenciálegyenlet megoldását Poisson-integrállal vagy Poisson—Stieltjes-integrállal előállítani. Ezzel a problémával kapcsolatban a következő, Widder-től származó tételt említjük meg, amely e dolgozat kiindulópontjául szolgált.

1. tétel ([3], Theorem 6., 92. oldal). Ha $u(x, t)$ valamilyen $S: -\infty < x < \infty, 0 < t < c$ ($c > 0$) sávban értelmezett, nem-negatív, folytonos, az $u_{xx} = u$ differenciálegyenletet kielégítő függvény, akkor található olyan $\alpha(x)$ minden x -re értelmezett monoton növekedő függvény, amelyre fennáll az

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

egyenlőség S minden (x, t) pontjában.

Fordítva, ha $\alpha(x)$ minden x -re értelmezett monoton növekedő függvény, és

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

minden, a $0 < t < c$ feltételt kielégítő t -re véges, akkor $u(x, t)$ folytonos, nem-negatív és eleget tesz az $u_{xx} = u$ differenciálegyenletnek minden $0 < t < c$ -re.

Megjegyzendő, hogy Widder eredeti tétele az 1. tételtől némileg eltérő, amennyiben Widder a tétel első felében felteszi, a második felében pedig állítja, hogy $u(x, t)$ első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak. Az 1. tétel azonban teljesen ekvivalens Widder tételével, mint az Hartman és Widder alábbi tételéből azonnal következik (lásd: [1], 359. oldal):

Ha $u(x, t)$ az (1) differenciálegyenlet folytonos megoldása valamilyen nyílt halmazon, akkor $u(x, t)$ összes parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

Mi ebben a dolgozatban arra a kérdésre akarunk válaszolni, hogy az (1) differenciálegyenlet milyen megoldásait lehet tetszőleges, nem szükségképpen monoton súlyfüggvénnyel rendelkező abszolút konvergens Poisson—Stieltjes-integrállal előállítani. A kérdésre a következő tétel ad választ:

2. tétel. Jelöljük S -sel a $-\infty < x < \infty, 0 < t < c$ sávot, ahol c rögzített pozitív szám.

a) Ha $u(x, t)$ S -ben értelmezett folytonos, az

$$u_{xx} = u$$

differenciálegyenletet kielégítő függvény, amelyre

$$(2) \quad \sup_{0 < t < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx < \infty$$

minden $0 < h < c$ -re, akkor $u(x, t)$ minden S -beli (x, t) -re abszolút konvergens

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrálként állítható elő, ahol $\alpha(y)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény.

b) Ha $\alpha(y)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény, és az

$$(3) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

minden S -beli (x, t) -re abszolút konvergencia, akkor $u(x, t)$ S -ben folytonos, eleget tesz az (1) differenciálegyenletnek és a (2) egyenlőtlenségnek minden c -nél kisebb $h > 0$ számra.

c) Ha $\alpha(y)$ -ra teljesülnek a b) alatti kikötések és

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

akkor

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_a^b u(x, t) dx = \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \} - \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \},$$

minden valós a -ra és b -re.

Megjegyzendő, hogy általában az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

integrált, akkor nevezzük abszolút konvergenciának, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)| < \infty.$$

A 2. tétel bizonyítását az 1. §-ban közöljük; a bizonyítás gondolatmenete lényegében ugyanaz, mint amilyennel *Widder* az 1. tételt bizonyítja.

A 2. tételből és a [3] dolgozat egyik segédtevételeiből az 1. tétel könnyen következik; ezt mutatjuk meg a 2. §-ban. Végül a 3. §-ban az (1) differenciálegyenlet (3) alakú megoldásaira egy érdekes becslést konstruálunk.

1. §.

Rátérünk a 2. tétel bizonyítására. Először a 2. tétel b) állítását igazoljuk. Legyen tehát $\alpha(x)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény, és a (3) integrál legyen minden $0 < t < c$ -re abszolút konvergens.

Ez az integrál, továbbá az integrandus t és x szerinti akárhányszori deriválása után kapott integrálok mind abszolút és egyenletesen konvergálnak minden $-R \leq x \leq R$, $0 < t \leq h < c$ téglalapon. Ennek az egyszerű ténynek az igazolását az olvasóra bízunk, egyébként *Widder* idézett dolgozatában ([3], Theorem 1., 88. oldal) részletesen megtalálható. A (3) integrál és a deriváltak után kapott integrálok egyenletes konvergenciájából következik, hogy $u(x, t)$ folytonos, x és t szerint akárhányszor differenciálható,

és a deriváltak az integráljel mögötti deriválással nyerhetők. Minthogy $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$ eleget tesz az (1) differenciálegyenletnek, azért ugyanez igaz $u(x, t)$ -re is. Hátra van még annak a megmutatása, hogy $u(x, t)$ eleget tesz a (2) egyenlőtlenségnek.

Ez könnyen igazolható :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |d\alpha(y)| \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)} - \frac{(x-y)^2}{4t}} dx \right\} |d\alpha(y)| = \\ &= \sqrt{\frac{h-t}{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|, \end{aligned}$$

ha $0 < t < h < c$. Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|$$

integrál véges, mert a (3) integrál az $x = 0, t = h$ helyen abszolút konvergens, s így az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|$$

egyenlőtlenséggel (2) be van bizonyítva. Ezzel a 2. tétel második állítását bebizonyítottuk.

A 2. c) állítás igazolása a következőképpen történik. Teljesüljenek $\alpha(y)$ -ra a 2. b) alatti feltevések, és legyen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

Legyen $a < b$ és $\Omega > \max(|a|, |b|)$. $u(x, t)$ -t bontsuk három részre :

$$u_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

$$u_2(x, t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

$$u_3(x, t) = \int_{\Omega}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

Ha $t \rightarrow 0$, $u_1(x, t)$ és $u_3(x, t)$ egyenletesen tartanak 0-hoz az $a \leq x \leq b$ intervallumon. $u_2(x, t)$ parciális integrálás után így írható:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\Omega-x)^2}{4t}} \alpha(\Omega) - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\Omega+x)^2}{4t}} \alpha(-\Omega) - \\ - \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{x-y}{4\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy.$$

Itt a kiintegrált rész egyenletesen tart 0-hoz $a \leq x \leq b$ -ben, midőn $t \rightarrow 0$. Következésképp

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dx = - \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \left\{ \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{x-y}{4\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\} dx = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(b-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy - \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(a-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\}.$$

A Poisson-integrál jól ismert tulajdonsága szerint

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(b-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy - \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(a-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\} = \\ = \frac{\alpha(b-0) + \alpha(b+0)}{2} + \frac{\alpha(a-0) + \alpha(a+0)}{2}.$$

Ezzel 2. c)-t bebizonyítottuk.

A 2. tétel első állításának igazolásához a következő unicitási tételre van szükségünk.

Segéd-tétel. Legyen $u(x, t)$ $a - \infty < x < \infty$, $0 \leq t < c$ sávon értelmezett folytonos függvény, amely $t > 0$ -ra eleget tesz az $u_{xx} = u_t$ differenciálegyenletnek. Még feltesszük, hogy minden $0 < h < c$ -re

$$\sup_{0 < t < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx < \infty.$$

Ha a tett feltevések mellett $u(x, 0) \equiv 0$, akkor

$$u(x, t) \equiv 0.$$

A bizonyításnál a következő Tyihonov-tól származó unicitási tételt fogjuk felhasználni (lásd: [2], 206. oldal):

Legyen $u(x, t)$ a $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq l$ sávon értelmezett folytonos függvény, amelyik $t > 0$ -ra eleget tesz az $u_{xx} = u_t$ differenciálegyenletnek, és alkalmas K -val és C -vel kielégíti az

$$|u(x, t)| \leq Ce^{Kx^2} \quad (0 \leq t \leq l)$$

egyenlőtlenséget. Ha a tett feltevések mellett $u(x, 0) \equiv 0$, akkor $u(x, t) \equiv 0$.

A segédétel bizonyítása a következőképpen történik. Bevezetjük a

$$v(x, t) = \int_0^x \{u(\xi + a, t) + u(-\xi + a, t)\} d\xi$$

függvényt, ahol a tetszőleges, rögzített valós szám. $v(x, t)$ minden $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < c$ -re értelmezett folytonos függvény. Jegyezzük meg, hogy $v(x, 0) \equiv 0$.

Megmutatjuk, hogy $v(x, t)$ $t > 0$ -ra eleget tesz a $v_{xx} = v_t$ differenciálegyenletnek. Ehhez először is emlékeztetünk arra, hogy u_x és u_t ($= u_{xx}$) folytonosak $t > 0$ -ra (lásd az 1. tételt követő megjegyzést a 396. oldalon).

Számítsuk ki $v(x, t)$ parciális deriváltjait:

$$v_{xx} = u_x(x + a, t) - u_x(-x + a, t)$$

$$\begin{aligned} v_t &= \int_0^x \{u_t(\xi + a, t) + u_t(-\xi + a, t)\} d\xi = \\ &= \int_0^x \{u_{xx}(\xi + a, t) + u_{xx}(-\xi + a, t)\} d\xi = \\ &= \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi + a, t) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(-\xi + a, t) \right\} d\xi = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi + a, t) + \frac{\partial}{\partial \xi} u(-\xi + a, t) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = \\ &= \left[u_x(\xi + a, t) - u_x(-\xi + a, t) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = \\ &= u_x(x + a, t) - u_x(-x + a, t). \end{aligned}$$

Így valóban $v_{xx} = v_t$.

Most megmutatjuk, hogy minden $0 < l < c$ -re $v(x, t)$ eleget tesz egy (4) alakú becslésnek. Válasszunk egy h számot, melyre $l < h < c$. Tekintsük a

$$v_1(x, t) = \int_0^x u(\xi + a, t) d\xi$$

függvényt. Ezt a következőképpen becsülhetjük $t < l$ -re :

$$\begin{aligned}
 |v_1(x, t)| &\leq \left| \int_0^x |u(\xi + a, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^{-a} |u(\xi + a, t)| d\xi \right| + \left| \int_{-a}^x |u(\xi + a, t)| d\xi \right| = \\
 &= \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + \left| \int_0^{x+a} |u(\xi, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + e^{\frac{(x+a)^2}{4(h-t)}} \left| \int_0^{x+a} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + e^{\frac{(x+a)^2}{4(h-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi .
 \end{aligned}$$

Jelöljük M -mel $u(x, t)$ maximumát a $-|a| \leq x \leq |a|$, $0 \leq t \leq l$ halmazon.
Legyen továbbá

$$\mu = \sup_{0 < t \leq l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi .$$

Feltevés szerint μ véges. Végül jegyezzük meg, hogy $|x| \geq 2a$ -ra

$$(x+a)^2 \leq \frac{3}{2} |x| .$$

Ennek alapján adódik a következő becslés :

$$|v_1(x, t)| \leq |a| M + \mu e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \leq (|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} ,$$

ha $0 \leq t \leq l$ és $|x| \geq 2a$.

• Legyen

$$v_2(x, t) = \int_0^x u(-\xi + a, t) d\xi .$$

Nyilván

$$v_2(x, t) = -v_1(-x, t) ,$$

s így

$$|v_2(x, t)| \leq (|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \quad (0 \leq t \leq l, |x| \geq 2a) .$$

Következésképp

$$\begin{aligned}
 |v(x, t)| &= |v_1(x, t) + v_2(x, t)| \leq \\
 &\leq 2(|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \quad (0 \leq t \leq l, |x| \geq 2a) .
 \end{aligned}$$

Innen

$$|v(x, t)| \leq 2(a + M + \mu) + \max_{\substack{0 \leq t' \leq t \\ |x| \leq 2a}} |v(x, t')| e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2},$$

ha $0 \leq t \leq l$, $-\infty < x < \infty$. Ezzel kimutattuk, hogy $v(x, t)$ a Tyihonov-tételben szereplő összes kirovásoknak eleget tesz. Következésképp

$$v(x, t) \equiv 0.$$

Ennélfogva $v_x(x, t)$ is azonosan eltűnik, speciálisan

$$v_x(0, t) = u(a, t) + u(a, t) = 0,$$

azaz

$$u(a, t) = 0.$$

Minthogy a tetszőlegesen választott valós szám volt, azért adódik, hogy

$$u(x, t) \equiv 0$$

q. e. d.

Ezek után rátérünk a 2. tétel első állításának igazolására.

$u(x, t)$ tegyen eleget a 2. tétel a) részében kirótt feltevéseknek. Rögzítünk valamilyen c -nél kisebb pozitív δ számot. A (2) egyenlőtlenség miatt minden $0 < t < c - \delta$ -ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} |u(x, \delta)| dx < \infty.$$

Válasszunk most a $(t, c - \delta)$ intervallum belsejében egy t' számot. Minthogy elég nagy $|y|$ -ra

$$(x - y)^2 \geq \frac{t}{t'} y^2,$$

ezért az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t'}} |u(y, \delta)| dy$$

integrállal együtt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |u(y, \delta)| dy$$

is véges. Így az $\int_0^x u(y, \delta) dy$ függvény teljesíti a 2. tétel b) részében az $\alpha(x)$ függvényre tett kikötéseket, ha c helyett $(c - \delta)$ -t írunk, és így a már bizonyított 2. b) tétel szerint

$$u_\delta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy$$

a $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c - \delta$ sávban az (1) differenciálegyenlet folytonos megoldása, melyre teljesül a (2) egyenlőtlenség minden $0 < h < c - \delta$ -ra. Minthogy $u(y, \delta)$ az y folytonos függvénye, azért a Poisson-integrál jól ismert tulajdonsága szerint $u_\delta(\xi, \tau) \rightarrow u(x, \delta)$, midőn $(\xi, \tau) \rightarrow (x, \delta)$. Ennélfogva $u_\delta(x, t)$ -t folytonosan kiterjeszthetjük a $t = 0$ egyenesre, ha megállapodunk abban, hogy

$$u_\delta(x, 0) = u(x, \delta).$$

Tekintsük most az $u(x, t + \delta)$ függvényt. Ez a függvény a $0 \leq t < c - \delta$ sávban folytonos és eleget tesz (1)-nek, továbbá minden $0 < h < c - \delta$ -val kielégíti (2)-t is, hiszen

$$\sup_{0 < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t + \delta)| dx \leq \sup_{0 < h+\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h+\delta-t)}} |u(x, t)| dx,$$

s itt a jobboldal az $u(x, t)$ -re vonatkozó feltevés értelmében véges. Mint-hogy $u(x, t + \delta)$ $t = 0$ -ra megegyezik $u_\delta(x, t)$ -vel, azért mondhatjuk, hogy $u(x, t + \delta) - u_\delta(x, t)$ $0 \leq t < c - \delta$ -ra folytonos, $t > 0$ -ra eleget tesz (1)-nek, minden $0 \leq t < c - \delta$ -ra kielégíti (2)-t¹⁾ és $t = 0$ -ra eltűnik. A segéd-tétel szerint ezekből a tulajdonságokból következik, hogy

$$u(x, t + \delta) - u_\delta(x, t) \equiv 0,$$

azaz

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy,$$

ha $0 < \delta < c$ és $0 < t < c - \delta$.

Válasszunk most egy pozitív, c -nél kisebb t_1 számot. Legyen $\delta \leq (c - t_1)/2$. $u(x, t + \delta)$ a következő alakban írható:

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} e^{-\frac{y^2}{4t_1}} u(y, \delta) dy,$$

ha $t < t_1$. Legyen

$$\beta_\delta(x) = \int_0^x e^{-\frac{y^2}{4t_1}} u(y, \delta) dy.$$

Így

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta_\delta(y) \quad (t < t_1).$$

¹⁾ Nyilvánvaló, hogy két függvénnyel együtt azok különbsége is eleget tesz 2)-nek.

Minthogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d\beta_{\delta}(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t_1}} |u(x, \delta)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\left(\frac{c+t_1}{2} - \delta\right)}} |u(x, \delta)| dx,$$

s a jobboldal (2) szerint egy rögzített K korlát alatt marad, midőn δ befutja a $\left(0, \frac{c-t_1}{2}\right)$ intervallumot, azért *Helly* tétele szerint meg lehet adni egy 0-hoz konvergáló $\delta_1, \delta_2, \dots$ sorozatot és egy, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon korlátos variációjú $\beta(x)$ függvényt úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\beta_{\delta_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\beta(x)$$

legyen, ahol $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény. Speciálisan tehát

$$\begin{aligned} u(x, t + \delta_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta_{\delta_n}(x) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y) \quad \left(t < t_1, \delta < \frac{c-t_1}{2}\right), \end{aligned}$$

s így

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y) \quad (t < t_1).$$

Legyen

$$\gamma(x) = \int_0^x e^{\frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y).$$

Akkor

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\gamma(y) \quad (t < t_1).$$

Ez az integrál abszolút konvergens, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |d\gamma(y)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{4t_1}} |d\beta(y)| < \infty.$$

Legyen

$$\alpha(x) = \frac{\gamma(x+0) + \gamma(x-0)}{2}.$$

Akkor

$$\alpha(x) = \frac{\alpha(x+0) + \alpha(x-0)}{2}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) \quad (0 < t < t_1),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. Ez az egyenlőség és a jobboldal abszolút konvergenciája azonban nemcsak $0 < t < t_1$ -re, hanem minden $0 < t < c$ -re is fennáll. Válasszunk ugyanis egy tetszőleges $0 < t_0 < c$ számot, majd válasszunk egy t_1^* számot a (t_0, c) intervallum belsejében. A fentiek szerint lehet találni olyan $\alpha^*(x)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú, az

$$\alpha^*(x) = \frac{\alpha^*(x+0) + \alpha^*(x-0)}{2}$$

feltételnek eleget tevő függvényt, melyre

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_0}} d\alpha^*(x) \quad (0 < t < t_1^*),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. A már bizonyított 2. c) tételből rögtön következik, hogy $\alpha(x) - \alpha^*(x)$ konstans, s így valóban

$$u(x, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_0}} d\alpha(x),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. Minthogy t_0 tetszőleges, c -nél kisebb pozitív szám, ezzel 2. a)-t teljesen bebizonyítottuk.

2. §.

Widder idézett dolgozatának egyik segédtetele szerint ([5], Theorem 4., 91. oldal) az (1) egyenlet S -beli minden folytonos és pozitív $u(x, t)$ megoldására érvényes az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy \leq u(x, t + \delta)$$

egyenlőség, ha $0 < \delta < c$ és $0 < t < c - \delta$. Innen rögtön következik, hogy $u(x, t)$ minden $h < c$ -re eleget teszi (2)-nek s így 2. a) szerint abszolút konvergens Poisson–Stieltjes-integrállal állítható elő. A 2. c) tételből következik, hogy a Poisson–Stieltjes integrál súlyfüggvénye monoton nem-csökkenő. Ezzel az 1. tételre egy új bizonyítást nyertünk.

3. §.

Az (1) differenciálegyenlet (3) alakú megoldásaira egy becslést fogunk konstruálni.

$\alpha(x)$ tegyen eleget a 2. b) tétel feltevéseinek, és legyen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

$(x - y)^2$ -re egy alkalmas alsó becslést fogunk adni. Kiindulunk az

$$(4) \quad (a + b)^2 \leq (1 + \theta^2) a^2 + \left(1 + \frac{1}{\theta^2}\right) b^2$$

egyenlőtlenségből, amely bármilyen valós a -ra, b -re és 0-tól különböző θ -ra érvényes. Legyen speciálisan $a = x$, $b = y - x$. (4) szerint

$$y^2 \leq (1 + \theta^2) x^2 + \left(1 + \frac{1}{\theta^2}\right) (y - x)^2.$$

Innen

$$(x - y)^2 \geq \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} y^2 - \theta^2 x^2.$$

Innen $u(x, t)$ -re a következő becslést nyerjük:

$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\theta^2}{1 + \theta^2} \frac{y^2}{4t}} |d\alpha(y)| e^{-\frac{\theta^2}{4t} x^2}.$$

Válasszunk egy pozitív, c -nél kisebb h számot, legyen $0 < t < h$ és $\theta = \sqrt{\frac{t}{h-t}}$.

Akkor

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)| e^{\frac{x^2}{4(h-t)}}.$$

Mint hogy a jobboldalon szereplő integrál az $\alpha(x)$ -re tett feltevések miatt véges, azért adódik, hogy

$u(x, t)$ eleget tesz az

$$|u(x, t)| \leq K \frac{e^{\frac{x^2}{4(h-t)}}}{\sqrt{t}}.$$

egyenlőtlenségnek minden $h < c$ -re. Itt K h -tól függő állandó.

Felvetődik a kérdés, hogy ha az (1) differenciálegyenlet egy folytonos megoldása az S sávban eleget tesz a fenti becslésnek, akkor abból következik-e, hogy ő abszolút konvergens Poisson–Stieltjes integrállal állítható elő. Ezt a kérdést nem sikerült eldöntenem.

[1] P. HARTMAN—A. WINTNER: «On the solutions of the equation of heat conduction». *American Journal of Mathematics* 72 (1950) 359—395.

[2] А. ТУИHOV: «Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.» *Recueil Mathématique (Szbornyk)* 42 (1935) 199—216.

[3] D. WIDDER: «Positive temperatures on an infinite rod.» *Transactions of the American Mathematical Society* 55 (1944) 85—95.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ, I.

Я. Ципсер

Резюме

Статья занимается вопросом о том, при каких условиях решения линейного уравнения теплопроводности (1), определенные в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ ($c > 0$) могут быть представлены абсолютно сходящимся интегралом Стильтьеса—Пуассона вида (3). Ответ дается следующей теоремой:

Теорема В.: Обозначим через S полосу $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$, где c фиксированное положительное число.

а) Если функция $u(x, t)$, определенная в S непрерывна в S и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), а также условию (2) при любом $0 < h < c$ то $u(x, t)$ представляется сходящимся абсолютно для всех (x, t) из S интегралом Пуассона—Стильтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

где функция $\alpha(y)$ имеет ограниченное изменение во всяком конечном интервале.

б) Если функция $\alpha(y)$ имеет ограниченное изменение во всяком конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

сходится для всех (x, t) из S абсолютно, то этот интеграл, как функция от x и t непрерывна в S удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и неравенству (2) при любом $h > 0$, меньшем c .

в) Если для $\alpha(y)$ выполняется условия пункта б) и

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

то имеет место

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dt = \frac{1}{2} [\alpha(b+0) + \alpha(b-0)] - \frac{1}{2} [\alpha(a+0) - \alpha(a-0)]$$

для любых вещественных a и b .

Следует заметить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

мы называем абсолютно сходящимся, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)| < +\infty.$$

SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE BARRE INFINIE, I

J. CZIPSZER

Résumé

Dans cette Note nous nous sommes posé la question suivante :

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution de l'équation de la chaleur (1) définie sur la bande $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ admette une représentation de la forme (3) où l'intégrale de Poisson-Stieltjes est supposée absolument convergente? C'est le théorème suivant qui répond à cette question :

Théorème 2. Désignons par S la bande $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ du plan x, t où c est un nombre positif fixe.

a) Si $u(x, t)$ est une solution continue de (1) définie sur S et si de plus $u(x, t)$ satisfait à (2) pour chaque $0 < h < c$, alors $u(x, t)$ admet une représentation de la forme (3) où $\alpha(y)$ est à variation bornée sur chaque intervalle fini et l'intégrale de Stieltjes est absolument convergente.

b) Si $\alpha(y)$ est une fonction à variation bornée sur chaque intervalle fini et si l'intégrale de Stieltjes (3) converge absolument pour chaque x, t en S alors la fonction $u(x, t)$ est une solution continue de (1) et satisfait à (2) pour chaque $0 < h < c$.

c) Si $\alpha(y)$ satisfait aux conditions énoncées sous b) et si nous posons

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

alors on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dx = \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \} - \frac{1}{2} \{ \alpha(a+0) + \alpha(a-0) \}$$

pour chaque nombre réel a et b .

Remarquons que, d'une façon générale, l'intégrale de Stieltjes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

est dite absolument convergente lorsque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)|$$

est finie.

FÖLDSZINTI FŰTÖTT HELYISÉG PADLÓJÁNAK HŐÁTBOCSÁTÁSÁRÓL

BOGNÁR JÁNOS

Bevezetés

Épületek tervezésénél rendszeres feladat a helyiségek fűtési hőszükségletének megállapítása. Ha a helyiséget minden oldalról levegő veszi körül (emeleti helyiség), akkor a hőveszteség a lineáris hőközlési törvény segítségével egyszerűen kiszámítható. Abban az esetben viszont, ha a helyiség a talaj szintjén emelkedik, a padlón át távozó hőmennyiség meghatározása részletesebb matematikai vizsgálatot kíván. Ezen a téren eddig megelégedtek félempirikus módszerekkel. Alábbi számításaink a feladat szabatos megoldását tartalmazzák téglalap alapú helyiségre, a mellett az egyszerűsítő feltétel mellett, hogy a levegő és a talaj egymásra vonatkozó hőközlési tényezője a helyiségen belül ugyanakkora, mint a helyiségen kívül. A gyakorlatban előforduló esetek egy részében ez a feltétel jó közelítéssel megvalósul. (Meggjegyezzük, hogy a hőközlési tényező megállapításánál a hővezetésen kívül a hősugárzást is tekintetbe szokták venni.) Másik egyszerűsítő feltevésünk az, hogy a helyiség falai végtelenül vékonyak. E feltevés következtében a hőveszteség általunk kapott értéke nagyobb a valóságosnál, de hozzávetőleges becslések szerint az eltérés aránylag nem nagy, és amúgyis a tervezés biztonságát növeli. Az alábbiakban először a megfelelő kétdimenziós problémát tárgyaljuk, vagyis azt az esetet, amikor a helyiség végtelen hosszú. azután térünk át a térbeli problémára (véges hosszúságú helyiség).

1. §. A helyiség alapja végtelen sáv

A talaj szintjén emelkedik egy hőszigetelő padlóval nem rendelkező helyiség, amelynek alapja $2a$ szélességű, végtelenbe nyúló sáv. A helyiséget úgy fűtik, hogy a talajmenti légrétegben T_0 állandó hőmérséklet alakul ki. A helyiségen kívül a talajmenti légréteg hőmérséklete, T_1 , szintén állandó érték. Ezenkívül ismerjük a talaj α hővezetési tényezőjét (feltesszük, hogy a talaj homogén izotróp) és a talaj és a levegő K hőközlési tényezőjét. (A szigetetlenség azt jelenti, hogy K kívül és belül ugyanaz az érték.) Meghatározandó az alap egységnyi hosszúságú darabján keresztül a talajnak időegység alatt átadott Q hőmennyiség.

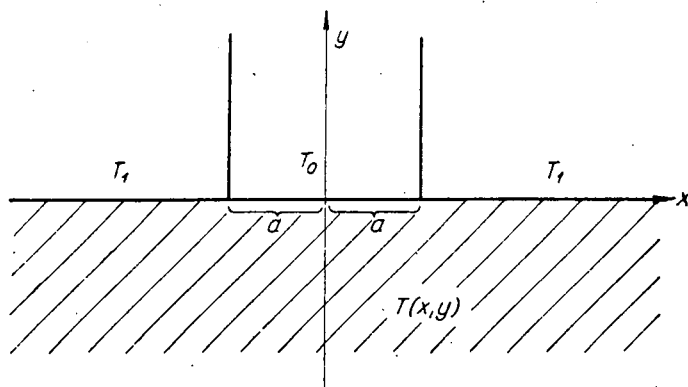
A számításnál nyilván elég egy tetszés szerint választott keresztmetszetre szorítkozni. A koordinátarendszert az 1. ábrán látható módon vesszük

fel. Ha a talaj (x, y) pontjában kialakuló hőmérséklet $T(x, y)$, akkor a Newton-féle lehűlési törvény (lásd pl. [4], 24. oldal) értelmében a keresett hőmennyiség

$$(1) \quad Q = K \int_{-a}^a [T_0 - T(x, -0)] dx.$$

Tehát először meg kell határozni a $T(x, y)$ hőmérsékleteloszlást. Ez a függvény az $y < 0$ félsíkban eleget tesz a stacionárius hővezetés

$$(2) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0)$$



1. ábra

differenciálegyenletének ([4], 31. oldal), az $y = 0$ peremen pedig a

$$(3) \quad \kappa T'_y(x, -0) = \begin{cases} K[T_0 - T(x, -0)], & \text{ha } -a < x < a \\ K[T_1 - T(x, -0)], & \text{ha } |x| > a \end{cases}$$

feltételnek ([4], 24. oldal). Bevezetve a

$$(4) \quad \frac{\kappa}{K} = k$$

jelölést, (3) a következő alakban is írható:

$$(5) \quad T(x, -0) + kT'_y(x, -0) = \begin{cases} T_0, & \text{ha } -a < x < a \\ T_1, & \text{ha } |x| > a. \end{cases}$$

Legyen először $k = 1$, $T_1 = 0$. Akkor, mint ismeretes, a (2) differenciálegyenletnek az (5) peremfeltételt kielégítő megoldása

$$(6) \quad T(x, y) = -\frac{T_0}{2\pi} \int_{-a}^a G'_\eta(\xi, -0; x, y) d\xi,$$

ahol $G(\xi, \eta; x, y)$ a probléma úgynevezett Green-függvénye, amelyet a következő tulajdonságokkal definiálunk:

$$A) \quad G(\xi, \eta; x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} + g(\xi, \eta; x, y);$$

$$(7) \quad B) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta < 0, y < 0)$$

$$C) \quad G(\xi, -0; x, y) + G'_\eta(\xi, -0; x, y) = 0.$$

Könnyen igazolható, hogy a

$$(8) \quad G(\xi, \eta; x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} + \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2}} - \\ - 2e^{-\eta} \int_{-\infty}^{\eta} e^t \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (t + y)^2}} dt$$

függvény megfelel a (7) követelményeknek.¹⁾

(6)-ból (7) C) felhasználásával

$$(9) \quad T(x, y) = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-a}^a G(\xi, -0; x, y) d\xi.$$

(8)-ban elvégezve az $\eta \rightarrow -0$ határátmenetet és parciálisan integrálva,

$$G(\xi, -0; x, y) = 2 \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} - 2 \int_{-\infty}^0 e^t \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (t + y)^2}} dt = \\ = -2 \int_{-\infty}^0 e^t \frac{t + y}{(\xi - x)^2 + (t + y)^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t - y}{(\xi - x)^2 + (t - y)^2} dt.$$

Ezt beírjuk (9)-be:

$$(10) \quad T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \int_{-a}^a \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t - y}{(\xi - x)^2 + (t - y)^2} dt \right\} d\xi.$$

Itt az integrálások sorrendje felcserélhető, mert rögzített $y < 0$ mellett az

¹⁾ T és G egyértelműségére és G megszerkesztésére vonatkozólag lásd Freud G. [1] cikkét.

integrandus, mint t és ξ függvénye, folytonos, és a t szerinti integrál ξ -ben egyenletesen konvergens. Tehát

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= \frac{T_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \left\{ \int_{-a}^a \frac{t-y}{(\xi-x)^2 + (t-y)^2} d\xi \right\} dt = \\
 &= \frac{T_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \left\{ \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi-x}{t-y} \right|_{\xi=-a}^{\xi=a} \right\} dt = \\
 (11) \quad &= \frac{T_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a-x}{t-y} dt + \frac{T_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+x}{t-y} dt = \\
 &= \frac{T_0}{\pi} \sum_{i=0}^1 \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+(-1)^i x}{t-y} dt.
 \end{aligned}$$

Belátható (pl. a $t-y=u$ helyettesítéssel), hogy a kapott integrálokban az $y \rightarrow -0$ határátmenetet jogos az integráljel alatt elvégezni, vagyis

$$(12) \quad T(x, -0) = \frac{T_0}{\pi} \sum_{i=0}^1 \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+(-1)^i x}{t} dt.$$

Ebből parciális integrálással $-a < x \leq a$ esetén

$$(13) \quad T(x, -0) = T_0 - \frac{T_0}{\pi} \sum_{i=0}^1 \int_0^\infty e^{-t} \frac{a+(-1)^i x}{t^2 + [a+(-1)^i x]^2} dt \quad (-a < x \leq a).$$

A (13) értéket beírva az (1) képletbe, azt kapjuk, hogy $k=1$, $T_1=0$ esetén

$$(14) \quad Q = \frac{1}{\pi} K T_0 \sum_{i=0}^1 \int_{-a}^a \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \frac{a+(-1)^i x}{t^2 + [a+(-1)^i x]^2} dt \right\} dx.$$

Minthogy (14) integrandusa az integrációs tartományon pozitív és mint t és x függvénye mérhető, az integrálások sorrendjét szabad felcserélni azon utólag bebizonyosodó feltevés mellett, hogy az így nyert kétszeres integrál létezik. Tehát

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{\pi} K T_0 \sum_{i=0}^1 \int_0^{\infty} e^{-t} \left\{ \int_{-a}^a \frac{a + (-1)^i x}{t^2 + [a + (-1)^i x]^2} dx \right\} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} K T_0 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \int_0^{\infty} e^{-t} \{ [\log \{t^2 + [a + (-1)^i x]^2\}]_{x=-a}^{x=a} \} dt = \\
 (15) \quad &= \frac{1}{\pi} K T_0 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \int_0^{\infty} e^{-t} \log \{t^2 + [a + (-1)^i a]^2\} dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} K T_0 \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \log (t^2 + 4a^2) dt - \int_0^{\infty} e^{-t} \log t^2 dt \right\}.
 \end{aligned}$$

A kapott integrálokat [2] 312.5 b) és 312.5 d) formulája (56. oldal) felhasználásával kiszámíthatjuk, illetve visszavezethetjük egyszerűbbekre, így (15)-ből

$$(16) \quad Q = \frac{2}{\pi} K T_0 \left(C + \log 2a + \cos 2a \int_{2a}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \sin 2a \int_{2a}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right),$$

ahol $C = 0,577 \dots$ az Euler-állandó.

Az eddigiekben a $k = 1$, $T_1 = 0$ esetre szorítkoztunk. Könnyen belátható, hogy általános esetben az eredményt úgy kapjuk meg, hogy (16) jobb-oldalát szorozzuk k -val és a helyébe mindenütt a/k -t, T_0 helyébe pedig $(T_0 - T_1)$ -et írunk. Vagyis (4) és (16) alapján a végtelen hosszú helyiségre vonatkozó feladat megoldása :

$$(17) \quad Q = \frac{2}{\pi} \kappa(T_0 - T_1) \left(C + \log \frac{2a}{k} + \cos \frac{2a}{k} \int_{2a/k}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \sin \frac{2a}{k} \int_{2a/k}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right).$$

Gyakorlati célokra a zárójelben álló tagok közül általában elég az első kettőt figyelembe venni, ugyanis parciális integrálással $x > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
 \cos x \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \sin x \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_x^{\infty} \frac{\cos(t-x)}{t} dt = \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t^2} dt = \\
 &= \frac{1}{x^2} - 2 \int_x^{\infty} \frac{\cos(t-x)}{t^3} dt = \frac{1}{x^2} - 6 \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t^4} dt = \\
 &= \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} + 24 \int_x^{\infty} \frac{\cos(t-x)}{t^5} dt,
 \end{aligned}$$

tehát

$$(18) \quad \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^4} < \cos x \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \sin x \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt < \frac{1}{x^2}.$$

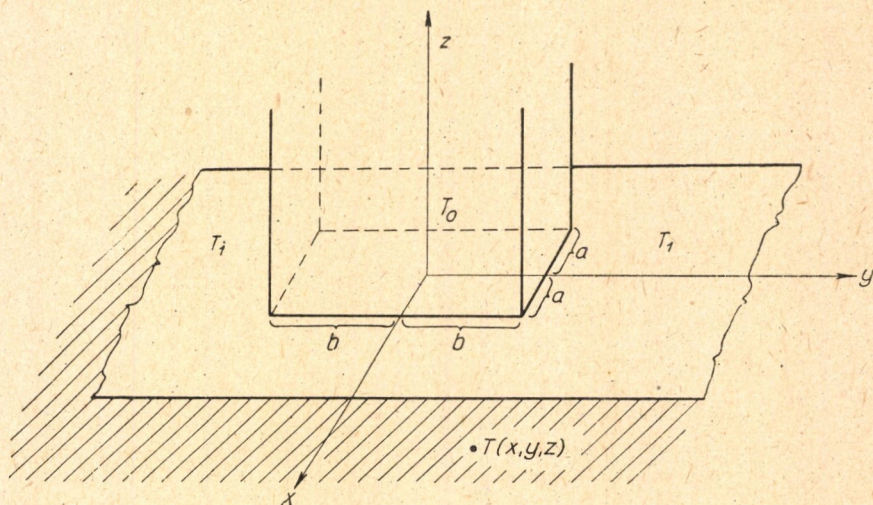
(18) alapján a

$$Q \approx \frac{2}{\pi} \kappa (T_0 - T_1) \left(C + \log \frac{2a}{k} \right)$$

közelítés hibája $2a/k \geq 5$ esetén 2%-nál kevesebb.

2. §. Téglalap-alapú helyiség

A talaj szintjén emelkedik egy hőszigetelő padlóval nem rendelkező helyiség, amelynek alapja $2a$ szélességű és $2b$ hosszúságú téglalap. A helyiséget úgy fűtik, hogy a talajmenti légrétegben állandó T_0 hőmérséklet alakul ki. A helyiségen kívül a talajmenti légréteg hőmérséklete T_1 , szintén állandó érték. A homogén izotróp közegnek feltételezett talaj κ hővezetési tényező.



2. ábra

Jének, továbbá a talaj és a levegő K hőközlési tényezőjének ismeretében meghatározandó az a Q hőmennyiség, amelyet a helyiség levegője a talajnak időegység alatt átad.

Vegyük fel a koordinátarendszert a 2. ábrán látható módon és jelöljük a talaj (x, y, z) pontjában kialakuló hőmérsékletet $T(x, y, z)$ -vel, akkor — hasonlóan a kétdimenziós esethez — a keresett hőmennyiséget a

$$(19) \quad Q = K \iint_{(N)} [T_0 - T(x, y, -0)] dx dy$$

képlet szolgáltatja, ahol N az (x, y) sík — $a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ összefüggésekkel jellemzett téglalapja.

(19) használatához ismernünk kell a $T(x, y, z)$ hőmérsékleteloszlást. Ez a függvény a $z < 0$ feltérben kielégíti a

$$(20) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (z < 0)$$

Laplace-egyenletet ([4], 29. oldal), a $z = 0$ határfelületen pedig a

$$(21) \quad \kappa T'_z(x, y, -0) = \begin{cases} K[T_0 - T(x, y, -0)], & \text{ha } (x, y) \in N \\ K[T_1 - T(x, y, -0)] & \text{egyébként} \end{cases}$$

feltételt ([4], 24. oldal). A (4) jelölés segítségével (21) a következő alakban írható:

$$(22) \quad T(x, y, -0) + kT'_z(x, y, -0) = \begin{cases} T_0, & \text{ha } (x, y) \in N \\ T_1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Szorítkozzunk először a $k = 1$, $T_1 = 0$ esetre. Ekkor, mint ismeretes, a (20) differenciálegyenletnek a (22) peremfeltételt kielégítő megoldása

$$(23) \quad T(x, y, z) = -\frac{T_0}{4\pi} \iint_{(N)} G'_\zeta(\xi, \eta, -0; x, y, z) d\xi d\eta,$$

ahol $G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ a feladathoz tartozó Green-függvény, vagyis

$$(24) \quad \begin{aligned} A) \quad & G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} + \\ & + g(\xi, \eta, \zeta; x, y, z); \\ B) \quad & \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (\zeta < 0, z < 0); \\ C) \quad & G(\xi, \eta, -0; x, y, z) + G'_\zeta(\xi, \eta, -0; x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Könnyen igazolható, hogy a

$$(25) \quad \begin{aligned} G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = & \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2}} - \\ & - 2e^{-\zeta} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^t}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2}} dt \end{aligned}$$

függvény megfelel a (24) követelményeknek. (Lásd a lábjegyzetet a 411. oldalon.)

(23)-ból (24) C) felhasználásával

$$(26) \quad T(x, y, z) = \frac{T_0}{4\pi} \iint_{(N)} G(\xi, \eta, -0; x, y, z) d\xi d\eta.$$

(25)-ben elvégezve a $\zeta \rightarrow -0$ határátmenetet és parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta, -0; x, y, z) &= \frac{2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}} - \\ &- 2 \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2}} dt = \\ &= -2 \int_{-\infty}^0 e^t \frac{t + z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2]^{3/2}} dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Az eredményt beírjuk (26)-ba :

$$(27) \quad T(x, y, z) = \frac{T_0}{2\pi} \iint_{(N)} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} dt \right\} d\xi d\eta.$$

(27)-ben az integrálások sorrendjét felcserélhetjük, mert rögzített $z < 0$ mellett az integrandus folytonos mindhárom integrációs változóban, továbbá a t szerinti integrál ξ -ben és η -ban egyenletesen konvergens. Tehát

$$T(x, y, z) = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \left\{ \iint_{(N)} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \right\} dt.$$

A $\xi = x + r(t - z)$, $\eta = y + s(t - z)$ helyettesítés után két integrálás elvégezhető ; kapjuk :

$$\begin{aligned} (28) \quad T(x, y, z) &= \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{[a + (-1)^i x] [b + (-1)^j y]}{(t - z) \sqrt{[a + (-1)^i x]^2 + [b + (-1)^j y]^2 + (t - z)^2}} dt. \end{aligned}$$

A $t - z = u$ helyettesítéssel belátható, hogy a (28) képletben a $z \rightarrow -0$ határátmenetet elvégezhetjük az integráljel alatt, vagyis

$$\begin{aligned} (29) \quad T(x, y, -0) &= \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{[a + (-1)^i x] [b + (-1)^j y]}{t \sqrt{[a + (-1)^i x]^2 + [b + (-1)^j y]^2 + t^2}} dt. \end{aligned}$$

A (29) kifejezést beírva (19)-be, és mindjárt elvégezve az $a + (-1)^i x = u$, $b + (-1)^j y = v$ helyettesítést, kapjuk :

$$Q = K \int_0^{2a} \left\{ \int_0^{2b} \left[T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{arctg} \frac{uv}{t\sqrt{u^2 + v^2 + t^2}} dt \right] dv \right\} du,$$

innen pedig t szerint parciálisan integrálva :

$$(30) \quad Q = K \int_0^{2a} \left\{ \int_0^{2b} \frac{2T_0}{\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{uv(u^2 + t^2 + v^2 + t^2)}{(u^2 + t^2)(v^2 + t^2)\sqrt{u^2 + v^2 + t^2}} dt \right] dv \right\} du;$$

(30) integrandusa a t, u, v változók pozitív és mérhető függvénye, tehát az integrálások sorrendje felcserélhető, feltéve, hogy az így kapott háromszoros integrál létezik. Ezek szerint

$$(31) \quad Q = \frac{2}{\pi} KT_0 \int_0^{\infty} e^{-t} \left\{ \int_0^{2a} \left[\int_0^{2b} \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2 + t^2}} \left(\frac{1}{u^2 + t^2} + \frac{1}{v^2 + t^2} \right) dv \right] du \right\} dt.$$

(31)-ben az u és v szerinti integrálás elemien elvégezhető. Átalakítás után az eredmény :

$$(32) \quad \begin{aligned} Q = \frac{4}{\pi} KT_0 \int_0^{\infty} e^{-t} [& \sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2} - \sqrt{4a^2 + t^2} - \sqrt{4b^2 + t^2} + t - \\ & - a \log (2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2}) - \\ & - b \log (2b + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2}) + \\ & + a \log (2a + \sqrt{4a^2 + t^2}) + b \log (2b + \sqrt{4b^2 + t^2}) + \\ & + a \log \sqrt{4b^2 + t^2} + b \log \sqrt{4a^2 + t^2} - \\ & - a \log t - b \log t] dt. \end{aligned}$$

Itt néhány tagot ki lehetne integrálni, de az így adódó kifejezés gyakorlati számítások céljára még mindig túlságosan bonyolult lenne. Ezért inkább arra törekszünk, hogy a (32) kifejezést könnyen kezelhető közelítő képlettel helyettesítsük. A feladat természetéből következik, hogy néhány százalékos pontatlanság megengedhető.

A kívánt közelítést úgy nyerjük, hogy (32) integrandusából kiküszöböljük a logaritmusokat, majd az egyes négyzetgyökös tagokat binomiális soruk első tagjaival pótoljuk.

Felhasználjuk, hogy

$$(33) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t} \log (2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2}) dt = \\ & = \int_0^{2a} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \log (\tau + \sqrt{\tau^2 + 4b^2 + t^2}) dt \right\} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-t} \log \sqrt{4b^2 + t^2} dt; \end{aligned}$$

ugyanis a jobboldalon szereplő derivált τ -nak folytonos függvénye, amint látni fogjuk. Továbbá

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} e^{-t} \log(\tau + \sqrt{\tau^2 + 4b^2 + t^2}) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + 4b^2 + t^2}},$$

mert a jobboldali integrál egyenletesen konvergens τ -ban, és integrandusa τ és t folytonos függvénye. Ebből egyben következik az integrál folytonossága és így (33) helyessége is. (34)-et beírva (33)-ba

$$(35) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \log(2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2}) dt = \\ = \int_0^{2a} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + 4b^2 + t^2}} \right\} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-t} \log \sqrt{4b^2 + t^2} dt.$$

(35) érvényes $b = 0$ esetén is :

$$(36) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \log(2a + \sqrt{4a^2 + t^2}) dt = \int_0^{2a} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} \right\} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-t} \log t dt.$$

(35)-öt, (36)-ot és a belőlük a és b felcserélésével előálló azonosságokat beírjuk (32)-be és felhasználjuk az

$$\int_0^{\infty} te^{-t} dt = 1$$

relációt, kapjuk :

$$(37) \quad Q = \frac{4}{\pi} KT_0 \left[1 + \int_0^{\infty} e^{-t} (\sqrt{4a^2 + 4b^2 + t^2} - \sqrt{4a^2 + t^2} - \sqrt{4b^2 + t^2}) dt + \right. \\ \left. + a \int_0^{2a} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 4b^2 + t^2}} \right) dt \right\} d\tau + \right. \\ \left. + b \int_0^{2b} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 4a^2 + t^2}} \right) dt \right\} d\tau \right].$$

Mindeddig a $k = 1$, $T_1 = 0$ esettel foglalkoztunk. Annak megállapítása céljából, hogy hogyan kell módosítani (37)-et, ha k tetszés szerinti pozitív érték, jelöljük a (20) differenciálegyenlet (22) peremfeltételt kielégítő megoldását átmenetileg részletesebben $T(x, y, z; k, N)$ -nel. Változtassuk meg (22)-t úgy, hogy N helyébe a $-\frac{a}{k} \leq x \leq \frac{a}{k}$, $-\frac{b}{k} \leq y \leq \frac{b}{k}$ összefüggésekkel

jellemzett N_k téglalapot írjuk. Az így kapott peremértékprobléma megoldása legyen $T(x, y, z; k, N_k)$. A definíció alapján

$$(38) \quad T(x, y, z; k, N) = T\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}; 1, N_k\right).$$

(19)-ből (38) felhasználásával és integráltranszformációval kapjuk:

$$\begin{aligned} Q &= K \iint_{(N)} \left[T_0 - T\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, -0; 1, N_k\right) \right] dx dy = \\ &= k^2 K \iint_{(N_k)} [T_0 - T(x', y', -0; 1, N_k)] dx' dy'. \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges k esetén a Q hőmennyiséget úgy kapjuk meg, hogy (37) jobboldalát szorozzuk k^2 -tel, és a helyébe mindenütt a/k -t, b helyébe b/k -t írunk. $T_1 \neq 0$ esetén T_0 helyébe $T_0 - T_1$ írandó. Bevezetve a

$$(39) \quad \frac{2a}{k} = \alpha, \quad \frac{2b}{k} = \beta$$

jelöléseket, (37)-ből (4) felhasználásával tetszőleges k és T_1 esetén

$$\begin{aligned} (40) \quad Q &= \frac{4}{\pi} \frac{\kappa^2}{K} (T_0 - T_1) \left[1 + \int_0^\infty e^{-t} (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + t^2} - \sqrt{\alpha^2 + t^2} - \sqrt{\beta^2 + t^2}) dt + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \beta^2 + t^2}} \right) dt \right\} d\tau + \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2} \int_0^\beta \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \alpha^2 + t^2}} \right) dt \right\} d\tau \right]. \end{aligned}$$

A továbbiakban olyan közelítéseket kívánunk alkalmazni, amelyek kicsiny α és β értékek mellett nem érvényesek. Ezért feltesszük, hogy $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 5$; a gyakorlati alkalmazások során ez majdnem mindig teljesül. (40)-ből

$$\begin{aligned} (41) \quad Q &= \frac{4}{\pi} \frac{\kappa^2}{K} (T_0 - T_1) \left[1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{1 + \frac{t^2}{\alpha^2 + \beta^2}} dt - \right. \\ &\quad - \alpha \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{1 + \frac{t^2}{\alpha^2}} dt - \beta \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{1 + \frac{t^2}{\beta^2}} dt + \frac{\alpha + \beta}{2} \int_0^5 \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} \right\} d\tau + \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \int_5^\alpha \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2/\tau^2}} \right\} d\tau + \frac{\beta}{2} \int_5^\beta \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2/\tau^2}} \right\} d\tau - \right] \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{\alpha}{2} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \beta^2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2 + \beta^2}}} \right\} d\tau - \right. \\ \left. -\frac{\beta}{2} \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \alpha^2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2 + \alpha^2}}} \right\} d\tau \right].$$

A Taylor-formula szerint

$$(42) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\xi)^{3/2}} \quad (0 \leq \xi \leq x) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8(1+\eta)^{5/2}} \quad (0 \leq \eta \leq x).$$

A (42)-ből a maradéktagok elhagyása útján kapott közelítéseket beírva (41)-be, integrálás után adódik

$$(43) \quad Q \approx \frac{4}{\pi K} (T_0 - T_1) \left[1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \alpha - \frac{1}{\alpha} - \beta - \frac{1}{\beta} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha + \beta}{2} \int_0^5 \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} \right\} d\tau + \frac{\alpha}{2} \left(\log \alpha - \log 5 + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{50} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} \left(\log \beta - \log 5 + \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{50} \right) - \frac{\alpha}{2} \operatorname{arsh} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{2} \operatorname{arsh} \frac{\beta}{\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2\beta^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right] \quad (\alpha \geq 5, \beta \geq 5).$$

(43)-ban már csak egyetlen integrál szerepel és ez sem paraméteres, így egyszer s mindenkorra kiszámítható pl. a következő módon: [2] 513.7 formulája (196. oldal) alapján

$$(44) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} dt = \frac{\pi}{2} [\mathbf{H}_0(\tau) - N_0(\tau)]$$

ahol

$$(45) \quad \mathbf{H}_0(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{[\Gamma(m + \frac{3}{2})]^2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2m+1}$$

a 0-indexű *Struve*-függvény, $N_0(\tau)$ pedig a 0-indexű *Neumann*-függvény.

A $H_0(\tau)$ függvényt (45) sorfejtése, az $N_0(\tau)$ függvényt pedig a [3] 57. oldalán található

$$\int_0^z N_0(\tau) d\tau = zN_0(z) + \frac{\pi z}{2} [N_1(z)H_0(z) - N_0(z)H_1(z)]$$

azonosság segítségével integrálva (44)-ből

$$(46) \quad \int_0^5 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} dt \right\} d\tau = 2,8976 \pm 0,0030.$$

A (46) értéket beírva (43)-ba, azonos átalakítások után

$$(47) \quad Q \approx \frac{2}{\pi} \frac{\kappa^2}{K} (T_0 - T_1) \left[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) + 2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2\alpha\beta} + 0,7318 \right) (\alpha + \beta) - \alpha \log \left(\frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}} \right) - \right. \\ \left. - \beta \log \left(\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}} \right) \right] \quad (\alpha \geq 5, \beta \geq 5).$$

A (47) képletben már nagyobb nehézség nélkül lehet numerikus helyettesítéseket végezni, másrészt — amint (42) felhasználásával végzett részletes becslésekkel kimutatható — a képlet relatív hibája az egész $5 \leq \alpha < \infty$, $5 \leq \beta < \infty$ negyedsíkon kevesebb, mint 1,2%. Feladatunkat ezzel téglalap alapú helyiségre is megoldottuk.

A (47) képletbe való helyettesítés, bár elemi, de elég hosszadalmas számolást kíván. Ha megelégszünk kisebb pontossággal, akkor (47)-et még lényegesen leegyszerűsíthetjük. E célból az általánosság megszorítása nélkül feltezzük, hogy $\alpha \leq \beta$ és felhasználjuk a nagy x értékekre érvényes $\operatorname{arsh} x \approx \log 2x$, továbbá a kis x értékekre érvényes $\operatorname{arsh} x \approx x$ és $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ összefüggést, végül pedig elhagyjuk az α -ban és β -ban együttesen (-1) -edfokú tagokat. Így (47)-ből adódik a

$$(48) \quad Q \approx \frac{2}{\pi} \frac{\kappa^2}{K} (T_0 - T_1) [2 - 0,9818\alpha + 0,5751\beta + (\alpha + \beta) \log \alpha] \\ (5 \leq \alpha \leq \beta)$$

közelítés.

Amint gondos becslések megmutatták, a szabatos (41) érték eltérése a (48) közelítéstől pozitív irányban legfeljebb 15,9%, negatív irányban legfeljebb 10,1% az egész $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ tartományban. Az abszolút hibakorlát csökkentése céljából (48) szögletes zárójelben álló tényezőjében $+ 0,0292(\alpha + \beta)$ korrekciós tagot alkalmazunk:

$$(49) \quad Q \approx \frac{2}{\pi} \frac{\kappa^2}{K} (T_0 - T_1) [2 - 0,9526\alpha + 0,6043\beta + (\alpha + \beta) \log \alpha] \\ (5 \leq \alpha \leq \beta).$$

(49) relatív hibája az $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ tartományban kisebb a pontos érték 13,8%-ánál, a $13 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ résztartományban pedig — amely még mindig tartalmazza a gyakorlatban előforduló esetek túlnyomó részét — a pontos érték 4,9%-ánál.

Ezúton mondok köszönetet osztályvezetőmnek, Freud Gézának valamint Orolin András tervezőmérnöknek értékes tanácsaikért, amelyekkel munkámat segítették.

IRODALOM

- [1] FREUD G.: „A potenciálmélet harmadik peremértékfeladatáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 219—234.
- [2] W. GRÖBNER—N. HOFREITER: *Integraltafel, II. Teil.* Springer, Wien, 1950.
- [3] W. MAGNUS—F. OBERHETTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2. Aufl. Springer, Berlin, 1948.
- [4] C. SCHAEFER: *Einführung in die theoretische Physik*, 2. Band. Gruyter, Berlin und Leipzig, 1929.

О ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОСТИ ПОЛОВ ТОПЛЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ, ПОСТРОЕННЫХ НА УРОВНЕ ГРУНТА

Я. Богнар

Резюме

Потерю тепла, получающуюся путем проводки и излучения через пол в топленных помещениях, построенных на уровне грунта, определили до сих пор различными полуэмпирическими методами. Эта статья содержит точное решение проблемы для помещений с основанием формы бесконечной полосы и формы прямоугольника при следующих двух предположениях, сделанных в интересах упрощения: 1. стены помещения бесконечно тонки; 2. коэффициент теплопередачи воздуха относительно почвы имеет одно и то же значение внутри помещения и вне помещения. В вычислениях мы воспользуемся функцией Грина третьей краевой задачи теории потенциала относительно популности, соответственно полупространства, которые были построены Г. Фрейдом в работе [1].

В § 1 рассматривается тот случай, когда основание помещения является бесконечной полосой. Известны: ширина полосы ($2a$), температура приземного слоя воздуха в помещении (T_0) и вне помещения (T_1), коэффициент теплопроводности однородной изотропной почвы (κ), коэффициент теплопередачи воздуха и почвы друг относительно друга (K). Требуется определить количество тепла Q переданное почве за единицу времени через кусок основания единичной длины.

Выберем произвольное поперечное сечение и в нем систему координат, как это видно на чертеже 1. Зная создающееся в почве распределение температуры $T(x, y)$, величина Q определяется из (1). $T(x, y)$ определяется из дифференциального уравнения (2) и в обозначениях (4) из краевого условия (5), в случае $k = 1$, $T_1 = 0$ с помощью формулы (6). В таком случае функция Грина имеет форму (8) (см. [1]); подставляя ее в (6), простым вычислением приходим к (13). Подставляя выражение (13) в (1), путем дальнейших преобразований получаем (16). ($C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера). Легко видеть, что при общем k и T_1 вместо (16) имеет место (17). На практике обычно $2a/k \geq 5$, и тогда, пренебрегая последними двумя членами в (17), мы совершаем не более чем 2% относительной ошибки.

В § 2 рассматривается случай помещения с основанием формы прямоугольника. Ширина основания $2a$, его длина $2b$. Смысл T_0 , T_1 , κ и K тот же что и в § 1. Требуется определить количество тепла Q , переданное почве за единицу времени через всю площадь основания.

Если выбрать систему координат, как это показано на рисунке 2., то зная распределение температуры, создающееся в почве, решение задачи дается формулой (19). (Здесь $(x, y) \in N$, если $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.) $T(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (20) и краевому условию (22), следовательно в случае $k = 1$, $T_1 = 0$ его можно представить в форме (23). Подставляя сюда известную из [1] функцию Грина (25), полу-

чаем путем простых преобразований (29), а потом, подставляя (29) в (19), точное решение (32) нашей проблемы ($k=1$, $T_1=0$). Так как это для практических целей слишком сложно, найдем приближенную формулу для Q . Для этого с помощью тождеств (35), (36), получающихся из (33) и (34), мы приводим (32) к форме (37). Можно видеть, что при произвольных положительных k и T_1 вместо (37) имеет место (40). (Мы пользовались обозначениями (4) и (39)).

На практике обычно $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 5$; в дальнейшем мы ограничимся этим случаем. Применяем дальнейшие преобразования к (40), затем воспользуемся формулой Тейлора (42), так мы приходим к приближению (43), а пользуясь (46), к приближению (47). На основе (42) можно показать, что в случае $5 \leq \alpha < \infty$, $5 \leq \beta < \infty$ погрешность формулы (47) меньше, чем 1,2%. (47) симметрична относительно α и β , поэтому можно положить $\alpha \leq \beta$. Тогда, после дальнейших пропусков — применяя поправку с целью уменьшения грани абсолютной погрешности — из (47) получается уже совершенно простая приближенная формула (49). Из подробной оценки погрешности выясняется, что для $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ относительная погрешность (49) меньше, чем 13,8%, а для $13 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ меньше, чем 4,9%.

CALCULATION OF HEAT TRANSMISSION OF THE FLOOR OF A HEATED ROOM BUILT ON THE GROUND

J. BOGNÁR

Summary

The loss of heat by heated rooms built on the ground, arising from conduction and radiation through the floor, has hitherto been determined by means of various half-empiric methods. The present paper contains the exact solution of the problem for rooms having an infinite strip or a rectangle as basis, under the following two suppositions: 1) the walls of the room are infinitely thin; 2) the coefficient of heat transmission between air and ground is the same inside and outside the room. In the calculation we make use of Green's function belonging to the third boundary value problem of potential theory in the half plane and in the half space, respectively, constructed by G. Freud [1].

§ 1. deals with the case when the base of the room is a strip extending to infinity. The known data are the width of the strip ($2a$), the temperature of the air near the ground inside the room (T_0) and outside of it (T_1), the thermal conductivity of the ground (assumed to be a homogeneous isotropic medium) (κ), and the coefficient of heat transmission between air and ground (K). We want to calculate the quantity of heat Q transmitted to the ground over a stretch of the floor of unit length per unit time.

We choose an arbitrary cross-section and a system of coordinates in it as shown by fig. 1. Knowing the stationary distribution $T(x, y)$ of temperature evolving in the ground, the value of Q is given by (1). $T(x, y)$ may be determined from the differential equation (2) and (with notation (4)) from the boundary condition (5) by means of the resolving formula (6), in case $k=1$, $T_1=0$. In this case Green's function G has the form (8) (see [1]). Substituting (8) into (6) and the expression (13) — which can be obtained after simple calculations — into (1), we get (16), the solution of our problem for $k=1$, $T_1=0$. ($C=0,577\dots$ is Euler's constant.) If k and T_1 are arbitrarily given positive quantities, then (16) must be replaced by (17), as can be easily verified. In practice usually $2a/k \geq 5$, so, that the error caused by neglecting the last two terms in (17) will not exceed 2%.

§ 2. deals with rooms having an oblong base. The width of the base is denoted by $2a$, its length by $2b$. The meaning of T_0 , T_1 , κ and K is the same as in § 1. We want to calculate the quantity of heat Q transmitted to the ground over the whole surface of the floor per unit time.

If the system of coordinates is taken as in fig. 2., then — knowing the stationary distribution $T(x, y, z)$ of temperature evolving in the ground — the solution of the problem is given by (19). (Here $(x, y) \in N$, if $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.) $T(x, y, z)$ satisfies Laplace's equation (20) and the boundary condition (22), so that in case $k=1$, $T_1=0$ it can be represented in the form (23). Substituting here Green's function (25), taken from [1], after simple calculations we obtain (29), and, substituting (29) into (19), the exact solution of our problem (32) ($k=1$, $T_1=0$). Since (32) is too complicated for practical purposes, some simple approximative formula

is needed for Q . Therefore (32) is transformed into the form (37) by the aid of the identities (35) and (36), derived from (33) and (34). It is shown that if k and T_1 are arbitrarily given positive values, (37) must be replaced by (40). (Notations (4) and (39) are used.)

In practice usually $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 5$; further investigations are restricted to that case. Making use of Taylor's formula (42) we obtain the approximative expressions (43) and (47). It can be shown on the basis of (42), that the error of (47) is less than 1,2 %, provided that $5 \leq \alpha < \infty$, $5 \leq \beta < \infty$.

(47) is symmetrical in α and β , so that we may suppose $\alpha \leq \beta$. Under this assumption after further neglects and using a correction to reduce the estimated numerical error, we obtain the simple approximative formula (49). According to exact estimations the relative error of (49) is less than 13,8 %, if $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, and less than 4,9 %, if $13 \leq \alpha \leq \beta < \infty$.

KÉT ELEKTRON MOZGÁSÁBÓL SZÁRMAZÓ MÁGNESES KÖLCSÖNHATÁS MEGHATÁROZÁSA A H₂-MOLEKULÁBAN

LADIK JÁNOS¹⁾ és CSUKÁS ANDRÁS^{NÉ}

Összefoglalás

Módszert adunk meg két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatási energia hullámmechanikai figyelembevételére. A módszert a *Wang*-féle közelítő sajátfüggvényeket használva a H₂-molekulára alkalmazzuk. Eredményül a *Wang*-féle paraméterértékeket változatlanul megtartva, $8,24 \cdot 10^{-4}$ -t kapunk. Ez az érték nagyságrendileg megegyezik a H₂-színképből ismert magspin-magspin mágneses kölcsönhatási energiájából vissza-számolható értékkel.

A számítás során olyan kétcentrumos integrálok meghatározása vált szükségessé, amelyek az irodalomban nem ismeretesek. Ezek kiszámítását a függelékben adjuk meg.

1. §. Módszer két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatás hullámmechanikai figyelembevételére

Az alábbiakban egy olyan egyszerű számítási módszert ismertetünk, amelynek segítségével két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatási energia számítható hullámmechanikai úton.

A mágneses energia

$$(1) \quad T_m = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \mathbf{B} \, dv$$

kifejezéséből a

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

és

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$$

összefüggések segítségével (\mathbf{A} a vektorpotenciál és \mathbf{i} az áramsűrűség) az ismert

¹⁾ Budapesti Műszaki Egyetem, Fizikai-Kémiai Tanszék.

módon levezethető, hogy a két elektron között fellépő klasszikus mágneses kölcsönhatási energia

$$(2) \quad T_m = \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} (\dot{\mathbf{r}}_1 \dot{\mathbf{r}}_2),$$

ahol e_0 az elemi töltés, r_{12} a két elektron egymástól való távolsága abban a t időpontban, amikor sebesség-vektoraik $\dot{\mathbf{r}}_1$ és $\dot{\mathbf{r}}_2$ (lásd: [1], [2]). Természetesen a sebességek ugyanarra a koordináta-rendszerre vonatkoztatva értendők.

A (2) egyenlet a következő elhanyagolásokat tartalmazza:

a) A felhasznált kifejezése nincsen retardálva, ez a hiba azonban, ha az elektronok nincsenek távol egymástól, jelentéktelen.

b) A -nak olyan kifejezését használták fel, amelynek levezetésénél [12] feltételezték, hogy az elektron gyorsulás nélkül mozog, és így nem sugároz. Mivel azonban a (2) egyenletet stacionárius pályákon mozgó elektronok közötti kölcsönhatás számítására fogjuk felhasználni, s a hullámmechanikának alapfeltevése az, hogy az elektronok, ellentétben a klasszikus mechanikával, stacionárius pályákon nem sugároznak, a fenti elhanyagolás megengedhető.

c) A (2) egyenlet nevezőjében r_{12} helyett pontosabban s -nek kellene állnia, ahol

$$s = \sqrt{x_{12}^2 + (1 - \beta^2)(y_{12}^2 + z_{12}^2)}.$$

Itt x_{12} , y_{12} , z_{12} a két elektron x , y , z koordinátáinak a különbsége, és $\beta = v/c$ (lásd: [2]). Mivel a H_2 -atom Bohr-féle elmélete szerint az első Bohr-féle pályán keringő elektron sebessége, $v \approx 10^8$ cm/sec = 10^3 km/sec nagyságrendű, tehát a c fénysebességnél két nagyságrenddel kisebb, az $1 - \beta^2$ faktor atomi rendszerben mozgó elektronok esetén alig tér el az egységtől. Így ez az elhanyagolás nem okozhat számottevő hibát.

A (2) energia-tagnak mint potenciális energiának az időtől független Schrödinger-egyenletbe való beépítése nem járhat sikerrel. T_m ugyanis a két elektron sebességeinek a függvénye, és ha potenciális energia-tagként kezeljük, a V potenciális energia is a sebességek függvényévé válik. A stacionárius esetre vonatkozó időtől független Schrödinger-egyenlet viszont csak akkor érvényes, ha a rendszer H Hamilton-függvénye a rendszer össz-energiájával egyenlő ($H = T + V = E$). Az utóbbi feltétel pedig csak akkor teljesül, ha a rendszer konzervatív és szkleronóm, vagyis a potenciális energia csak a koordináták függvénye, viszont a T kinetikus energia a sebességek homogén, kvadratikusság alakja (lásd: [3]).

Ez az ellentmondás csak úgy szüntethető meg, ha T_m -et kinetikus energia-tagnak tekintjük. Így a teljes kinetikus energia két elektron esetén

$$(3) \quad T = T_k + T_m,$$

ahol

$$T_k = \frac{m_0 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_0 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2},$$

és

$$T_m = \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} (\dot{\mathbf{r}}_1 \dot{\mathbf{r}}_2).$$

Itt m_0 és e_0 az elektron tömege, illetve töltése.

Képezve az általános impulzusok

$$\begin{aligned} p_{x_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} \dot{x}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_{x_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} \dot{x}_1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

komponenseit, kapjuk, hogy az általános impulzusok :

$$\begin{aligned} (4) \quad \mathbf{p}_1 &= m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \mathbf{p}_2 &= m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} \dot{\mathbf{r}}_1 . \end{aligned}$$

Az $\dot{\mathbf{r}}_1$ és $\dot{\mathbf{r}}_2$ sebességeket a (4) egyenletek alapján mint \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 függvényeit kifejezve és az így kapott összefüggéseket (3)-ba helyettesítve, egyszerű számolás után kapjuk, hogy két azonos e töltésű, de különböző m_1 és m_2 tömegű ponttöltés esetén

$$(5) \quad T = \frac{m_2 \mathbf{p}_1^2 + m_1 \mathbf{p}_2^2 - 2 \frac{e^2}{c^2 r_{12}} (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}{2 \left(m_1 m_2 - \frac{e^4}{c^4 r_{12}^2} \right)} .$$

Két elektron esetén természetesen $m_1 = m_2 = m_0$ és $e = e_0$. Következésképpen alkalmazva a $\mathbf{p}_1 = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{grad}_1$ és $\mathbf{p}_2 = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{grad}_2$ hullámmechanikai impulzusoperátorokat, a $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ skalárszorzat operátorára a következő képletet kapjuk:

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta_{12} = -\frac{h^2}{4\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) .$$

Ezt a képletet, valamint a $\mathbf{p}_1^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta_1$ és $\mathbf{p}_2^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta_2$ operátorokat (5)-be helyettesítve a kinetikus energiára a

$$(6) \quad T = \frac{-m_2 \frac{h^2}{8\pi^2} \Delta_1 - m_1 \frac{h^2}{8\pi^2} \Delta_2 + 2 \frac{e^2}{c^2 r_{12}} \frac{h^2}{8\pi^2} \Delta_{12}}{m_1 m_2 - \frac{e^4}{c^4 r_{12}^2}}$$

operátort nyerjük.²⁾

²⁾ A (6) egyenletre vezető számításért ezúton is köszönetet mondunk Mátrai Tibornak, aki ezt rendelkezésünkre bocsájtotta.

A (6) egyenletet két elektron esetére alkalmazva és atomi mértékrendszerre (lásd: [5]) áttérve kapjuk:

$$(7) \quad T = \frac{-\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{2} \Delta_2 + \frac{1}{c^2 r_{12}} \Delta_{12}}{1 - \frac{1}{c^4 r_{12}^2}}.$$

A továbbiakban a (7) kifejezés nevezőjének második tagját, mint igen kicsinyt elhanyagoljuk ($c = 137,3$ at. e. és r_{12} átlaga, $\tilde{r}_{12} = 1,40$ at. e.). Ez azt jelenti, hogy a (7) végtelen mértani sorában csak az első tagot vesszük figyelembe. Mivel a nevezőjében c^4 szerepel, ez az elhanyagolás megengedhető. Ilyen módon két elektron esetén T hullámmechanikai kifejezése is

$$T = T_k + T_m$$

alakú lesz, ahol a megfelelő operátorok

$$(8) \quad T_k = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$T_m = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12}}{r_{12}}.$$

Ha megegyezésben akarunk maradni azzal a szokásos előjel-megállapodással, hogy a negatív kölcsönhatási energia vonzásnak, pozitív pedig taszításnak felel meg, a (2) ellenkező előjellel veendő (lásd: [10]). Megjegyzendő, hogy (2)-nek (1)-ből való levezetésekor ez a negatív előjel nem adódik ki. Ennek megfelelően (8) második egyenletének baloldala utólag negatív előjellel veendő.

Fentiek alapján felírható a két elektronra vonatkozó mágneses kölcsönhatást is figyelembe vevő időtől független Schrödinger-egyenlet:

$$H\psi = (T + V)\psi = \left[-\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} + V \right] \psi = E\psi,$$

illetve

$$(9) \quad -\frac{1}{2}(\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12} \psi}{r_{12}} + V\psi = E\psi.$$

2. §. A módszer alkalmazása a H_2 -molekulára

Az előzőekben ismertetett módszert a H_2 -molekula két elektronja között fellépő, a töltések mozgásából származó mágneses kölcsönhatási energia kiszámítására alkalmaztuk. A számításhoz Wang-féle [16] közelítő sajátfüggvényeket használtuk fel:

$$(10) \quad \psi = \psi_a(1) \psi_b(2) + \psi_a(2) \psi_b(1),$$

ahol

$$\psi_a(1) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r_{a1}}, \quad \psi_b(2) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r_{b2}}.$$

Az α variációs paraméter fizikailag az egyes magok effektív magtöltését jelenti. A (10) alatti ψ_a , illetve ψ_b függvények tehát az αe_0 magtöltésű szabad hidrogénszerű atomok 1s függvényei. α értékét Wang abból a variációs feltételből határozta meg, hogy a molekula összenergiája mint α és R függvénye minimális legyen (R a két rögzítettnek vett mag közötti távolság), α és R egyidejű variálásából az $\alpha = 1,17$, $R = 1,40$ at e. értékeket kapta.

A H_2 -molekula energiájának várható értéke,

$$(11) \quad \bar{H} = \frac{\int \psi^* H \psi dV_1 dV_2}{\int \psi^* \psi dV_1 dV_2},$$

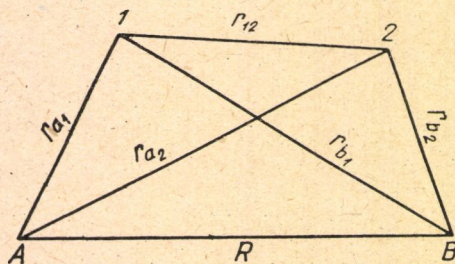
ahol H a H_2 -molekula Hamilton-operátora — α effektív magtöltés esetén a mágneses kölcsönhatást is figyelembe véve — atomi egységekben a következő lesz :

$$(12) \quad H = T + V = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} + V,$$

illetve

$$H = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} + \frac{\alpha}{R} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{\alpha}{r_{a1}} - \frac{\alpha}{r_{a2}} - \frac{\alpha}{r_{b1}} - \frac{\alpha}{r_{b2}}.$$

Az r_{a1} , r_{a2} , r_{b1} , r_{b2} , r_{12} , R jelölések az ábra alapján megérthetők.



1. ábra

A (12) egyenletet

$$(13) \quad H = H^1 + H^2$$

alakba írva, ahol H^1 mágnes tag nélküli Hamilton-operátor és

$$H^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\Delta_{12}}{r_{12}}$$

mindjárt szembetűnővé válik, hogy (12)-t (11)-be helyettesítve \bar{H} is két tagra bomlik :

$$(14) \quad \bar{H} = \bar{H}^1 + \bar{H}^2.$$

A következő feladat tehát a

$$(15) \quad \bar{H}^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\int \psi^* \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} \psi dV_1 dV_2}{\int \psi^* \psi dV_1 dV_2}$$

kifejezés kiszámítása volt. Tekintetbe véve a sajátfüggvény (10) alatti szimmetrikus kifejezését és az alábbi, elemi úton bizonyítható összefüggéseket:

$$(16) \quad I_I = \int \psi_a(1) \psi_b(2) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(1) \psi_b(2)] dV_1 dV_2 = \int \psi_a(2) \psi_b(1) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(2) \psi_b(1)] dV_1 dV_2$$

$$I_{II} = \int \psi_a(1) \psi_b(2) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(2) \psi_b(1)] dV_1 dV_2 = \int \psi_a(2) \psi_b(1) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(1) \psi_b(2)] dV_1 dV_2,$$

a (15) egyenletre a

$$(17) \quad \bar{H}^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{2(I_I + I_{II})}{\int \psi^* \psi dV_1 dV_2} = -\frac{1}{c^2} \frac{I_I + I_{II}}{1 + S^2}$$

kifejezést kapjuk, ahol

$$S^2 = \left| \int \psi_a(1) \psi_b(1) dV_1 \right|^2 = e^{-2\alpha R} \left(1 + \alpha R + \frac{1}{3} \alpha^2 R^2 \right)^2.$$

Az I_I és I_{II} integrálok, mint láthatjuk, a mágneses kölcsönhatási tag Coulomb-féle és kicserélődési integráljai. Kiszámításuk, mivel ilyen típusú kétcentrumos integrálok az irodalomban nem ismertek, meglehetősen nehéz matematikai feladatnak látszott. A hullámfüggvényeket derékszögű koordinátákban kifejezve, a differenciálásokat elvégezve, majd ezután áttérve elliptikus koordinátákra, sikerült az I_I és I_{II} integrálokat az irodalomban ismert típusú integrálokra ([1], [7], [14], [15], [17]) visszavezetni és ezek alapján I_I -et és I_{II} -t mint az α és R paraméterek függvényeit kifejezni. A számítás részleteit a függelékben közöljük.

I_I és I_{II} kapott kifejezéseibe a Wang-féle paraméterértékeket ($\alpha = 1,17$; $R = 1,40$ at. e.) helyettesítve, a következő számszerű eredményeket nyertük :

$$(18) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{c^2} I_I &= 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \\ -\frac{1}{c^2} I_{II} &= -1,37 \cdot 10^{-4} \text{ eV.} \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket (17)-be helyettesítve a mágneses kölcsönhatási energia-tagra a

$$(19) \quad T_m = \bar{H}_{\min}^2 = 8,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

végeredményt kapjuk.

Mivel a H_2 -molekula kötési energiájának spektroszkópai meghatározásának hibája $\pm 6 \text{ cm}^{-1}$, ami kereken $6 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ -nek felel meg, a kapott eredmény kb. ugyanakkora, mint a kötési energia mért értékének a hibája.³⁾

Ezért nem láttuk értelmét a Wang által elvégzett variációs számítás \bar{H}^2 figyelembevételével való újbóli elvégzésének, mert ez minden valószínűség szerint α és R_1 valamint a kötési energia (Wangnál $\mathcal{E} = 3,76 \text{ eV}$) értékét egyáltalán nem befolyásolta volna, T_m értékének pedig csak a számértékét, de nagyságrendjét nem. Próbaképpen R állandónak ($1,40 \text{ at.e.}$) tartása mellett $\alpha = 1,16$ és $\alpha = 1,18$ paraméter értékeknél is kiszámítottuk T_m -et, és arra $3,24 \cdot 10^{-4}$, illetve $2,31 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ adódott. Így látható, hogy T_m -nek $R = 1,40$ esetén valóban $\alpha = 1,17$ mellett van szélsőértéke, és a paraméter érték változtatása az eredménynek csak a számértékét változtatja meg, de nagyságrendjét nem. T_m -et az eredeti Sugiura-féle értékkel ($R = 1,64$, $\alpha = 1,00$) kiszámolva $8,68 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ -et kaptunk, vagyis (19)-cel gyakorlatilag megegyező eredményt.

Fel kell még hívnunk a figyelmet arra a látszólagos ellentmondásra, hogy bár a hullámmechanika szerint a hidrogénszerű atom $1s$ elektronjainak mágneses momentuma zérus, s így az volna várható, hogy a pályamomentumaik közötti mágneses kölcsönhatási energia is zérussal egyenlő, T_m -re mégis zérustól eltérő érték adódott. Nem szabad azonban elfeledkezni arról, hogy az a tény, hogy a hidrogénszerű atom $1s$ elektronjának nincs mágneses pályamomentuma, nem azt jelenti, hogy ez az elektron a maghoz képest nem mozog, hanem csupán azt, hogy a gömbszimmetrikus saját függvénynek megfelelően egy r sugarú gömb felületén mindenütt egyforma valószínűséggel található meg, s így a mozgásból származó mágneses momentumnak makroszkópikus időtartamra vett átlaga zérus. Most képzeljünk el két, ugyanazon a gömbfelületen úgy mozgó töltést, hogy a mozgásukból származó mágneses momentumaiknak pl. 1 sec -ra eső átlaga zérust ad. Ez pl. elérhető úgy, hogy mind a két töltés egymás után halad ugyanazon a főkörön, és az időegység alatt mindketten mondjuk ötvenszer balról-jobbra és ötvenszer az ellenkező irányban kerülnek meg a gömböt. Nyilvánvaló, hogy mágneses momentumaiknak 1 sec -ra eső átlaga zérus lesz. Tételezzük még fel, hogy sebességeik azonos nagyságúak, irányváltoztatásaik azonos fázisban történnek és egymástól félkörnyi távolságra haladnak ugyanabban a körforgási irányban. Mivel ekkor a sebesség vektorai által bezárt szög

³⁾ A H_2 -molekula kötési energiája

$$(20) \quad \mathcal{E} = D_0^{\circ} + G_0^{\circ},$$

ahol D_0° a disszociációs energia, G_0° pedig a zéruspont-energia. $D_0^{\circ} = 36100 \pm 40 \text{ cm}^{-1}$, $G_0^{\circ} = 2174 \text{ cm}^{-1}$ [2], illetve Hersberg [6] szerint $D_0^{\circ} = 36100 \pm 6 \text{ cm}^{-1}$. Így $\mathcal{E} = 38274 \pm 40 \text{ cm}^{-1}$ (illetve $\pm 6 \text{ cm}^{-1}$) $\approx 4,74 \text{ eV}$. Megjegyezzük, hogy az irodalomban általában két tizedes pontossággal szokás megadni a H_2 -molekula kötési energiájának számított értékét.

180°, a $\cos \vartheta = -1$ relációból (2) alapján az előjel-megállapodást figyelembe véve következik, hogy a közöttük fellépő mágneses kölcsönhatási energia zérustól eltérő, a sebesség négyzetével és a töltésekkel arányos pozitív érték lesz, és ez az érték fenti feltételek mellett időben állandó. Így ezen egyszerű modell alapján megérthető, hogy noha az 1s elektronok mágneses momentumainak időbeli átlaga zérus, a közöttük fellépő mágneses kölcsönhatási energia időbeli átlaga mégis lehet zérustól eltérő.

A két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatási energia a H_2 -molekulában a klasszikus képlet alapján is megbecsülhető. A

$$T_m = -\frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{r_{12}} \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2$$

összefüggésben r_{12} átlagértékére $\tilde{r}_{12} = R = 1,40$ at. e.-t, a sebességek átlagértékére $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 = 1$ at. e.-t (az elektron sebessége az első Bohr-féle pályán), $c = 137,3$ -at és $\cos \vartheta$ átlagára $\cos \vartheta = -1$ -et (vagyis feltételezve, hogy az elektronok mintegy kitérnek egymás elől (lásd: [4]) helyettesítve:

$$\tilde{T}_m = -\frac{1}{c^2} \frac{e_0^2}{\tilde{r}_{12}} \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \overline{\cos \vartheta} = -\frac{1}{(137,3)^2} \cdot \frac{1^2}{1,4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 3,77 \cdot 10^{-5} \text{ at} \cdot \text{e} \approx \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

adódik. Mint látható, ez az érték mind nagyságrendileg, mind előjelben megegyezik T_m hullámmechanikai úton számított értékével.

A (19) alatt kapott értéknek, megfelelő kísérleti adatok hiányában, a tapasztalattal való közvetlen összehasonlítása nem lehetséges. A 10^{-3} eV nagyságú energiáknak 1 mm-es mikrohullámok felelnek meg, a H_2 -molekula mikrohullámszinképe viszont az irodalomban nem ismeretes [4].

A kapott energia-tag kísérleti ellenőrzésére elvileg a következő két, gyakorlatilag még keresztülvihetetlen út képzelhető el. Egyrészt ha sikerülne a H_2 -molekula kötési energiáját 1 cm^{-1} (10^{-4} eV) pontossággal megmérni és a James és Coolidge-féle számítást a hullámfüggvény [7] további tagjainak figyelembevételével a kötési energia értéke konvergenciahelyének 10^{-4} -pontosságú meghatározásáig tovább folytatni, az így nyert két érték különbségének a fele (a spin-spin mágneses kölcsönhatási energia értékét (19)-cel azonosnak véve és a magspinekkal való mágneses kölcsönhatási energiákat elhanyagolva) éppen az előzőekben kiszámított értéket kellene, hogy adja.

Másrészt ismeretes, hogy a H_2 -molekula $^1\Sigma$ alapállapotának igen kis mértékű Zeeman-felbomlása — mivel a két elektron teljes (pálya + spin) impulzusmomentumának időbeli átlaga, s így az elektronok mágneses momentumának átlaga is zérus — csak a molekula forgó mozgása által okozott mágneses momentum és (H_2 esetén) a magspinekkel összefüggő mágneses momentumok következménye [6]. Ramsey [13] a H_2 -molekula forgó mozgásával kapcsolatos Zeeman-felbomlás egyes nívói közötti átmeneteknek megfelelő frekvenciákat észlelt $H = 3600$ oersted erősségű térben a $j = 1$ rotációs nívóban a molekulásugaras mágneses rezonancia-módszer [6] segítségével a rádiófrekvenciás tartományban $\approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ -nél (10^{-8} eV energia).

Kellogg, Rabi, Ramsey és Zaccharias [8] H_2 -szinkép hiperfinom struktúrájának Zeeman-nívói közötti átmeneteket észlelték $H = 10000$ oersted

erősségű térben a $j = 1$ rotációs nívóban $\approx 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ -nél ($\approx 10^{-7} \text{ eV}$). Az észlelt színek pontosabb értelmezéséhez szükségessé vált többek között a magspinek közötti mágneses kölcsönhatási energia külső térrel való kölcsönhatásából származó energiatagnak a figyelembevétele is [6]. Erre az energia-tagra a színeképekből a következő kifejezés vezethető le [8]:

$$(21) \quad W_s^{(1)} = a_{1Tj} \frac{\tilde{\mu}_1^2}{r^3} [3 M_j^2 - j(j+1)] [3 M_T^2 - T(T+1)];$$

itt a_{1Tj} számszerű konstans, r magtávolság, $\tilde{\mu}_1 = g_1 T \mu_{0N}$, g_1 számszerű konstans, μ_{0N} a magmagneton, T a két mag eredő magspinje, M_T ennek a tér irányába eső komponense, j a molekula rotációjából származó impulzusmomentum, M_j ennek a tér irányába eső komponense.

Ahhoz, hogy a fenti Zeeman-nívók közötti átmenetek energiái a (19) alatti energiaértékekkel azonos nagyságrendűek legyenek, azokat a mágneses tér megfelelő változtatásával 10 cm^{-1} -es ($\approx 10^3 \text{ eV}$), tehát a mikrohullám tartományba eső energiákká kellene növelni. Mivel az egyes Zeeman-átmeneteknek megfelelő energia a külső mágneses térerősséggel egyenesen arányos, ehhez a fenti adatok szerint 10^8 – 10^9 oersted erősségű mágneses tér lenne szükséges. (19) ily módon való ellenőrzése tehát megvalósíthatatlan. Ezenkívül, mivel a Zeeman-jelenségénél a mágneses momentum tér irányába eső komponensének időbeli átlagértéke lép kölcsönhatásba a külső térről, a (21)-hez hasonló energia-tag esetünkben minden valószínűség szerint eltűnik, s így a tárgyalt kölcsönhatás a H_2 -molekula alapállapotának mikrohullámú Zeeman-átmenetek által létrehozott spektrumából sem volna kimutatható.

A (21) összefüggés alapján azonban, kísérleti adatokból kiindulva közvetve megbecsülhetjük (19) értékét. Ha a (21) képletet közvetlenül a magspin-magspin mágneses kölcsönhatási energiával tekintjük azonosnak a H_2 -molekulában, vagyis elhanyagoljuk a magspinek közötti mágneses kölcsönhatási energiának a külső tér okozta esetleges megváltozását, az elektronspin-elektronspin mágneses kölcsönhatási energiát ennek 1847²-szeresének és az utóbbi értékét az elektronok mozgásából származó mágneses kölcsönhatási energiával azonosnak vesszük, a következő egyszerű számítás végezhető el: a (21) képletbe $j = 1$ -et, $M_j = 1$ -et, $T = 1$ -et (parallel magspinek), $M_T = 1$ -et

helyettesítve, és felhasználva Kellog és munkatársai mérési adatait $\left(a_{1Tj} = \frac{2}{5}, H'' = \frac{\tilde{\mu}_1}{r^3} = 34,1 \text{ oersted}, \tilde{\mu}_1 = 1,38 \Sigma 10^{-23} \text{ Gauss cm}^3 \right)$ kapjuk:

$$\begin{aligned} W_s^{(1)} &= \frac{2}{5} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 34,1 [3 - 1 \cdot (1 + 1)] [3 - 1 \cdot (1 + 1)] = \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 34,1 = 1,88 \cdot 10^{-22} \text{ erg} = 1,17 \cdot 10^{-10} \text{ eV}. \end{aligned}$$

A fentiek alapján

$$T_m = 1,17 \cdot 10^{-10} \cdot 1,847^2 \cdot 10^6 = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ eV.}$$

Látható, hogy ez az érték mind előjelben, mind nagyságrendben megegyezik a (19) elméleti úton számított értékkel.

Függelék

A H_2 -molekula két elektronja között fellépő mágneses kölcsönhatási energia kiszámításához szükség van az

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \psi_a(1) \psi_b(2) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(1) \psi_b(2)] dV_1 dV_2 = \\ (22) \quad &= \int \psi_a(2) \psi_b(1) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(2) \psi_b(1)] dV_1 dV_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{II} &= \int \psi_a(1) \psi_b(2) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(2) \psi_b(1)] dV_1 dV_2 = \\ (23) \quad &= \int \psi_a(2) \psi_b(1) \frac{\Delta_{12}}{r_{12}} [\psi_a(1) \psi_b(2)] dV_1 dV_2 \end{aligned}$$

integrálok meghatározására, ahol

$$\psi_a(i) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r_{ai}}; \quad \psi_b(i) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r_{bi}} \quad (i = 1, 2)$$

és

$$\Delta_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}.$$

Az integráljel alatt végezzük el a differenciálásokat, és azután vezessük be a

$$(24) \quad \mu_i = \frac{r_{ai} + r_{bi}}{R}; \quad \nu_i = \frac{r_{ai} - r_{bi}}{R}; \quad \varphi_i \quad (i = 1, 2)$$

elliptikus koordinátákat. Az $1/r_{12}$ kifejezést *F. Neumanntól* származó sorral helyettesítjük [11]:

$$(25) \quad \frac{1}{r_{12}} = \frac{2}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k D_k^j P_k^j(\mu_1) Q_k^j(\mu_2) P_k^j(\nu_1) P_k^j(\nu_2) \cos j(\varphi_2 - \varphi_1);$$

itt $P_k^j(\nu_i)$ az elsőfajú, és $Q_k^j(\mu_i)$ a másodfajú hozzárendelt Legendre-függvények [9]. A (24) és (25) helyettesítésével az integrálok a következő alakúak lesznek:

$$I_1 = \frac{\alpha^3 \varrho^5}{32 \pi^2 c^2} \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\varrho(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)} \{[(\mu_1^2 - 1)(1 - \nu_1^2)(\mu_2 - 1)(1 - \nu_2^2)]^{1/2} \times$$

$$\times \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2 - \mu_1 \nu_1 + \nu_2 \mu_2 - 1 \} (\mu_1 - \nu_1) (\mu_2 + \nu_2) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k D_k^j P_k^j \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_k^j \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_k^j(\nu_2) P_k^j(\nu_1) \cos j(\varphi_2 - \varphi_1) d\mu_1 d\mu_2 d\nu_1 d\nu_2 d\varphi_1 d\varphi_2$$

és

$$I_{II} = \frac{\alpha^3 \varrho^5}{32 \pi^2 c^2} \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-\varrho(\mu_1 + \mu_2)} \{ [(\mu_1^2 - 1)(1 - \nu_1^2)(\mu_2^2 - 1)(1 - \nu_2^2)]^{1/2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_1 + \mu_2 \nu_2 + 1 \} (\mu_2 - \nu_1) (\mu_2 + \nu_2) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k D_k^j P_k^j \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_k^j \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_k^j(\nu_1) P_k^j(\nu_2) \cos j(\varphi_1 - \varphi_2) d\mu_1 d\mu_2 d\nu_1 d\nu_2 d\varphi_1 d\varphi_2;$$

ahol $\alpha R = \varrho$ és

$$P_k^j \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = \begin{cases} P_k^j(\mu_1), & \text{ha } \mu_2 > \mu_1, \\ P_k^j(\mu_2), & \text{ha } \mu_2 < \mu_1; \end{cases} \\ Q_k^j \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = \begin{cases} Q_k^j(\mu_1), & \text{ha } \mu_2 > \mu_1 \\ Q_k^j(\mu_2), & \text{ha } \mu_2 < \mu_1 \end{cases}$$

Az I_I integrál

$$(26) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) H_k(m, n, \varrho) G_k(m, \varrho) K_k(n, \varrho)$$

és

$$(27) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{[k(k+1)]^2} H_k^1(m, n, \varrho) G_k^1(m, \varrho) K_k^1(n, \varrho)$$

alakú sorok összegével egyenlő. Az I_{II} integrált pedig

$$(28) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) H_k(m, n, \varrho) R_k(n) R_k(m)$$

és

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{[k(k+1)]^2} H_k^1(m, n, \varrho) R_k^1(n) R_k^1(m)$$

alakú sorok összegeként kapjuk.

A (26) és (28) összegekben szereplő mennyiségek jelentése a következő:

$$H_k(m, n, \varrho) = \int_1^{\infty} Q_k(\mu_1) \mu_1^m e^{-\varrho \mu_1} d\mu_1 \int_1^{\mu_1} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2^n P_k(\mu_2) d\mu_2 + \\ + \int_1^{\infty} Q_k(\mu_1) \mu_1^n e^{-\varrho \mu_1} d\mu_1 \int_1^{\mu_1} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2^m P_k(\mu_2) d\mu_2;$$

$$R_k(n) = \int_{-1}^1 v^n P_k(v) dv; \quad G_k(n, \varrho) = \int_{-1}^1 v^n e^{-\varrho v} P_k(v) dv;$$

$$K_k(n, \varrho) = \int_{-1}^1 v^n P_k(v) e^{\varrho v} dv.$$

Ezeknek az integráloknak kiszámítása az irodalomból ismert ([1], [7], [14], [15], [17]).

A (27) és (29) összegekben szereplő kifejezések jelentése a következő:

$$H_k^l(m, n, \varrho) = \int_1^\infty \mu_1^m \mu_2^n e^{-\varrho(\mu_1 + \mu_2)} \sqrt{(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)} P_k^l\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) Q_k^l\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) d\mu_1 d\mu_2;$$

$$G_k^l(n, \varrho) = \int_{-1}^1 e^{-\varrho v} v^n \sqrt{1 - v^2} P_k(v) dv;$$

$$K_k^l(n, \varrho) = \int_{-1}^1 e^{\varrho v} v^n \sqrt{1 - v^2} P_k(v) dv;$$

$$R_k^l(n) = \int_{-1}^1 v^n \sqrt{1 - v^2} P_k^l(v) dv.$$

Ezeket az integrálokat a Legendre-polinomok tulajdonságainak felhasználásával az előző típusú integrálokra lehet visszavezetni. Végül az I_1 és I_{11} integrálokra kapjuk, hogy

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 = \frac{\alpha^3 \varrho^5}{32c^2} & \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 4(2k+1) [tr(H_k(2, 2, \varrho) - H_k(2, 0, \varrho) - \right. \\ & - H_k(0, 2, \varrho) - H_k(0, 0, \varrho)) + t(s-p)(H_k(1, 0, \varrho) - H_k(1, 2, \varrho)) + \\ & + (w(s-p) - l(s+p)) H_k(1, 1, \varrho) - r(l+t) H_k(0, 1, \varrho)] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{[k(k+1)]^2} [p^1(l^1 H_k^1(1, 1, \varrho) + t^1 H_k^1(1, 0, \varrho)) - \\ & - r^1(l^1 H_k^1(1, 0, \varrho) + t^1 H_k^1(0, 0, \varrho))] \} \end{aligned} \right.$$

Itt

$$\begin{aligned} l &= K_k(0, \varrho); & t &= K_k(1, \varrho); & w &= K_k(2, \varrho); \\ p &= G_k(0, \varrho); & r &= G_k(1, \varrho); & s &= G_k(2, \varrho); \end{aligned}$$

és $t^1 = K^1(1, \varrho), \dots: w^1, l^1, p^1, r^1, s^1$ jelentése hasonló. Továbbá

$$(31) \quad \begin{aligned} T_{11} = \frac{\alpha^3 \varrho^5}{c^2} & \left\{ \frac{1}{50} H_3(0, 0, \varrho) - \frac{1}{10} H_2(1, 1, \varrho) - \frac{23}{150} H_1(0, 0, \varrho) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} H_1(0, 2, \varrho) + \frac{1}{6} H_0(1, 1, \varrho) \right\}. \end{aligned}$$

Annak érdekében, hogy megállapítsuk, hány tagot kell az I_1 sorában figyelembe venni, megbecsültük a (26) alakú sorok maradékát. A $G_k(n, \varrho)$ integrált a következőképpen becsülhetjük meg: felhasználva, hogy $P_k(v)$ ortogonális minden k -nál alacsonyabb fokú polinomra, és hogy e^{-av} sora,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^j}{j!} v^j,$$

egyenletesen konvergens, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{+1} v^n e^{-av} P_k(v) dv \right| &< \left| \int_{-1}^{+1} v^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^j}{j!} v^j P_k(v) dv \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^{+1} \sum_{j=k+n}^{\infty} \frac{(-\alpha)^j}{j!} v^{l-n} P_k(v) dv \right| \leq \int_{-1}^1 \sum_{j=k+n}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} dv < \\ &< 2 \frac{\alpha^{k+n}}{(k+n)!} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{k+n+1}} < 2 \frac{\alpha^{k+n}}{(k+n)!}. \end{aligned}$$

A $H_k(n, m, \varrho)$ függvényt a következőképpen becsülhetjük meg. Tekintsük a

$$(32) \quad \int_1^{\infty} Q_k(\mu_1) \mu_1^m e^{-\varrho \mu_1} d\mu_1 \int_1^{\mu_1} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2^n P_k(\mu_2) d\mu_2$$

integrált. Felhasználva a Legendre-függvényekre vonatkozó aszimptotikus formulát (lásd: [9]), azaz a $\xi > 1$ esetén érvényes

$$|Q_n(\xi)| < c_0 \frac{1}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^{n+1}} \cdot \frac{1}{2(1 + \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \xi^2)}$$

relációt, ahol $c_0 = n! 2^{n+1}/(2n+1)!!$ és $\sqrt{z} = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}$, a

Stirling-formula segítségével

$$(33) \quad |Q_n(\xi)| < (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^{n+1} \cdot 2(1 + \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \xi^2)},$$

ahol $\xi > 1$ és $n > N(\varepsilon)$.

A (32) integrálban szereplő $P_n(\xi)$ -re a következő aszimptotikus formula áll fenn:

$$(34) \quad |P_n(\xi)| < \frac{1 + \varepsilon'}{\sqrt{1 - z} \sqrt{\pi n z^n}},$$

ha $n > N(\varepsilon')$. A (28) integrálban $\delta > 1$ értékét olyannak választjuk, hogy teljesüljön

$$\left| \int_1^{\delta} Q_k(\mu_1) e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m d\mu_1 \int_1^{\mu_1} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2^n P_k(\mu_2) d\mu_2 \right| < 1.$$

Másrészt

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m Q_k(\mu_1) d\mu_1 \int_1^{\mu_1} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2^n P_k(\mu_2) d\mu_2 \right| < \\ < \left| \int_{\delta}^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m Q_k(\mu_1) d\mu_1 \int_1^{\infty} e^{-\varrho \mu_2} \mu_2 P_k(\mu_2) d\mu_2 \right|.$$

Az itt szereplő integrált külön vizsgálva (31) és (32) alapján a következőt nyerjük :

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m Q_k(\mu_1) d\mu_1 \right| \leq \\ \leq \int_{\delta}^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m \frac{c_0}{(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 1})^{k+1}} \frac{1}{2(1 + \mu_1 \sqrt{\mu_1^2 - 1} - \mu_1^2)} d\mu_1 < \\ < \int_{\delta}^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m \frac{2 \sqrt{\frac{\pi}{k}}}{(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^{k+1}} \frac{1}{2(1 + \mu_1 \sqrt{\mu_1^2 - 1} - \mu_1^2)} d\mu_1 = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \frac{2 \sqrt{\frac{\pi}{k}}}{(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^{k+1}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2(1 + \mu_1 \sqrt{\mu_1^2 - 1} - \mu_1^2)} e^{-\varrho \mu_1} \mu_1^m d\mu_1 \leq \\ \leq \sqrt{\frac{\pi}{k}} \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^m + \frac{m!}{\varrho^{m+1}} \right] \frac{1}{(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^{k+1}},$$

és az előbbihez hasonlóan

$$\int_1^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_2^n P_k(\mu_2) d\mu_2 \leq \int_1^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_2^n \frac{(\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 - 1})^k}{2(1 + \mu_2 \sqrt{\mu_2^2 - 1} - \mu_2^2)} d\mu_2 \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_1^{\infty} e^{-\varrho \mu_1} \mu_2^n \frac{(2\mu_2)^k}{(1 + \mu_2 \sqrt{\mu_2^2 - 1} - \mu_2^2)} d\mu_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^n 4^k + \frac{(k+n)! 2^k}{\varrho^{k+n+1}} \right] \\ H_k(n, m, \varrho) < \frac{2}{k} \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^m + \frac{m!}{\varrho^{m+1}} \right] \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^n 4^k + \frac{2^k}{\varrho^{k+n+1}} (k+n)! \right] < \\ < \frac{2}{k} \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^m + \frac{m!}{\varrho^{m+1}} \right] \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^n \frac{2^k}{\varrho^{k+n+1}} \right] (k+n)!.$$

Tehát

$$(2k + 1) H_k(m, n, \varrho) G_k(m, \varrho) K_k(n, \varrho) < C_k \frac{(k + n)!}{(k - n)! (k - m)!},$$

ahol

$$C_k = 2^1 (2^{k-n})^2 \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^m + \frac{m!}{\varrho^{m+1}} \right] \left[\left(\frac{2}{\varrho} \right)^n 2^k + \frac{2^k}{\varrho^{k+n+1}} \right]$$

tehát a (24) és (25) végtelen sorok konvergensek.

A numerikus számítások elvégzésénél az I_1 integrál végtelen sorában öt tagot vettünk figyelembe.

Hálás köszönetet mondunk Schay Géza akadémikusnak alapos, munkánkat nagyban elősegítő kritikájáért és értékes tanácsaiért, Mátrai Tibor kandidátusnak, aki figyelmünket a problémakörre felhívta, annak kidolgozását megkezdte és az egész munkánk során hasznos tanácsaival támogatott, Freud Géza kandidátusnak a probléma matematikai részének megoldását nagyban elősegítő értékes tanácsaiért és Berencz Ferenc adjunktusnak ugyancsak a probléma matematikai részét elősegítő hasznos tanácsaiért.

IRODALOM

- [1] J. H. BARTLETT: „Orbital valency”. *Physical Reviews* 37 (1931) 507—531.
- [2] A. H. BEUTLER—H. O. JÜNGER: „Die Bindungsfestigkeiten im H_2 Molekül”. *Zeitschrift für Physik* 101 (1936) 304—310.
- [3] BUDÓ A.: *Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953. (p. 143.).
- [4] W. GORDY—W. V. SMITH—R. F. TRAMBULO: *Microwave spectroscopy*. Wiley, New-York — Chapman and Hall, London; 1953.
- [5] H. HELLMANN: *Einführung in die Quantenchemie*. Deuticke, Leipzig—Wien, 1937. (p. 84, 124—134.).
- [6] G. HERZBERG: *Molecular spectra and molecular structure. I. Spectra of diatomic molecules*. van Nostrand, Toronto—New-York—London, 1950. (p. 60, 298—300, 308—314.).
- [7] H. M. JAMES—A. S. COOLIDGE: „The ground state of the hydrogen molecule.” *Journal of Chemical Physics* 1 (1933) 825—841.
- [8] J. M. B. KELLOGG—L. I. RABÍ—N. F. RAMSEY JR.—I. R. ZACHARIAS: „An electrical quadrupole moment of deuteron.” *Physical Reviews* 57 (1940) 677—695.
- [9] J. LENSE: *Kugelfunktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950. (p. 25, 61, 59, 68.).
- [10] N. F. MOTT—H. N. SNEDDON: *Wave mechanics and its applications*. Oxford University Press, Oxford, 1948. (p. 336—337.).
- [11] F. NEUMANN: *Theorie der Potentials*. Teubner, Leipzig, 1887. (p. 326—342.).
- [12] NOVOBÁTZKY K.—NEUGEBAUER T.: *Elektrodinamika és optika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952. (p. 87—88, 161—164.).
- [13] N. F. RAMSEY JR.: „The rotational magnetic moments of H_2D_2 and HD molecules.” *Physical Reviews* 58 (1940) 226—236.
- [14] N. ROSEN: „The normal state of the H_2 molecule.” *Physical Reviews* 38 (1931) 2099—2114.
- [15] Y. SUGIURA: „Über die Eigenschaften des Wasserstoffmoleküls im Grundzustande.” *Zeitschrift für Physik* 45 (1927) 484—492.
- [16] S. C. WANG: „The problem of the normal hydrogen molecule in the new quantum mechanics.” *Physical Reviews* 31 (1928) 579—586.
- [17] C. ZEHNER—V. GUILLEMIN JR.: „The B-state of the hydrogen molecule.” *Physical Reviews* 34 (1929) 999—1009.

МАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МОЛЕКУЛЕ H_2 , ПРОИСХОДЯЩЕЕ ИЗ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ

Я. Ладзык и А. Чукаш

Резюме

Авторы дают в первой части своей работы простой вычислительный метод для учета в волновой механике магнитного взаимодействия, происходящего из движения двух электронов. Считая классическую энергию магнитного взаимодействия (1) (см. [10], [12]) как обычно кинетической энергией и образуя общие импульсы, кинетическая энергия представится как функция общих импульсов в виде выражения (5).

Применяя последовательно операторы импульса волновой механики можно выразить скалярное произведение $p_1 p_2$ как оператор (см. уравнение после (5)). Подставляя их в выражение T , переходя к атомной системе мер, учитывая соглашение относительно знаков (см. [10]) и пренебрегая вторым членом знаменателя, как очень малым, получаем уравнение (8).

В дальнейшем соавторы, пользуясь приближенными собственными функциями Ванга (см. [16]), вычислили T_m в случае молекулы H_2 . На основе результата Ванга [16] можно показать, что математическое ожидание величины T_m в случае молекулы H_2 дается равенством (17).

Вычисление интегралов I_I и I_{II} , поскольку в литературе интегралы подобного типа встречаются, казалось довольно трудной задачей. Выражая волновые функции в прямоугольных координатах, выполняя дифференцирования, переходя после этого к эллиптическим координатам и выражая r_{12} тоже в эллиптических координатах рядом, указанным Нейманом, авторам удалось привести интеграл I_I и I_{II} к известным типам интегралов (см. [1], [7], [14], [15], [17]) и выразить этим путем J_I и J_{II} как функции параметров α и R . Выкладки авторы приводят в дополнении к статье.

Подставляя в полученные для I_I и I_{II} выражения значения параметров $\alpha = 1,17$, $R = 1,40$ а. е. получился окончательный результат

$$T_m = 8,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV.}$$

Это приблизительно такая же величина, что и погрешность спектроскопического определения связывающей энергии молекулы H_2 , равная $\pm 6 \text{ cm}^{-1}$ (см. [2]).

Выше вычисленное значение T_m в настоящее время невозможно непосредственно опытно контролировать из-за причин, подробно изложенных в статье. Однако, Келлог и его соратники (см. [6], [8]) с помощью метода магнитного резонанса молекулярных пучков приближенно измерили энергию магнитного взаимодействия спин ядра — спин ядра в молекуле H_2 . Предполагая, что энергия магнитного взаимодействия спин электрона — спин электрона в молекуле H_2 в 1847^2 раз больше последней и что энергия магнитного взаимодействия, происходящая из движения электронов, равна энергии магнитного взаимодействия спин электрона — спин электрона, для величины T_m получилось $3,11 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$. — величина того же порядка, что и вышесказанная.

MAGNETIC INTERACTION ARISING FROM THE MOTION OF TWO ELECTRONS IN THE H_2 MOLECULE

J. LADÍK and Mrs. A. CSUKÁS

Summary

In the first part of the paper a simple wave mechanical method is described to account for the magnetic interaction energy arising from the motion of two electrons. Regarding the known classical magnetic interaction energy (1) [10], [12] in the usual way as kinetic energy and having formed the canonical conjugated momenta, (5) is obtained describing the kinetic energy as a function of the canonical conjugated momenta. Consistent application of the wave mechanical momentum operators leads to an expression for the operator of the scalar product (see equation next to (5)). Substitution in the expression of T with the use of the system of atomic units, taking account of the convention regarding signs [10], and neglecting the second very small member of the denominator, equation (8) is obtained.

In the following the T_m value of the H_2 molecule was calculated with the aid of Wang's approximating eigenfunctions [16]. Following Wang's method of calculation [16] the expected value of T_m , in the case of the H_2 molecule, is given by equation (17). Expressing the wave functions in rectangular coordinates, carrying out differentiation, thereafter switching to elliptical coordinates and, in addition, expressing r_{12} in elliptical coordinates by means of the series given by Neumann, the authors succeeded in obtaining the integrals I_I and I_{II} in a form known in the literature [1], [7], [14], [15], [17] and on this basis to express I_I and I_{II} as functions of the parameters α and R . The appendix to the paper contains the details of the calculation.

Substituting the values of the Wang-parameters ($\alpha = 1,17$, $R = 1,40$ at. u.) in the expressions obtained for I_I and I_{II} one finally arrives at

$$T_m = 8,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV.}$$

This value is approximately equal to the error of the spectroscopically determined binding energy of the H_2 molecule, which is $\pm 6 \text{ cm}^{-1}$ [2]. For reasons dwelt upon in the body of this paper it is as yet not possible to control the value of T_m given above by direct experimental methods. But the magnetic interaction energy of the two nuclear spins in the H_2 molecule has been approximately measured by Kellogg and his coworkers [6], [8], by means of the molecular beam magnetic resonance method. Assuming the magnetic interaction energy of the two electron spins in the H_2 molecule to be 1847^2 times the above mentioned nuclear magnetic interaction energy, and the magnetic interaction energy arising from the motion of the two electrons to be equal to the magnetic interaction energy of the two electron spins, $T_m = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ was obtained, which is of the same order of magnitude, as the calculated value.

ÖRVÉNYÁRAMVESZTESÉGEK EGYENÁRAMÚ ELŐTELÍTÉS ESETÉN

CZIPSZER JÁNOS és TUSCHÁK RÓBERT¹⁾

Bevezetés

Villamosgépek forgórésze egyes esetekben szilárdsági vagy technológiai szempontok miatt lemezelés nélküli tömör acélból készül. (Turbógenerátorok, különleges célra készült aszinkron motorok, szervomotorok stb.) Ha a tömör forgórészt átjáró mágnesmező az időben nem változik, tömör és lemezelt forgórészű gépek működése között nincs különbség (pl. turbógenerátorok állandósult szimmetrikus üzeme). A forgórész mágnesmezejének változása-kor a forgórész tömör acéltestében örvényáramok keletkeznek, amelyek hatással vannak a gép működésére. Így például meghibásodásokból származó vagy szándékosan előidézett hálózati aszimmetria esetén (egyfázisú rövidzárlat, »sánta« üzem stb.) a hálózatot tápláló turbógenerátorok állórész-árama aszimmetrikussá válik, pozitív sorrendű összetevőn kívül negatív sorrendűt is tartalmaz, amelynek mágnesmezeje a tömör forgórészben kétszeres frekvenciájú örvényáramot indukál. Az aszimmetrikus üzem hosszabb ideig csak az esetben tartható fenn, ha a forgórészben keletkező örvényáram-veszteségek nem lépik túl a melegedés szempontjából megengedhető értéket. A veszteségek, amelyeknek meghatározása így elsőrendű fontosságú, a negatív sorrendű áram ismeretében a negatív sorrendű ellenállás segítségével számíthatók. A negatív sorrendű ellenállást e mérésekből lehet meghatározni, oly módon, hogy definiált körülmények között a gépben negatív sorrendű mágnesmezőt létesítünk, és mérjük a felvett teljesítményt.

Ha a vas permeabilitása a mágneses térerősségtől független lenne, akkor az örvényáram-veszteséget csak az indukált mágnesmező amplitúdója határozná meg, s nem függne a vastestet átjáró egyéb egyenáramú mágnesmezőktől. A valóságban a vas permeabilitása a térerősség függvénye, ezért az örvényáram-veszteség az indukáló mágnesmező azonos értéke mellett erősen függ az egyenáramú előtelítéstől. Így az előbb említett különböző módszerekkel végzett negatív sorrendű ellenállásmérésekből azonos negatív sorrendű áramerősség esetén is különböző eredményeket kapunk, mert minden eljárásnál más és más előtelítés keletkezik a forgórészben.

Az előtelítés hatásának tisztázása és a különböző mérési eredmények összehasonlításának és helyes mérési módszerek kialakításának érdekében kívánatos, hogy mindazon esetekben, amikor ez lehetséges, elméleti vizsgálatokat végezzünk, még abban az esetben is, ha a vizsgálatok feltevélei bizonyos mértékben eltérnek a valóságos viszonyoktól. A következőkben olyan esetre vizsgáljuk az előtelítés hatását, amikor egy tömör forgórészű gép forgórészében a kerület mentén szinuszosan eloszló egyenáramú

¹⁾ A Klement Gottwald Villamossági Gyár dolgozója.

mágnesmezőkre azonos nagyságú körforgó mező szuperponálódik. Gyakorlatilag ez az eset fordul elő turbógenerátorok kétsarkú rövidzárásiban végrehajtott negatív sorrendű ellenállás mérésénél. Ez esetben a szinkron forgó gép állórésze kétsarkúlag rövidre van zárva, a forgórész egyenárammal van gerjesztve, a veszteségek a gép forgatásához szükséges mechanikai teljesítményből határozhatók meg. A forgórész-egyenáram által létesített pozitív sorrendű térerősség-eloszlás térbeli amplitudója a forgórész felületén jó közelítéssel a negatív sorrendű mező amplitudójával egyenlő.

A negatív sorrendű ellenállás-mérés másik módszere a gerjesztett szinkron forgó vagy esetleg álló gépen tiszta negatív sorrendű árammal történő mérés. Ez esetben nincs előtelítés. A következőkben azt kívánjuk megállapítani, hogy a kétféle módszerrel mért értékek között elméletileg milyen kapcsolat áll fenn.

Színuszos időbeli változású, pulzáló (vagy körforgó) mágnesmezők által tömör vastestben előidézett örvényáram-veszteségek számítása végtelen féltérre, négyzög- és körkeresztmetszetű tekercsre és hengeres forgórészre ismeretes az esetben, ha a vas permeabilitása állandó (lásd: [2], [3]). A térerősségtől függő permeabilitás hatásának figyelembevételére számos közelítő módszer ismeretes (lásd: [4], [5]), a kérdést exaktul megoldani azonban csak arra az idealizált esetre sikerült, amikor a mágnesezési görbe az 1. ábrán látható alakú (lásd: [1]). A továbbiakban G és F . *Haberland* (lásd: [1]) módszerét alkalmazzuk a következő feltételek mellett. A forgórész kerülete mentén mind az egyenáramú telítő, mind a váltakozóáramú mező színuszosan oszlik el, és a kettő amplitudója megegyezik. Jelöljük α -val a forgórész palástjának egyik alkotóján és a tengelyen átfektetett félsík irányszögét valamilyen rögzített félsíktól mérve. Az egyenáramú előtelítéstől származó mágneses térerősség a kerületen $-H_0 \sin \alpha$, a váltakozóáramú mágneses térerősség pedig $H_0 \sin(\omega t + \alpha)$. A jelölést úgy választottuk, hogy a két térerősség eredője,

$$H_0 \{\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha\},$$

$t = 0$ -ra éppen 0 -t adja. A behatolási mélység a forgórész sugarához képest oly kicsiny, hogy a forgórész végtelen féltérnek tekinthető. Ahelyett, hogy időben és a kerületen változó H -val számolnánk, a következő közelítéssel élünk: minden rögzített α értékre meghatározzuk azt az 1 cm^2 -re eső veszteséget, amelyet a féltér határfelületének minden pontjában $H_0 \{\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha\}$ nagyságú előtelítés okozza, majd az így kapott, α -tól függő veszteségértékeknek az integrálközepét vesszük a $(0, 2\pi)$ intervallumon. Szimmetria-okokból elég a $(0, \pi/2)$ intervallumra szorítkozni. Az így kapott érték az állandó permeabilitás feltételezésén alapuló számítások tanúsága szerint jó közelítéssel megadja a veszteség térbeli és időbeli átlagát. A mágneses térerősségnek csak a tangenciális összetevőjét vesszük figyelembe.

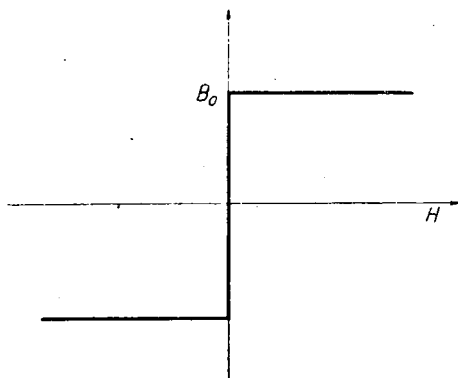
A veszteség meghatározása

A bevezetésben említett közelítő feltevések alapján problémánk pontosan a következőképpen fogalmazható meg.

Az $x \geq 0$ féltérrel homogén $\sigma \text{ 1}/\Omega \text{ cm}$ vezetőképességű vas tölti ki. A vas felületén (vagyis az $x = 0$ síkban) z -irányú, helytől független mágneses térerősséget gerjesztünk, amelynek pillanatnyi értéke:

$$H_0 [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha] \text{ A/cm} \quad (0 < \alpha < \pi/2).$$

Feltesszük, hogy a vas mágnesezési görbéje vízszintes egyenes (lásd: 1. ábra), azaz, ha a vas egy bizonyos pontjában fellép egy akármilyen kis térerősség, ott rögtön vele egyirányú állandó B_0 Vs/cm² indukció támad, amelyik mindaddig megmarad, míg csak a térerősség ellenkező irányú nem lesz; akkor az indukció is irányt változtat, de nagysága (B_0) nem változik.



1. ábra

(Itt H és B z -irányú komponenseket jelentenek, a többi komponens 0.)

Kérdés, milyen lesz a térerősség térbeli és időbeli lefolyása, és mennyi a teljesítmény-vesztesség? Ennek a problémának a megoldása az $\alpha = 0$ esetben megtalálható [1]-ben. Az idézett cikk számítási eljárása érvényes marad akkor is, ha a térerősség a vas felületén nem szinuszosan, hanem valamilyen más törvényszerűség szerint váltakozzik, s így ez az eljárás a mi esetünkben is alkalmazható.

Nyilvánvaló, hogy minden villamos mennyiség csak az x »mélységnek« és a t időnek a függvénye, y -től és z -től nem függ. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy H és B z -irányú, az E villamos térerősség és az i áramsűrűség pedig y -irányú.

Vizsgáljunk egy $0 < t < (\pi - 2\alpha)/\omega$ intervallumot, vagyis egy olyan »félperiódust«, amelyben H a felületen a $+z$ -tengely irányába mutat. Hangsúlyozzuk, hogy stacionárius, $2\pi/\omega$ szerint periodikus megoldást keresünk, tehát a $t = 0$ nem jelenti a folyamat kezdetét. A $-(\pi + 2\alpha)/\omega < t < 0$ intervallumban H a felületen negatív, így plauzibilis az a feltevés, hogy $t = 0$ -ra a vasban $-B_0$ remanens indukció van jelen. $t > 0$ -ra egy pozitív indukció-hullám hatol a vasba, amelynek a pillanatnyi mélységét $x = x(t)$ -vel jelöljük. Az [1] dolgozat (2), (3) és (4) képletei szerint:

$$(2') \quad E = 2Bv,$$

$$(3') \quad i = \frac{2Bv}{\rho},$$

és

$$(4') \quad H_r = i x(t),$$

ahol

$$v = \frac{dx}{dt}$$

és

$$H_r = H_0[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha].$$

Innen $x(t)$ -re a

$$H_0[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha] = \frac{2B_0}{\varrho} x \frac{dx}{dt}$$

differenciálegyenlet adódik. Ennek megoldása az $x(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett $0 < t < (\pi - 2\alpha)/\omega$ -ra

$$(1) \quad x(t) = \sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{\cos \alpha - \cos(\omega t + \alpha) - \omega t \sin \alpha}.$$

Látható, hogy $x(t)$ monoton nő.

$$\text{A } t = \frac{\pi - 2\alpha}{\omega} \text{ pillanatban}$$

$$x\left(\frac{\pi - 2\alpha}{\omega}\right) = x_1 = \sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{2 \cos \alpha - (\pi - 2\alpha) \sin \alpha}.$$

Ekkor a vasban x_1 mélységig $+B_0$, $x > x_1$ -re pedig $-B_0$ indukció van jelen.

Tekintsük most a $(\pi - 2\alpha)/\omega < t < 2\pi/\omega$ »félperiódust«, amikor tehát H a felületen a $-z$ tengely irányába mutat. Ismét $x = x(t)$ -vel jelölve a keletkező negatív indukció pillanatnyi behatolási mélységét, (2'), (3') és (4') alapján adódik, hogy

$$H_0[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha] = -\frac{2B_0}{\varrho} x \frac{dx}{dt}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása az $x\left(\frac{\pi - 2\alpha}{\omega}\right) = 0$ kezdeti feltétel mellett $(\pi - 2\alpha)/\omega < t < 2\pi/\omega$ -ra

$$(2) \quad x(t) = \sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{\cos(\omega t + \alpha) + (\omega t + 2\pi - \alpha) \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Ez a formula mindaddig érvényes, amíg $x(t)$ el nem éri x_1 -et. Ha ugyanis ez bekövetkezik, akkor megszűnik a pozitív remanens indukció, H behatolása többé nem okoz az indukcióban jelváltást, s így megszűnik a (2') formula érvényessége is, amelyik éppen azt fejezi ki, hogy az irányváltoztató indukció villamos térerősséget indukál. A (2) egyenlet jobboldalát jelöljük $x^*(t)$ -vel: $x^*(t)$ a $\left(\frac{\pi - 2\alpha}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right)$ intervallumban szigorúan monoton nő, és

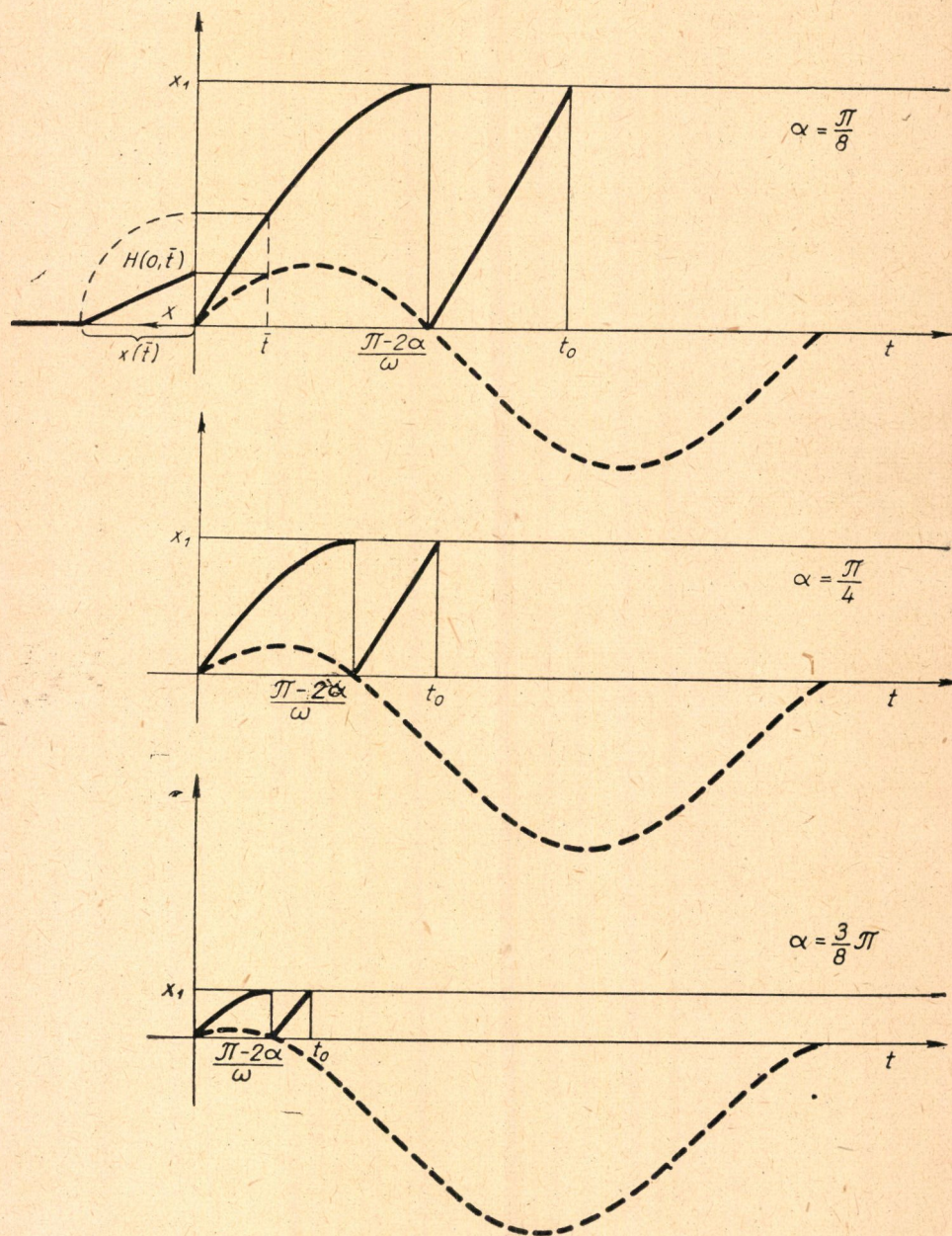
$$\begin{aligned} x^*\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) &= \sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{2 \cos \alpha + (2\alpha + \pi) \sin \alpha} > \\ &> \sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{2 \cos \alpha + (2\alpha + \pi) \sin \alpha} = x_1, \end{aligned}$$

Táblázat

	$0 < t < \frac{\pi - 2a}{\omega}$	$\frac{\pi - 2a}{\omega} < t < t_0$	$t_0 < t < \frac{2\pi}{\omega}$
$x(t)$	$\sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{\cos a - \cos(\omega t + a) - \omega t \sin a}$	$\sqrt{\frac{H_0 \varrho}{B_0 \omega}} \sqrt{\cos(\omega t + a) + (\omega t + 2a - \pi) \sin a + \cos a}$	∞
E	$\begin{cases} \sqrt{\varrho H_0 B_0 \omega} \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos a - \cos(\omega t + a) - t \sin a}}, \\ \text{ha } x < x(t) \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{\varrho H_0 B_0 \omega} \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos(\omega t + a) + (\omega t + 2a - \pi) \sin a + \cos a}}, \\ \text{ha } x < x(t) \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	0
i	$\begin{cases} \sqrt{\frac{H_0 B_0 \omega}{\varrho}} \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos a - \cos(\omega t + a) - \omega t \sin a}}, \\ \text{ha } x < x(t) \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{H_0 B_0 \omega}{\varrho}} \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos(\omega t + a) + (\omega t + 2a - \pi) \sin a + \cos a}}, \\ \text{ha } x < x(t) \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	0
H	$\begin{cases} H_0 [\sin(\omega t + a) - \sin a] - \\ - x \sqrt{\frac{H_0 B_0 \omega}{\varrho}} \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos a - \cos(\omega t + a) - \omega t \sin a}}, \\ \text{ha } x < x(t); \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 [\sin(\omega t + a) - \sin a] - x \sqrt{\frac{H_0 B_0 \omega}{\varrho}} \times \\ \times \frac{\sin(\omega t + a) - \sin a}{\sqrt{\cos(\omega t + a) + (\omega t + 2a - \pi) \sin a + \cos a}}, \\ \text{ha } x < x(t); \\ 0, \text{ ha } x > x(t) \end{cases}$	$H_0 [\sin(\omega t + a) - \sin a]$
B	$\begin{cases} B_0, \text{ ha } x < x(t) \\ -B_0, \text{ ha } x > x(t) \text{ és } x < x_1 \end{cases}$	$\begin{cases} -B_0, \text{ ha } x < x(t) \\ B_0, \text{ ha } x > x(t) \text{ és } x < x_1 \end{cases}$	$\begin{cases} -B_0, \\ \text{ha } x < x_1 \end{cases}$

JELMAGYARÁZAT

- $H_0[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]$
- $x(t)$
- / $H(x, t)$



2. ábra

s így a $\left(\frac{\pi - 2\alpha}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right)$ intervallumban létezik egyetlen t_0 érték, melyre $x^*(t_0) = x_1$.

Következésképpen (2) érvényes a $(\pi - 2\alpha)/\omega < t < t_0$ intervallumban. t_0 meghatározására a következő egyenlet és egyenlőtlenség szolgál:

$$\cos(\omega t_0 + \alpha) + (\omega t_0 + 2\alpha - \pi) \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \cos \alpha + (2\alpha - \pi) \sin \alpha$$

$$\frac{\pi - 2\alpha}{\omega} < t_0 < \frac{2\pi}{\omega},$$

ami egyszerűsítés után így írható:

$$\cos(\omega t_0 + \alpha) + \omega t_0 \sin \alpha = \cos \alpha,$$

$$(3) \quad \pi - 2\alpha < \omega t_0 < 2\pi.$$

A $t_0 < t < 2\pi/\omega$ intervallumban a vasban állandóan $-B_0$ indukció van jelen. Villamos térerősség nem indukálódik, $\text{rot } H = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, H tehát

x -től nem függ, a vasban mindenütt ugyanannyi, mint a felületen. $t > 2\pi/\omega$ -ra az egész folyamat előlről ismétlődik, mert azon feltevésünk, hogy $t = 0$ -ra a vasban végig $-B_0$ előtelítés van jelen, $t = 2\pi/\omega$ -ra már automatikusan teljesül. Így ezen feltevésünkkel éppen a folyamat periodikus voltát biztosítottuk.

Az (1), (2), (2'), (3') és (4') képletekből, ha még figyelembe vesszük a $\text{rot } H = -\frac{\partial H}{\partial x} = i$ összefüggést is, az összes villamos mennyiségek kiszámíthatók. Ezeket a mellékelt táblázatban foglaltuk össze.

Ezeknek a kifejezéseknek alapján a teljesítmény-vesztéséget könnyen meghatározhatjuk. A felületen

$$EH = \begin{cases} \sqrt{\varrho H_0^3 B_0 \omega} \frac{[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos \alpha - \cos(\omega t + \alpha) - \omega t \sin \alpha}}, & \text{ha } 0 < t < \frac{\pi - 2\alpha}{\omega}; \\ \sqrt{\varrho H_0^3 B_0 \omega} \frac{[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos(\omega t + \alpha) + (\omega t + 2\alpha - \pi) \sin \alpha + \cos \alpha}}, & \text{ha } \frac{\pi - 2\alpha}{\omega} < t < t_0; \\ 0, & \text{ha } t_0 < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

EH egy periódusra vonatkozó integrálközepe megadja az egy négyzetcentiméterre eső teljesítmény-vesztés átlagát, $N(\alpha)$ -t W/cm²-ben. Következésképpen

$$N(\alpha) = \sqrt{\varrho H_0^3 B_0 \omega} \frac{\omega}{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi - 2\alpha}{\omega}} \frac{[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos \alpha - \cos(\omega t + \alpha) - \omega t \sin \alpha}} dt + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi-2\alpha}{\omega}}^{t_0} \frac{[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos(\omega t + \alpha) + (\omega t + 2\alpha - \pi) \sin \alpha + \cos \alpha}} dt \Bigg\} = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\varrho \omega H_0^3 B_0} \left\{ \int_0^{\pi-2\alpha} \frac{[\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos \alpha - \cos(\varphi + \alpha) - \varphi \sin \alpha}} d\varphi + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\pi-2\alpha}^{\varphi_0} \frac{[\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + 2\alpha - \pi) \sin \alpha + \cos \alpha}} d\varphi \right\},
\end{aligned}$$

ahol $\varphi_0 = \omega t_0$ a

$$\cos(\varphi_0 + \alpha) + \varphi_0 \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\pi - 2\alpha < \varphi_0 < 2\pi$$

feltételekből határozandó meg.

Mint a bevezetésben mondtuk, innen a veszteség térbeli átlagát megkapjuk, ha $N(\alpha)$ -nak α szerinti integrálközepét vesszük a $(0, \pi/2)$ intervallumon. Így a veszteség cm^2 -enként

$$\begin{aligned}
N^* &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} N(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\varrho \omega H_0^3 B_0} \times \\
& \times \left\{ \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi-2\alpha} \frac{[\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos \alpha - \cos(\varphi + \alpha) - \varphi \sin \alpha}} d\varphi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\pi-2\alpha}^{\varphi_0} \frac{[\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha]^2}{\sqrt{\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + 2\alpha - \pi) \sin \alpha + \cos \alpha}} d\varphi \right] d\alpha \right\}.
\end{aligned}$$

Itt φ_0 természetesen α függvénye.

Az itt szereplő kétszeres integrálokat kiszámítottuk.¹⁾ Azt kaptuk eredményül, hogy

$$N^* = \frac{1,805}{\pi^2} \sqrt{\varrho \omega H_0^3 B_0} = 0,183 \sqrt{\varrho \omega H_0^3 B_0}.$$

Vezessük be a $\mu_h = \frac{B_0}{H_0}$ jelölést. Ha a valóságos folyamatban B_0 az indukció maximumát jelenti, akkor állandó permeabilitás esetén a vas permeabilitása μ_h lenne. Mivel μ_h az a permeabilitás, amit akkor kapunk, ha a valóságos

¹⁾ A számításokat az Intézet numerikus és grafikus módszerek osztályán Simon Sándor végezte, akinek munkájáért ezúton is köszönetet mondunk.

мáгнесеэési гóрбét ánnák áз origót éс á (H_0, B_0) pontot öссзекötő húrjával pótoljuk, azért μ_h -t húrperмеабилитáсnak nevezзük. Ezzel á jelöléssel N^* így írható :

$$N^* = 0,183 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h} .$$

Konstans permeabilitás esetén $N(\alpha)$ nem függ α -tól. Ebben áз esetбен

$$N^* = N = \frac{\sqrt{2}}{4} H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu} = 0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu} .$$

Követкезéseképpen, ha á konstans μ -re érvényes formulát áкарjuk használni, áккор μ_0 helyett á

$$\mu_R = \frac{8 \cdot 1,805^2}{\pi^4} \mu_0 = 0,267 \mu_h$$

редукált permeabilitással kell számolni.

Minthogy á valóságос мáгнесеэési гóрбе гáккорлатилáг á $B_0 = \text{const.}$ éс áз origót éс á (H_0, B_0) pontot öссзекötő húr közóтт helyеэкедик el, azért valószínűлэг á tényлэгес везтесэг á

$$(0,183 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h} , 0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h})$$

intervallumban helyеэкедик el, éспедиг ánnál közеелбб áз áлсó határhoz minél meredeкебб á мáгнесеэési гóрбе.

IRODALOM

- [1] G. und F. HABERLAND : „Das Wechselfeld im gestättigten, massiven Eisen.” *Archiv für Elektrotechnik* 30 (1936) 126—133.
- [2] RÜDENBERG : *Energie der Wirbelströme*. Stuttgart, 1906.
- [3] С. Я. ДУНАЕВСКИЙ : »Влияние вихревых токов на процесс установления потока.« *Электричество* (1951): 2, 55—63.
- [4] НЕЙМАН : *Поверхностный эффект в ферромагнетных телах*. Госэнергиздат, 1949.
- [5] NECHLEBA : „Eindringen eines magnetischen Wechselfeldes in massiven Eisen mit einer von der Feldstärke abhängigen Permeabilität.” *Archiv für Elektrotechnik* 39 (1949) 301—318.

ПОТЕРЯ НА ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

В СЛУЧАЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАСЫЩЕНИЯ ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Я. Ципсер и Р. Тушак

Резюме

На поверхности сплошной цилиндрической вращающейся части возбудим независимое от места синусоидально пульсирующее магнитное поле и другое, не зависящее от времени, но меняющееся синусоидально при обходе по окружности. Амплитуды обоих напряженностей совпадают. Магнитная напряженность в каждой точке направлена по касательной, перпендикулярной к оси. Результирующее напряжение равняется $H_0 [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]$, где α означает угол между полуплоскостью, проходящей через образующую цилиндра и через ось, и какой-то фиксированной полуплоскостью. Наша задача состоит в определении потери мощности в железе вследствие результирующей обеих напряженностей. Мы сделаем следующие предположения :

Вращающуюся часть мы будем рассматривать, как бесконечное полупространство. Вместо того, чтобы работать с меняющимся во времени и при обходе H , мы определим для каждого фиксированного значения α потерю на 1 см^2 , которая была бы причинена в каждой точке границы полупространства предварительной насыщенностью величины $H_0 [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]$ потом возьмем интегральное среднее полученных таким путем, зависящих от α величин потери на отрезке $(0, 2\pi)$. Относительно кривой намагничивания будем предполагать, что она имеет форму как на чертеже 1.

При сделанных предположениях потерю можно вычислить с помощью метода, указанного в работе [1].

Для потери на см. поверхности мы получили значение

$$0,183 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}$$

где

$$\mu_h = \frac{B_0}{H_0}$$

(ϱ имеет размерность $\Omega \text{ см}$, H_0 — размерность А/см , а B_0 — размерность Vs/см^2).

Если мы обозначим в случае истинной кривой намагничивания максимальное значение индукции через B_0 , то в случае постоянной проницаемости потеря будет

$$0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}$$

Так как истинная кривая намагничивания помещается практически между $B_0 = \text{const.}$ и хордой, соединяющей начало координат с точкой (H_0, B_0) , то действительная потеря попадает вероятно в интервал

$$(0,183 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}, \quad 0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h})$$

причем тем ближе к нижней границе, чем круче кривая намагничивания.

WIRBELSTROMVERLUST IM MASSIVEN EISEN

J. CZIPSZER und R. TUSCHÁK

Zusammenfassung

Auf der Oberfläche eines massiven, trommelförmigen Induktors erregen wir eine von der Stelle unabhängige sinusoidal pulsierende, und eine von der Zeit unabhängige aber des Umfanges entlang sinusförmig sich wechselnde magnetische Feldstärke. Die Amplituden der beiden Feldstärken sind gleich. Die magnetische Feldstärke zeigt in jedem Punkte der Oberfläche in die Richtung der, auf die Achse senkrechte, Tangente. Die Resultante der beiden Feldstärken ist

$$H_0 [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha],$$

wo α den Richtungswinkel einer durch eine Mantellinie der Induktorsoberfläche und durch die Achse gelegten Halbebene bedeutet, gemessen von einer festgestellten Halbebene.

Unsere Aufgabe ist den im Eisen auftretenden Leistungsverlust zu bestimmen, welcher durch die Resultante der beiden Feldstärken verursacht wird.

Nehmen wir die folgenden annähernden Voraussetzungen an.

Anstatt mit der in der Zeit und entlang des Umfanges sich wechselnder Feldstärke zu rechnen, bestimmen wir für jeden festen α -Wert jenen auf 1 cm^2 entfallenden Verlust, den eine in jedem Punkte der Randfläche des Halbraumes

$$H_0 [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha]$$

gleiche Feldstärke verursachen würde, um weiterhin die Integralmitte der so gewonnenen, von α abhängigen Verlustwerte in dem Intervall $(0, 2\pi)$ zu nehmen. Wir setzen voraus, dass die Magnetisierungskurve den in Abb. 1 dargestellten Ablauf hat.

Unter Annahme dieser Voraussetzungen lässt sich der Verlust mittels der in der Arbeit [1] angegebenen Methode berechnen.

Für den auf 1 cm² Oberfläche entfallenden Verlust ergibt sich der Wert : 0,183 $H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}$ W/cm, wo

$$\mu_h = \frac{B_0}{H_0},$$

und ϱ , H_0 , B_0 die folgenden Dimensionen haben :

$$\varrho : \Omega \text{ cm}, H_0 : \text{A/cm}, B : \text{Vs/cm}^2.$$

Wenn wir von der wirklichen Magnetisierungskurve ausgehen und den Scheitelpunkt der Induktion durch B_0 bezeichnen, ist der Verlust — im Falle konstanter Permeabilität — gleich $0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}$.

Da die wirkliche Magnetisierungskurve praktisch zwischen der Geraden $B_0 = \text{const.}$ und zwischen der durch den Nullpunkt und den Punkt (H_0, B_0) bestimmte Sehne der (H, B) Ebene verläuft, ist der wirkliche Verlust wahrscheinlich in dem Intervall

$$(0,183 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h}, 0,354 H_0^2 \sqrt{\varrho \omega \mu_h})$$

aufweisbar, und zwar desto näher zur unteren Grenze, je steiler die Magnetisierungskurve ist.

INDEX

J. EGERVÁRY : Über eine Anwendung der Hunyadi—Scholtzschen Matrizen in der Theorie der ebenen und räumlichen Fachwerken.....	289
L. TAKÁCS : Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden bei der Untersuchung gewisser meteoropathologischer Erscheinungen.....	301
P. MEDGYESSY : An approximate method for the decomposition of a compound of Cauchy frequency functions	321
P. MEDGYESSY : A supplement to the paper „Some recent results concerning the decomposition of compound probability distributions”	331
F. HORVÁTH : Technique of nomography	343
A. RÉNYI—K. RÉNYI : Über die Schlichtheit des komplexen Potentials, I.....	353
G. FREUD : Über Wärmeleitungs- und Diffusionsprobleme mit zusammengesetzten Randbedingungen I.....	369
J. CZIPSZER : Sur la propagation de la chaleur dans une barre infinie.....	395
J. BOGNÁR : Calculation of heat transmission of the floor of a heated room built on the ground	409
J. LADIK—MRS. A. CSUKÁS : Magnetic interaction arising from the motion of two electrons in the H_2 -molecule	425
J. CZIPSZER—R. TUSCHÁK : Wirbelstromverlust im massiven Eisen.....	443

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Эгервари: Приложение матриц Хуньяди-Шольца к теории решетчатых конструкций	289
Л. ТАКАЧ: Применение теоретико-вероятностных методов при исследовании некоторых метеоро-патологических явлений	301
П. Меддеши: Приближенный метод разложения на компоненты смеси функций плотности типа Коши	321
П. Меддеши: Дополнение к статье «О новых результатах разложения на компоненты смеси функций распределения вероятностей»	331
Ф. ХОРВАТ: Оформление номограмм	343
А. РЕНЬИ—К. РЕНЬИ: Об однолистности комплексного потенциала, I.	353
Г. ФРЕЙД: Задачи-теплопроводности и диффузии со сложными краевыми условиями I.	369
Я. ЦИПСЕР: Теплопроводность в бесконечном стержне, I	395
Я. БОГНАР: О теплопроницаемости полов топленных помещений, построенных на уровне грунта	409
Я. ЛАДЪИК—А. ЧУКАШ: Магнитное взаимодействие в молекуле H_2 , происходящее из движения двух электронов	425
Я. ЦИПСЕР—Р. ТУШАК: Потеря на вихревые токи в случае предварительного насыщения постоянным током	443